

## FORMULACION CONTINUA DE PROCESOS DE FALLA EN HORMIGON

Guillermo Etse (Dr.-Ing.)  
Laboratorio de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán  
S.M. de Tucumán, Argentina

### Resumen

Diferentes formulaciones de ablandamiento fueron propuestas para describir computacionalmente los procesos de falla en hormigón. Estas pueden ser agrupadas en dos grandes grupos; formulaciones continuas y formulaciones discontinuas. Las primeras se basan en el concepto de fisura difundida, mientras que las segundas en el concepto de fisura discreta.

En el presente estudio se utiliza una formulación continua, basada en concepto de energía de fracturas, para la simulación de procesos de falla en hormigón. La misma varía fuertemente según se trate de Modo I o Modo II de fractura e introduce una longitud característica a nivel material para disminuir la fuerte dependencia de la malla que caracteriza los resultados de las formulaciones continuas.

Los resultados muestran la crucial influencia de la regularización de la formulación de ablandamiento vía energía de

fracturas y, por otro lado, de la estrategia de elementos finitos adoptada en la disminución de la dependencia en el tamaño de la malla de las predicciones del comportamiento de postico del hormigón.

## 1. Introducción

El creciente uso del método de los elementos finitos en el análisis estructural y la necesidad cada vez mayor de resultados confiables y realistas, ha llevado en el último tiempo a incorporar teorías cada vez más sofisticadas para modelar el comportamiento de los materiales constitutivos de tales estructuras y de los elementos finitos en que se discretizan las mismas. El principal objetivo de estos desarrollos es simular el comportamiento de estructuras hasta su capacidad última, incursionando en el régimen de pospico, a fin de obtener conclusiones acerca del grado de seguridad y de la ductilidad de las mismas.

En el caso de estructuras de hormigón, los procesos de falla comienzan en general en forma de microdefectos distribuidos quienes finalmente se conjugan para formar un único macrodefecto fuertemente localizado. Idealmente hablando, las estrategias computacionales para la simulación de la falla deben incluir tanto la degradación de las propiedades relevantes del continuo, efecto a nivel volumétrico, como la degradación en interfaces discretas de la resistencia, rigidez y ductilidad.

Para simular fenómenos de falla frágil y dúctil en hormigón, tanto modelos continuos como modelos de interface o discretos fueron propuestos en tiempos recientes. Este trabajo se concentra en el criterio de fisura continua o difundida (*smearred crack approach*), el cual sufre en general de fuertes dependencias de los resultados en el tamaño y orientación de la malla considerada, si no se toman provisiones especiales. Sin embargo el uso de modelos de elementos finitos enriquecidos y de estrategias de regularización del comportamiento de ablandamiento o de posbifurcación pueden contribuir notablemente a capturar la carga límite y la respuesta de pospico del hormigón en forma objetiva.

El presente trabajo examina la simulación de falla en hormigón por medio de un modelo constitutivo desarrollado recientemente por Etse y Willam (1994) sobre la base del criterio triaxial extendido de falla de Leon. El modelo cubre la totalidad del espectro de respuesta tanto en tracción como en corte e incluye una formulación isotrópica de *hardening*. La degradación de resistencia y las propiedades de decohesión en régimen de tracción y de compresión con bajo nivel de confinamiento es descrito en términos de una formulación de ablandamiento basada en conceptos de energía de fractura. La misma introduce a nivel material una longitud característica que asegura objetividad respecto del tamaño de la malla y minimiza la tensión residual de bloqueo debido a la forma isotrópica del *softening*.

La crucial influencia de la formulación de elementos finitos y de la regularización de falla introducida por la energía de fracturas será ilustrada con ejemplos numéricos de tracción y compresión directa que estudian la sensibilidad de los resultados con respecto tanto al tamaño como a la orientación de la malla. Se mostrará que la pérdida de objetividad de las predicciones de la formulación de fisura difundida se reduce sustancialmente si se considera la regularización de energía de fracturas y una formulación de elementos finitos capaz de reproducir a nivel de elemento la condición de localización de falla detectada a nivel material.

## 2. El Modelo Extendido de Leon

La formulación constitutiva triaxial para hormigón usada en el presente estudio, el Modelo Extendido de Leon, se basa en la teoría del flujo no-asociado de la plasticidad. El mismo incluye una formulación isotrópica de endurecimiento y de ablandamiento (*hardening* y *softening*) en el régimen de pre- y de pospico respectivamente. Este último es activado solamente por estados de tensiones ubicados por debajo del punto de transición que marca el límite entre la zona de comportamiento frágil y la zona de comportamiento dúctil, ver Hurlbut (1985) y Etse (1992).

La ecuación que caracteriza la superficie de fluencia del Modelo Extendido de Leon tanto en el régimen de endurecimiento como en el de ablandamiento es.

$$F = \left[ \frac{(1-k)}{f'_c} \left( p + \frac{\rho g(\theta)}{\sqrt{6}} \right)^2 + \frac{\rho g(\theta)}{f'_c} \sqrt{\frac{3}{2}} \right]^2 + \frac{k^2 m}{f'_c} \left( p + \frac{\rho g(\theta)}{\sqrt{6}} \right) - k^2 c = 0 \quad (1)$$

donde  $p$ ,  $\rho$  and  $\theta$  denotan las coordenadas del espacio de tensiones de Haigh-Westergaard,  $f'_c$  la resistencia uniaxial de compresión y la función  $g = g(\theta)$  describe la variación de la resistencia deviatorica  $\rho = \rho(\theta)$  como una función del ángulo de Lode en analogía a la aproximación elíptica del Modelo de 5 Parámetros de Willam y Warnke (1974). Las diferentes superficies de carga en el régimen de endurecimiento plástico son generadas por el parámetro escalar  $k$  que varía entre 0.1 y 1.0, mientras  $c$  y  $m$ , los parámetros de cohesión y fricción respectivamente, permanecen constantes. La variación de  $k$  esta definida de forma tal de lograr un comportamiento de endurecimiento que sea sensible al nivel de confinamiento de tensiones existente en el hormigón.

Los estados de ablandamiento por debajo del punto de transición (PT) del comportamiento frágil al comportamiento dúctil de falla, estan definidos por una formulación basada en conceptos de energía de fractura. Dicha formulación involucra una longitud característica para disminuir la fuerte dependencia en el tamaño de los elementos de la malla que caracterizan a las soluciones computacionales del concepto de fisura difusa.

El Modelo Extendido de Leon incluye además una ley del flujo no-asociado para reducir la excesiva dilatación en la zona de bajo confinamiento.

### 3. Formulación de Ablandamiento basada en Energía de Fractura

Para obtener resultados objetivos, la formulación de ablandamiento del continuo plástico equivalente debe estar basada en una homogenización apropiada de la zona donde se localiza la falla con la region finita del sólido (en este caso hormigón) que representa. En el caso de tracción simple (Modo I de falla) esto corresponde al modelo de fractura compuesta desarrollado anteriormente por Willam et. al. (1984), donde la propagación de la tensión de fractura dentro de un volumen elemental es descrito en términos de un proceso de ablandamiento plástico equivalente que mantiene la misma tasa de disipación de energía de fractura. Este concepto lleva a redefinir la relación local  $\sigma_t - \epsilon_f$  del continuo equivalente en términos de la relación entre la tensión de tracción  $\sigma_t$  y el desplazamiento de apertura de fisura  $u_f$ , que caracteriza el comportamiento por fisuración del volumen elemental.

Como resultado del proceso de homogenización, la energía de fractura  $dG_f^I$  disipada durante el proceso de fisuración por tracción a lo largo de la superficie  $A_t$

$$dG_f^I A_t = \int_{A_t} \sigma_t du_f dA \quad (2)$$

debe ser equivalente a la energía disipada durante el ablandamiento plástico en el continuo de volumen  $V_t$  que participa en el proceso de fractura por tracción

$$dW_f = \int_{V_t} \bar{\sigma}_t d\bar{\epsilon}_f dV \quad (3)$$

donde  $\bar{\epsilon}_f$  designa la deformación específica equivalente de fractura por tracción. Como resultado del desplazamiento de apertura de fisura  $u_f$  puede ser expresado en términos de la deformación equivalente de fractura por medio de la longitud característica  $h_t$

$$du_f = d\bar{\epsilon}_f h_t \quad (4)$$

que puede ser interpretada como una medida de la separación entre fisuras.

De acuerdo a las observaciones experimentales de Hurlbut (1985) la relación  $\sigma_t - u_f$  puede ser descripta con una función de decaimiento exponencial de la forma

$$\sigma_t = f_t \exp\left(-5 \frac{u_f}{u_r}\right) \quad (5)$$

donde  $f_t$  define la resistencia uniaxial de tracción y  $u_r$  el desplazamiento de rotura correspondiente a resistencia residual cero.

Para Modo II de fractura el modelo de fractura compuesta conlleva a un proceso de homogenización similar al caso de tracción simple. Ahora el concepto incorpora la energía de fractura  $dG_f^{II}$  disipada durante la formación de una banda de corte caracterizada con el área superficial  $A_s$  y el espesor  $h_s$ ,

$$dG_f^{II} A_s = \int_{A_s} \rho_f du_s dA \quad (6)$$

En este caso  $\rho_f$  denota la degradación de resistencia al corte y  $u_s$  el desplazamiento de apertura de fisura en Modo II de fractura. Considerando la igualdad de la energía de fractura bajo corte con la del continuo plástico equivalente de tamaño  $V_s$ , obtenemos la relación

$$du_s = d\bar{\epsilon}_f h_s \quad (7)$$

Más aun, la relación entre  $\rho_f$  y  $u_s$  puede ser expresada en una forma similar a la eq. (5), como

$$\rho_f = \rho_s \exp\left(-5 \frac{u_s}{u_r}\right) \quad (8)$$

donde  $\rho_s$  define la resistencia al corte la cual, en el caso de materiales friccionales, depende de la tensión volumétrica  $p$ .

En el caso del Modelo Extendido de Leon, que sintetiza en una simple formulación el espectro completo de respuesta del hormigón, el modelo de fractura compuesta define entonces en una forma continua el proceso de homogenización para todo tipo posible de fractura, desde Modo I hasta Modo II pasando por todas las formas intermedias. El mecanismo de ablandamiento es controlado por el parámetro de decohesión  $c$  expresado como

$$c = \begin{cases} \frac{\sigma_t}{f_t} = \exp\left(-5 \frac{u_f}{u_r}\right) & \text{en Modo I de fractura} \\ \frac{\rho_f}{\rho_s} = \exp\left(-5 \frac{u_s}{u_r}\right) & \text{en Modo II de fractura} \end{cases} \quad (9)$$

El desplazamiento de apertura de fisura en Modo I y Modo II de fractura es definido por medio del parámetro cinemático  $\kappa_f$

$$d\kappa_f = du_f = d\bar{\epsilon}_f h_t \quad \text{y en general} \quad d\kappa_f = du_s = d\bar{\epsilon}_f \frac{h_t}{G_f^{II}} \quad (10)$$

En este caso los diferentes comportamientos de ablandamiento en tracción y en compresión con bajo confinamiento son controlados por la relación de la energía disipada por fractura  $G_f^{II}/G_f^I$ . Esta relación es definida en términos de la tensión volumétrica  $p$ . En la última ecuación observamos que la longitud característica  $h_t$ , que en el caso de fractura por tracción

tiene el significado físico de la separación entre fisuras, es modificada por medio de la relación de energía disipada por fractura para tener en cuenta la modificación del espaciamiento entre fisuras en el caso de ablandamiento bajo corte.

En suma, el concepto de energía disipada por fractura conlleva a una redefinición de la formulación local del ablandamiento en términos de propiedades fundamentales del proceso de fractura que están definidas por la relación  $\sigma_f - u_f$  o  $\rho_f - u_s$ , y que caracterizan el comportamiento de ablandamiento.

Corresponde ahora analizar la definición de la longitud característica en una discretización de elementos finitos. Asumimos para ello una barra de hormigón traccionada hasta alcanzar su régimen de pospico o ablandamiento. La malla de elementos finitos considerada cubre un elemento en toda la altura y espesor de la barra y  $n$  elementos a lo largo del eje de la misma. En el régimen de pospico, la sobrecarga plástica tiene entonces lugar en solo un elemento mientras que en los restantes se producirá una descarga elástica. Si el elemento cargado plásticamente posee más de un punto de integración a lo largo del eje axial de la barra para la evaluación de las tensiones y deformaciones, entonces la energía disipada durante el ablandamiento es

$$dW_f = \int_{V_e} \sigma_t d\bar{\epsilon}_f dV = \int_{A_t} \sigma_t d\bar{\epsilon}_f h_e dA \quad (11)$$

donde  $h_e$  designa la dimensión del elemento en la dirección de carga. Considerando la equivalencia con la energía  $dG_f^j$  disipada por fractura en la ecuación (2), obtenemos

$$du_f = d\bar{\epsilon}_f h_e \quad (12)$$

La ecuación anterior define la longitud característica para análisis uni-dimensionales de elementos finitos. Obviamente, si la deformación plástica tiene lugar solo en un punto de integración a lo largo del eje de carga, la longitud característica resulta entonces igual a  $h_e/n$ , donde  $n$  es el número de puntos de integración en la dirección considerada.

Para análisis bidimensionales Dahlbom & Ottosen [4] proponen para la longitud característica la dimensión máxima de la región fisurada del elemento en las direcciones normal a los planos relevantes de fisuración. Dado que el Modelo Extendido de Leon es un modelo elasto-plástico isotrópico basado en el concepto de fisura difusa rotativa (es decir sin memoria de fisuración), proponemos que la longitud característica sea determinada como la longitud promedio de la zona fisurada en dos direcciones perpendiculares.

#### 4. Performance Computacional

##### 4.1 Ensayo No-homogeneo de Tracción Simple en Estado Plano de Deformaciones

Analizamos en esta sección uno de los problemas cruciales de la simulación computacional del comportamiento físico no-lineal de estructuras de hormigón, el cual es la dependencia de las soluciones en el tamaño de la malla considerada. En este caso particular nos referimos a las soluciones del concepto de fisura difusa, que es el considerado en nuestra formulación material. Nos referimos al ejemplo ilustrado en la Fig. 1 correspondiente al problema de tracción simple de un bloque de hormigón en estado plano de deformaciones y con restricción lateral al desplazamiento. En la discretización que se muestra en la Fig. 1 se utilizaron elementos cuadriláteros de cuatro puntos de integración y el comportamiento constitutivo es modelado con el Modelo Extendido de Leon. En el análisis numérico, el desplazamiento vertical del bloque de hormigón es prescripto mientras que los desplazamientos horizontales en los extremos superior e inferior del sólido fueron impedidos. Debido a la doble simetría del problema, se discretizó solamente el cuadrante superior derecho del bloque de la Fig. 1. Claramente, la condición de simetría impide, en el caso del análisis bajo compresión simple, el desarrollo de modos de falla no-simétricos, sin embargo el modo de fisuración por tracción no está impedido.

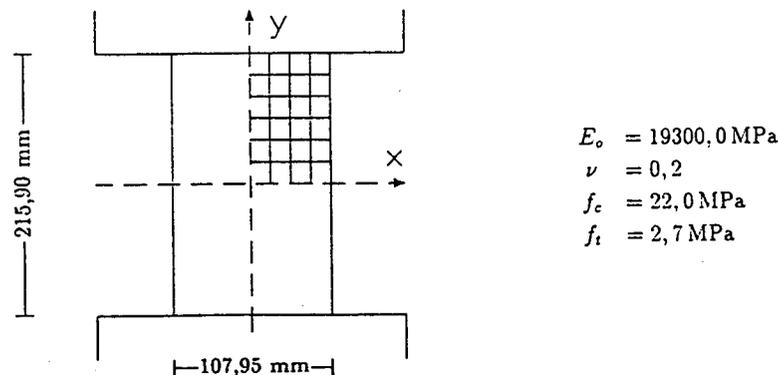


Figura 1: Geometría y parámetros materiales del problema no-homogeneo de deformaciones planas.

En el presente estudio analizaremos la influencia de la formulación del ablandamiento incluida en el modelo material y del tipo de elemento finito utilizado en la discretización, en la pérdida de objetividad de las predicciones computacionales. Con ese fin consideraremos dos formulaciones diferentes de elementos finitos de cuatro nodos, por un lado la formulación convencional de desplazamientos bilineales  $Q4$  y por el otro la formulación mixta de desplazamientos-deformación específica  $Q1E4$  desarrollada por Simo y Rifai (1990). Este último elemento fue originalmente propuesto para mejorar la performance de la formulación compatible de elementos finitos en problemas de flexión y están caracterizados por un campo enriquecido de deformaciones específicas.

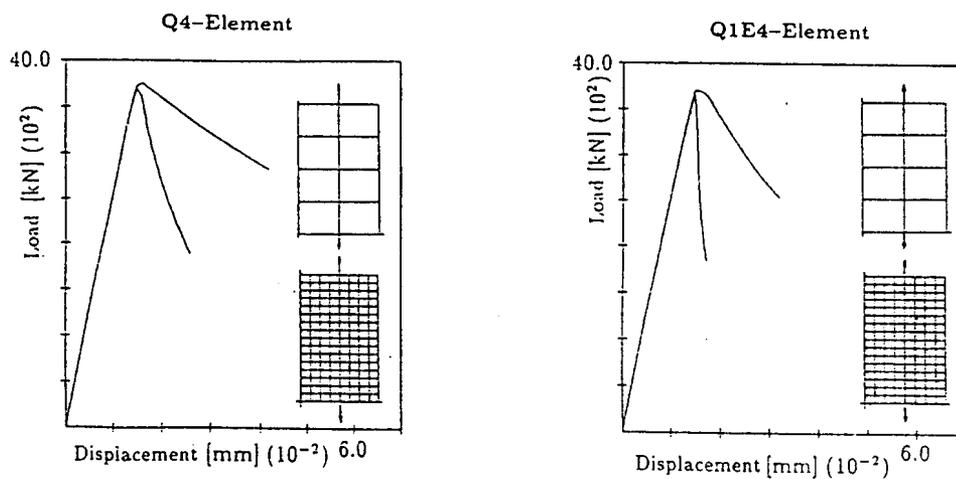


Figura 2: Estudio de objetividad respecto de la malla con la formulación de ablandamiento convencional.

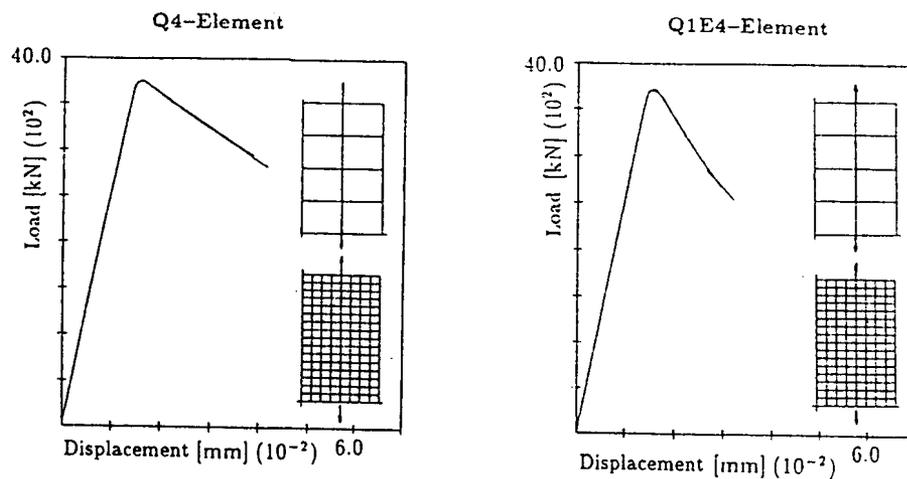


Figura 3: Estudio de objetividad respecto de la malla con la formulación de ablandamiento basada en energía de fractura.

La habilidad de diferentes formulaciones de elementos finitos para capturar localización fue verificada anteriormente por medio del llamado *Test Débil de Localización*, propuesto por Steinmann y Willam (1991). Ellos demostraron que el elemento  $Q1E4$ , en oposición al  $Q4$ , es capaz de transmitir la falla localizada, detectada a nivel constitutivo, en el dominio de elementos. La performance de ambos elementos en conjunción con problemas relacionados con procesos de falla en elementos de hormigón fue examinado por Etse, Steinmann y Willam (1991). En este último trabajo se pudo determinar que la objetividad de las predicciones de elementos finitos de comportamientos no-lineales de falla requieren no solamente de una formulación de ablandamiento enriquecida como la basada en el concepto de energía de fracturas, sino también de una formulación de elementos finitos apropiada, como la del elemento  $Q1E4$ , para evitar la excesiva dispersión de la zona o banda de falla.

En la Fig. 2 se ilustran las curvas carga-deflexión de las discretizaciones con  $(2 \times 4)$  y  $(8 \times 16)$  elementos  $Q4$  y  $Q1E4$ . En todos los análisis se usó una formulación convencional o local de ablandamiento en el Modelo Extendido de Leon, es decir, no se utilizó longitud característica alguna en la relación  $c - \bar{\epsilon}_f$  descrita en las ecs. (9) y (10). Los resultados de la Fig. 2 muestran el dramático efecto de la formulación local de ablandamiento, que conduce a fuertes dependencias o pérdidas de objetividad de los resultados con respecto del tamaño de la malla.

El análisis de refinamiento regular de la malla fue repetido pero considerando la formulación de ablandamiento basada en conceptos de energía de fracturas en el Modelo Extendido de Leon. Los resultados de estos análisis en forma de curvas carga-deflexión son ilustrados en la Fig. 3. Los comportamientos de pospico, para ambas formulaciones de elementos finitos, muestran una completa objetividad respecto de la malla. La malla deformada obtenida en el último estado de carga con la discretización de  $(8 \times 16)$  elementos  $Q1E4$  se muestra en la Fig. 4. La correspondiente malla deformada para el caso de elementos  $Q4$  es similar a la de la Fig. 4, indicando que en la falla por tracción la localización de deformaciones tiene lugar en una línea de elementos, independientemente del tipo de formulación de elementos finitos utilizada. Esto se puede corroborar en la Fig. 5 donde se muestra la distribución de la deformación plástica equivalente al final de la historia de carga para el caso de las mallas  $(8 \times 16)$  con elemento  $Q4$  y  $Q1E4$ . Dichos resultados son indicativos que al final del estado de deformación la disipación plástica tiene lugar a lo largo de una línea de elementos.

De los resultados se concluye que la objetividad de los resultados, en el caso de falla por tracción, requiere solamente de una formulación enriquecida del ablandamiento como la considerada en el Modelo Extendido de Leon. Este no es el caso de la falla por corte o compresión como veremos mas adelante.

Con el fin de ilustrar mas contundentemente la capacidad de la formulación de ablandamiento basada en conceptos de energía de fracturas para regularizar el comportamiento de pospico, consideramos a continuación la malla no-regular de la Fig. 6 con elementos  $Q4$ . La comparación entre las curvas carga-deflexión del ensayo de tracción directa llevados a cabo con la malla regular y la no-regular de elementos  $Q4$  se ilustra en la Fig. 7. La Fig. 8 por otra parte, muestra la distribución de la deformación plástica equivalente y de los puntos de integración con deformación plástica activa en la malla no-regular, al final de la historia de carga, indicando que el modo de falla no es afectado por la distorsión de la malla. Se debe tener en cuenta que en la malla no-regular, contrariamente al caso de la regular, la propagación de falla no es paralela a las líneas de separación entre elementos, por lo que fenómenos de bloqueo de tensiones son dables de ocurrir. Los resultados de la Fig. 8 indican, sin embargo, que el concepto de fisura difusa rotante no introduce bloqueos artificiales de tensiones. Esta conclusión también puede ser obtenida de la Fig. 7 que muestra que las predicciones del regimen de pospico obtenidas con la malla regular y distorsionada coinciden completamente.

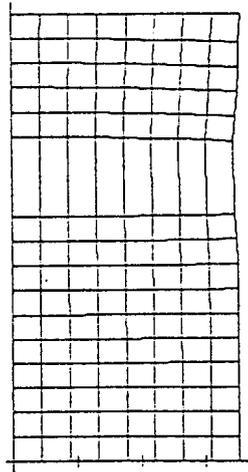


Figura 4: Estado final de deformación de la malla con elementos Q1E4.

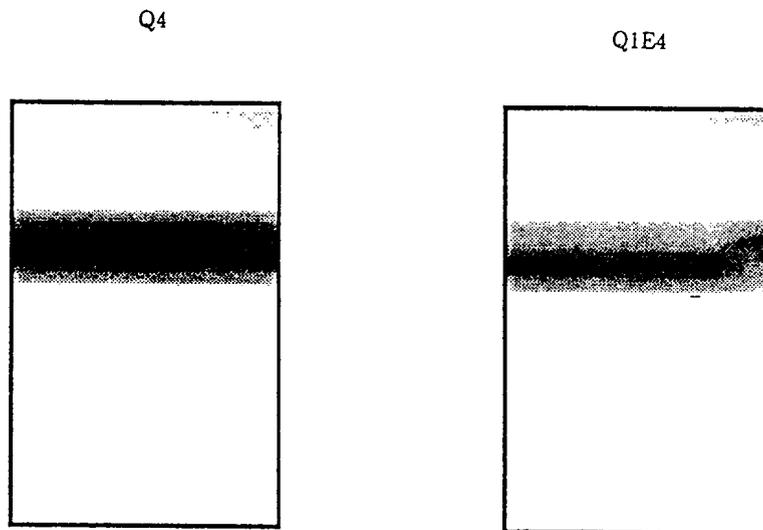


Figura 5: Distribución de la deformación plástica equivalente en el estado final de deformación.

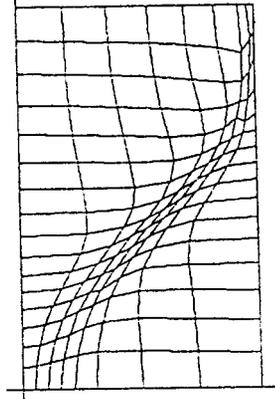


Figura 6: Malla no-regular con (8x16) elementos.

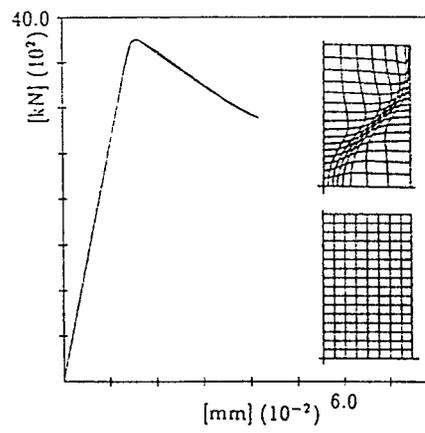


Figura 7: Comparación de las curvas carga-desplazamiento de la malla regular y no-regular con elementos Q4.

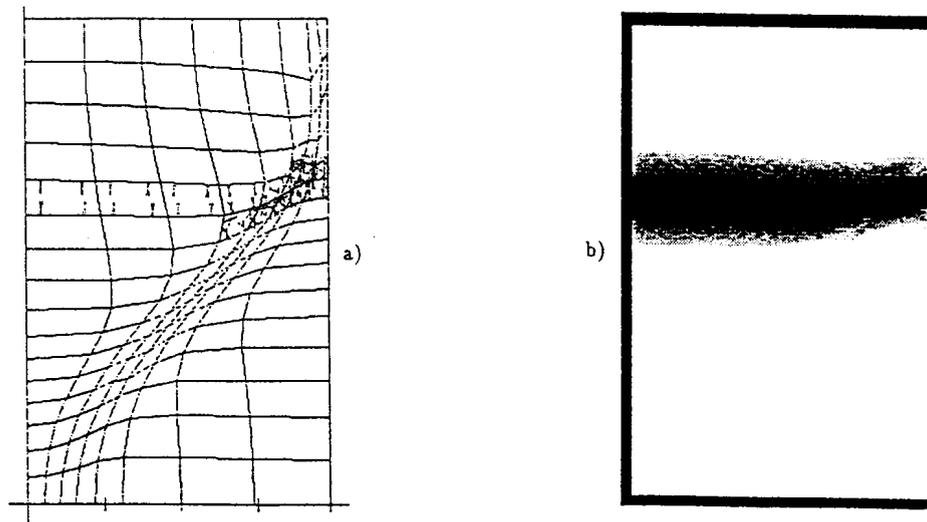


Figura 8: a) Puntos de integración con deformación plástica activa y, b) distribución de la deformación plástica equivalente en la malla no-regular. Estado final de deformación.

#### 4.2 Ensayo No-Homogeneo de Compresión Simple en Estado Plano de Deformaciones

Analizamos ahora la pérdida de objetividad de los resultados respecto del tamaño de la malla para el caso del ensayo a compresión simple del bloque de hormigón de la Fig. 1.

La Fig. 9 muestra los resultados de la densificación regular de las mallas con elementos  $Q4$  y  $Q1E4$  respectivamente. En ambos casos se consideró una formulación de ablandamiento local en el Modelo Extendido de Leon. Estos resultados indican que ambas formulación de elementos conducen a una dependencia en el tamaño de la malla de la carga pico, del comportamiento de pospico y de la resistencia residual. Esta dependencia es considerablemente mayor en el caso de las mallas con elementos  $Q4$ . El responsable de tan fuerte pérdida de objetividad es la gran dispersión de la falla que dichos elementos ocasionan. Esto se puede observar en la Fig. 10 donde se muestran las distribuciones de la deformación plástica equivalente y de los puntos de integración con deformación plástica activa al final de la historia de deformación obtenidas con la malla mas densa de elementos  $Q4$  y  $Q1E4$ . Estos resultados muestran claramente que el elemento estandar  $Q4$  dispersa la banda de falla en una gran superficie. Es decir, la formulación  $Q4$  impide capturar la localización de la falla en una banda de ancho limitado, llevando a una forma ficticia de colapso con gran dispersión de la falla. El efecto de localización solamente podrá ser capturado por la formulación  $Q4$  en el caso límite en que se utilice una malla extremadamente densa.

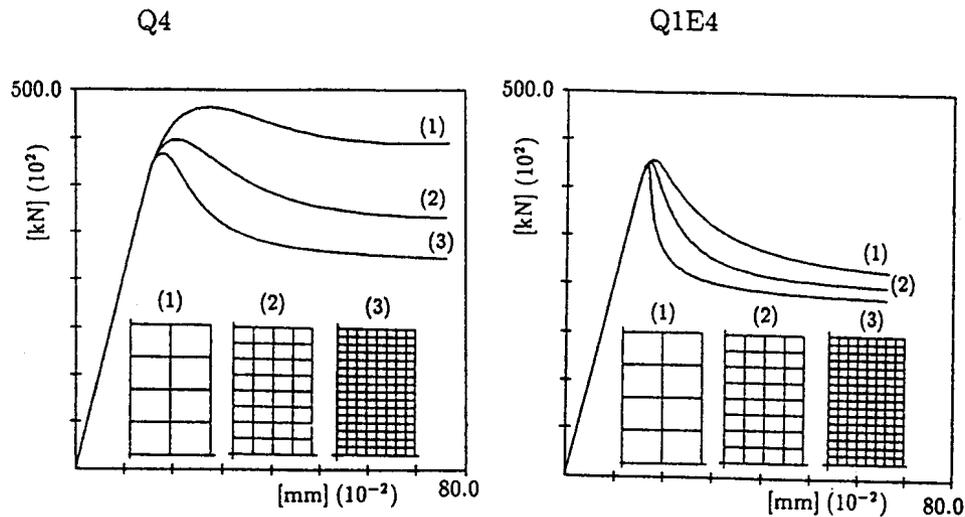


Figura 9: Estudio de objetividad respecto de la malla con la formulación de ablandamiento convencional. Ensayo de compresión simple.

La Fig. 11 muestra los resultados del análisis de densificación regular de la malla con elementos  $Q4$  y  $Q1E4$  respectivamente, utilizando la formulación de ablandamiento basada en conceptos de energía de fractura en el Modelo Extendido de Leon. La comparación de estos resultados con los de la Fig. 9 muestran que la formulación enriquecida de ablandamiento disminuye considerablemente la pérdida de objetividad de las soluciones de elementos finitos obtenidas con mallas compuestas tanto por elementos  $Q4$  como así también  $Q1E4$ .

Comparando todos los resultados concluimos que la menor pérdida de objetividad de la carga límite, del comportamiento de pospico y de la carga residual respecto al tamaño de la malla se obtuvo al utilizar la formulación enriquecida de ablandamiento a nivel material conjuntamente con la formulación mixta  $Q1E4$  a nivel de elementos finitos.

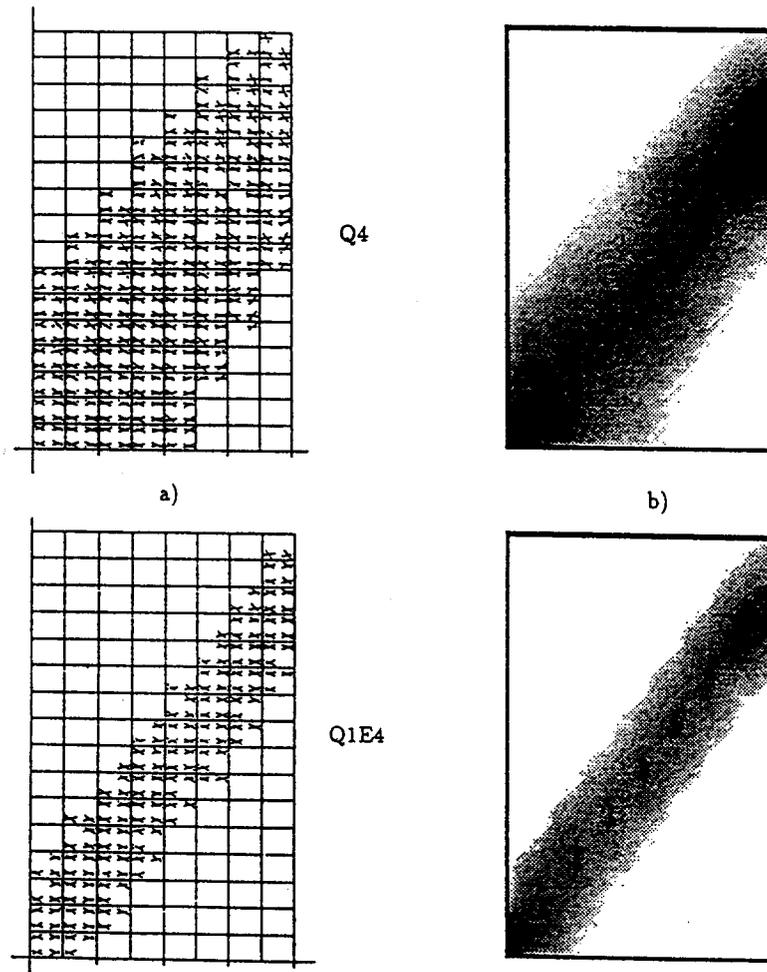


Figura 10: a) Puntos de integración con deformación plástica activa y, b) distribución de la deformación plástica equivalente en la malla (8x16). Estado final de deformación.

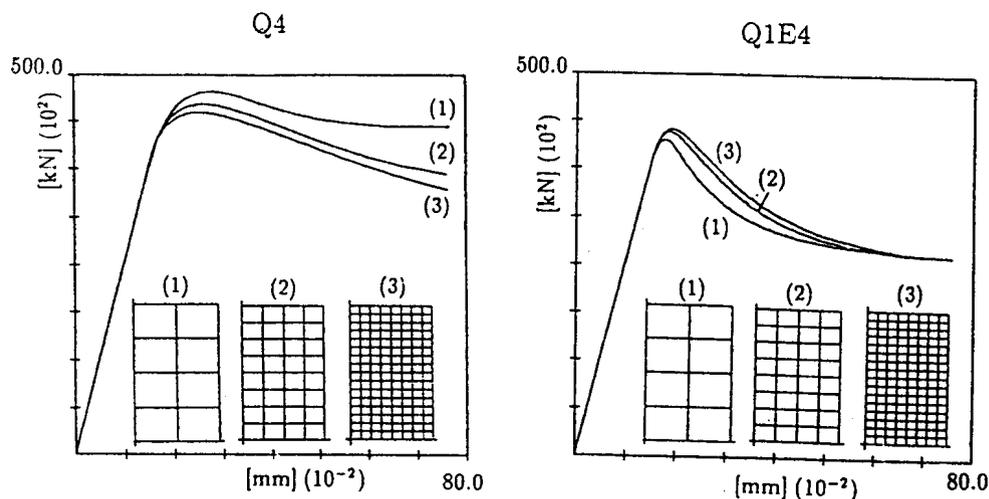


Figura 11: Estudio de objetividad respecto de la malla con la formulación de ablandamiento basada en energía de fractura.

## 5. Conclusiones

Uno de los mayores inconvenientes desde las primeras consideraciones de análisis computacional no-lineal de estructuras de hormigón, allá por los años '60, fue la fuerte dependencia de la carga límite y de la predicción del comportamiento de postpico en la densidad y tipo de malla considerada. Este tema reviste hoy una importancia fundamental dada la creciente necesidad de resultados confiables.

En el último tiempo diversas formulaciones enriquecidas del ablandamiento del hormigón han sido propuestas para reducir la dependencia de las predicciones de elementos finitos en el tamaño de la malla considerada. Sin embargo estas propuestas solo brindan ventajas para determinadas formas de rotura y no para el amplio espectro de formas de falla (por tracción, corte, compresión, etc.) que pueden ser activadas en una estructura.

Los resultados de los estudios computacionales en este trabajo muestran la efectividad del modelo de fisura continua o difundida, formulado en base al concepto de energía de fracturas, para regularizar el comportamiento de postpico (comportamiento de ablandamiento) en procesos de falla que activan tanto modo I (tracción directa) como modo II (corte y compresión) de fractura.

Por otra parte se verificó la importancia de la formulación de elementos finitos utilizada, en la regularización del comportamiento de ablandamiento. En ese sentido se demostró que la reducción de la pérdida de objetividad de las predicciones de falla bajo compresión uniaxial,

que activa modo II de fractura, requiere no solo de una formulación enriquecida de ablandamiento a nivel material sino también de formulaciones de elementos finitos que sean capaces de reproducir la forma localizada de la falla en una banda de fractura de ancho limitado. Estas formulaciones de elementos finitos, como la del  $Q1E4$ , están caracterizadas por funciones de forma definidas mediante polinomios de mayor orden que las formulaciones compatibles, que permiten reproducir las configuraciones deformadas dentro el campo del elemento evitando la transferencia de deformaciones espurias a elementos vecinos.

## 6. Referencias

1. O. Dahlblom and N. Ottosen, (1990), "Smearred Crack Analysis using Generalized Fictitious Crack Model", *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 116, 55-76.
2. G. Etse, P. Steinmann and K. Willam, (1991), "Computational Aspects of Localized Failure Simulations in Plain Concrete", *Proc. Int. RILEM/ESIS Conf. Fract. Proc. in Concrete, Rock and Ceramics*, Eds. J. van Mier, J. Rots & A. Bakker, Vol. 2, 651-660.
3. G. Etse and K. Willam, (1992), "A Fracture Energy-based Constitutive Theory for the Inelastic Behavior of Plain Concrete", aceptado para su publicación en *J. Engrg. Mech.*, ASCE.
4. G. Etse, (1992), "Theoretische und numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton", Dr.-Ing. Thesis, University of Karlsruhe.
5. B. Hurlbut, (1985), *Experimental and Computational Investigation of Strain-Softening in Concrete*, M.S. Thesis, University of Colorado, Boulder.
6. J.C. Simo and M.S. Rifai, (1990), "A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes", *Int. J. Num. Meth. Engr.*, Vol. 29, 1595-1638.
7. P. Steinmann and K. Willam, (1991), "Performance of Enhanced Finite Element Formulations in Localized Failure Computations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, 845-867.
8. K. Willam, N. Bićanić and S. Sture, (1984), "Constitutive and Computational Aspects of Strain-Softening and Localization in Solids", *Constitutive Equations: Macro and Computational Aspects*, Ed. K. Willam, ASME, New York, 233-252.
9. K. Willam and E. Warnke, (1974), "Constitutive Models for the Triaxial Behaviour of Concrete", Int. Seminar on *Concrete Structures Submitted to Triaxial Stresses*, III - 1, Bergamo, Italy.