Mecánica Computacional Vol. 14, páginas 414-423
compilado por Sergio Idelsohn y Victorio Sonzogni
Editado por AMCA, Santa Fe, 1994

ANALISIS NUMERICO DE UN PROBLEMA ESTACIONARIO DE STEFAN A DOS FASES CON ENERGIA INTERNA

Ma. Cristina Sanziel
PROMAR (CONICET-UNR) - Inst.de Matemática "B.Levi"
Av.Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina

RESUMEN

Se estudia el problema de la distribución estacionaria de temperatura de un cuerpo o un fluido, el cual es sometido a la acción de una energía interna g.

Se supone que el cuerpo es un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, con frontera suficientemente regular $\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, siendo Γ_1 y Γ_2 porciones disjuntas de $\partial\Omega$ de medida (n−1)-dimensional positiva. Suponiendo una temperatura de cambio de fase de 0°C para el material que ocupa Ω, se mantiene un flujo q sobre Γ_2, un flujo nulo sobre Γ_3 y se aplica sobre Γ_1 una temperatura θ=b > 0. Para ese caso, Garguichevich y Tarzia probaron que se produce un cambio de fase en Ω si la energía interna g en Ω y el flujo saliente q a través de Γ_2 son suficientemente pequeña y grande respectivamente.

En el presente trabajo se siguen las ideas desarrolladas en D.A.Tarzia, "Numerical Analysis for the Heat Flux in a Mixed Elliptic Problem to obtain a Discrete Steady − State Two − Phase Stefan Problem", Rapport de Recherche INRIA N°1593, Rocquencourt (1992), para el caso g = 0 en Ω. Se considera una triangulación regular del dominio Ω con triángulos de Lagrange de tipo 1 y se estudian condiciones suficientes (y/o necesarias) para los datos a fin de obtener un cambio de fase en el correspondiente dominio discretizado, es decir una temperatura discreta de signo no constante en Ω .

ABSTRACT

We study the problem of the steady temperature distribution of a body or a container with a fluid, which is submited to an internal energy g.

We assume the body to be a bounded polygonal domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, with a sufficiently regular boundary $\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, Γ_1 and Γ_2 being disjoint portions of $\partial\Omega$ of positive (n−1) − dimensional measure. Assuming a phase-change temperature of 0°C for the material occupying Ω we maintain a heat flux q on Γ_2, a null heat flux on Γ_3 and keep Γ_1 at the temperature θ=b > 0. In that case Garguichevich and Tarzia proved that a phase change takes place in Ω if the internal energy g in Ω and the outflow of heat q through Γ_2 are small and large enough respectively.

In the present work we follow the ideas developed in D.A.Tarzia, "Numerical Analysis for the Heat Flux in a Mixed Elliptic Problem to obtain a Discrete Steady − State Two − Phase Stefan Problem", Rapport de Recherche INRIA N°1593, Rocquencourt (1992) for the case g = 0 in Ω. We consider a regular triangulation of the domain Ω with Lagrange triangles of type 1 and we study sufficient (and/or necessary) conditions for the data to obtain a change of phase into the corresponding discretized domain, that is a discrete temperature of non-constant sign.

1.- INTRODUCCION

Sea un material $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ el que ocupa un dominio convexo poligonal acotado, con frontera regular $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$; Γ_1 y Γ_2 son porciones disjuntas de $\partial\Omega$ de medida $|\Gamma_1| > 0$ y $|\Gamma_2| > 0$. Se somete el material a una energía interna g. Suponiendo una temperatura de cambio de fase de 0°C para el material que ocupa Ω, se mantiene un flujo q sobre Γ_2, un flujo nulo sobre Γ_3 y se aplica sobre Γ_1 una temperatura $\theta = b > 0$. Se considera un problema estacionario de conducción del calor en Ω. Siguiendo [4,5,6], se estudia la distribución de temperatura $\theta = \theta(x)$ para $x \in \Omega$. La misma puede ser representada como

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0, & x \in \Omega_1 \ \text{(fase sólida)}, \\ 0, & x \in \mathcal{L} \ \text{(frontera libre)}, \\ \theta_2(x) > 0, & x \in \Omega_2 \ \text{(fase líquida)}, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$, y satisface las condiciones siguientes

$$-k_i \, \Delta\theta_i = g \quad \text{en} \quad \Omega_i \quad (i = 1, 2) \ , \tag{2}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \ , \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \quad \text{sobre } \mathcal{L} \ , \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \ , \tag{4}$$

$$-k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = q \quad \text{si} \quad \theta > 0 \ \text{sobre } \Gamma_2 \ , \tag{5}$$

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = q \quad \text{si} \quad \theta < 0 \ \text{sobre } \Gamma_2 \ , \tag{6}$$

$$\theta_2 \big|_{\Gamma_1} = b > 0 \tag{7}$$

donde $k_i > 0$ es la conductividad térmica de la fase i ($i=1$ sólida, $i=2$ líquida).

Si se define la nueva función incógnita u como sigue [2,4]

$$u = k_2 \, \theta^+ - k_1 \, \theta^- \quad \text{en } \Omega \ , \quad \left(\theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^-\right) \tag{8}$$

donde θ^+ y θ^- representan la parte positiva y negativa de la función θ respectivamente, entonces se obtiene el problema

$$-\Delta u = g \quad \text{en } \Omega \ , \tag{9}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q \ , \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = 0 \ , \tag{11}$$

$$u \big|_{\Gamma_1} = B \tag{12}$$

con $B = k_2 \, b > 0$.

La notación utilizada es la siguiente: se indica con n la normal exterior a Γ_2 (o Γ_3); con $|\Omega|$ la medida $n-$dimensional de Lebesgue de Ω; con $|\Gamma|$ la medida $(n-1)-$dimensional de Lebesgue de Γ.

Se recuerda la formulación variacional de (9)–(12). Sean :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx \ , \qquad L(v) = \int_\Omega g \, v \, dx - q \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \quad (= L_{qg}(v))$$

$$V = H^1(\Omega) , \qquad V_0 = \left\{ v \in V : v \mid_{\Gamma_1} = 0 \right\} ,$$

$$K = \left\{ v \in V : v \mid_{\Gamma_1} = B \right\} (= K_B),$$

entonces la única solución $u = u_{Bqg}$ de (9)–(12) se caracteriza por [3,4] :

$$a(u,v) = L(v) \ , \ \forall v \in V_0, \ u \in K_B \ , \tag{13}$$

y también por el problema de mínimo

$$J(u) \le J(v) \ , \ \forall v \in K_B, \ u \in K_B \ , \tag{14}$$

donde $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v)$.

Además, dada la linealidad del problema, la única solución u_{Bqg} de (13) puede expresarse como

$$u_{Bqg} = B - qu_1 + u_g \ \text{ in } \Omega \ , \tag{15}$$

donde u_1 y u_g están definidas respectivamente por [6]:

$$u_1 \in V_0 \ , \quad a(u_1,v) = \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \ , \ \forall v \in V_0 \ , \tag{16}$$

$$u_g \in V_0 \ , \quad a(u_g,v) = \int_{\Omega} g \, v \, dx \ , \ \forall v \in V_0 \ . \tag{17}$$

__Observación 1.1__ En el caso en que g sea constante en Ω, resulta

$$u_{Bqg} = B - q\, u_1 + g\, u_2 \ \text{ en } \Omega \ , \tag{18}$$

donde

$$u_2 \in V_0 \ , \quad a(u_2,v) = \int_{\Omega} v \, dx \ , \ \forall v \in V_0 \ . \tag{19}$$

En [6], para el problema continuo (13) se obtuvieron condiciones suficientes a fin de tener un problema estacionario de Stefan a dos fases (es decir que la solución u sea de signo no constante en Ω):

__Teorema 1.2__ i) u_{Bqg} es de signo no constante en Ω (existen dos fases) para todo q tal que $q > Q_0(B)$, donde

$$Q_0(B) = \frac{c_g}{c_1} + q_0(B) \tag{20}$$

$$c_g = a(u_g,u_1) = \int_{\Omega} g \, u_1 \, dx = \int_{\Gamma_2} u_g \, d\gamma \ , \tag{21}$$

$$c_1 = a(u_1,u_1) = \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma \ > 0 \ , \tag{22}$$

$$q_0(B) = \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{c_1} > 0 \ , \tag{23}$$

(u_1 y u_g definidas por (16) y (17) respectivamente).

ii) u_{Bqg} es de signo no constante en Ω para toda g tal que $g < G_0(B)$, donde

$$G_0(B) = q \, \frac{c_{12}}{c_2} - g_0(B) \ , \tag{24}$$

$$c_{12} = a(u_1,u_2) = \int_{\Omega} u_1 \, dx = \int_{\Gamma_2} u_2 \, d\gamma \ , \tag{25}$$

$$c_2 = a(u_2,u_2) = \int_\Omega u_2 \, dx > 0 \ , \tag{26}$$

$$g_0(B) = \frac{B \mid \Omega \mid}{c_2} > 0 \ . \tag{27}$$

(u_1 y u_2 definidas por (16) y (19) respectivamente).

Observación 1.3 En el caso en que g sea constante en Ω, resulta $c_g = g c_{12}$, donde c_{12} es la constante definida en (25).

El propósito del presente trabajo es realizar el análisis numérico del problema estudiado en [6]. generalizando de este modo el trabajo [7] en el cual la energía interna g es nula en el dominio Ω.

2.- EL PROBLEMA DISCRETO. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE DOS FASES.

Se considera ahora una triangulación regular τ_h del dominio poligonal Ω con triángulos de Lagrange de tipo 1, constituida por elementos finitos afín equivalentes de clase C^0, siendo $h > 0$ un parámetro destinado a tender a cero (puede ser, por ejemplo, la medida del mayor lado de los triángulos $T \in \tau_h$) y se aproxima el espacio V_o por [1] :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \ / \ v_h|_T \in P_1(T) \ , \forall T \in \tau_h \ , \ v_h|_{\Gamma_1} = 0 \right\} , \tag{28}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 1.

Sea π_h el correspondiente operador lineal de interpolación. Se sabe que existe una constante $C_o > 0$ (independiente del parámetro h) tal que

$$\| v - \pi_h v \|_V \leq C_o \, h^{r-1} \| v \|_{r,\Omega} \ , \ \forall \, v \in H^r(\Omega), \ 1 < r \leq 2. \tag{29}$$

El siguiente problema variacional aproximado corresponde al problema continuo (13):

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \ , \ \forall v_h \in V_h \ , \ u_h \in K_h = B + V_h \ , \tag{30}$$

y se obtienen los siguientes resultados:

Lemma 2.1 Se tiene

$$\lim_{h \to 0^+} \| u_h - u \|_V = 0 \ , \tag{31}$$

siendo u la única solución de la igualdad variacional (13).

Demostración: Dado que $|\Gamma_1| > 0$, la forma bilineal a resulta coercitiva en V_o , es decir que [3] :

$$\exists \, \alpha > 0 \ / \ a(v, v) = \| v \|^2_{V_o} \geq \alpha \| v \|^2_V \ , \forall v \in V_o \ , \tag{32}$$

y en consecuencia $\| \cdot \|_{V_o}$ y $\| \cdot \|_V$ son dos normas equivalentes en V_0. Se sigue un método similar al desarrollado en [1] □

Corolario 2.2 Sea $H = L^2(\Omega)$. Se definen

$$\theta_h = \frac{1}{k_2} u_h^+ - \frac{1}{k_1} u_h^- \in V \ , \quad \theta = \frac{1}{k_2} u^+ - \frac{1}{k_1} u^- \in V \tag{33}$$

y se tiene que

$$\lim_{h \to 0^+} \| \theta_h - \theta \|_H = 0 \ , \tag{34}$$

Demostración: La prueba es similar a la dada en [7].

A continuación se enuncia una propiedad de monotonía de la solución del problema (30) en función de los datos B (ó b) , q y g [6,7]:

Lema 2.3 Si $u_h = u_{hBqg}$ es la única solución del problema (30) para datos B ($=k_2 b$), q y g entonces se tiene :

i) Si $B_1 \le B_2$ (ó $b_1 \le b_2$) sobre Γ_1 , $q_2 \le q_1$ sobre Γ_2 y $g_1 \le g_2$ en Ω , entonces

$$u_{h1} = u_{hB_1q_1g_1} \le u_{hB_2q_2g_2} = u_{h2} \text{ en } \overline{\Omega} \ .$$

ii) Se obtiene una desigualdad estricta para u_{hi} si alguna de las desigualdades para B_i , q_i o g_i es estricta.

Para $B > 0$ fijo, sea u_h la única solución de (30). Es fácil probar que

$$\int_\Omega g\, u_h^- dx + a(u_h^-, u_h^-) = q \int_{\Gamma_2} u_h^-\, d\gamma$$

y este resultado lleva inmediatamente a [6,7]:

Lema 2.4 La única solución u_h de (30) para B y q fijos y positivos y $g \in L^2(\Omega)$, $g \ge 0$ en Ω , verifica:

$$u_h^- \ne 0 \text{ en } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad u_h^- \ne 0 \text{ sobre } \Gamma_2 \,. \tag{35}$$

Observación 2.5 En otras palabras, si $g \ge 0$ en Ω, se producirá un cambio de fase en Ω si y sólo si u_h asume valores negativos sobre Γ_2.

Debido a la linealidad del problema, la única solución u_{hBqg} de (30) puede expresarse como

$$u_{hBqg} = B - q u_{h1} + u_{hg} \text{ in } \Omega \ , \tag{36}$$

donde u_{h1} y u_{hg} están definidas por

$$u_{h1} \in V_h \ , \ a(u_{h1}, v) = \int_{\Gamma_2} v\, d\gamma \ , \quad \forall v \in V_h \ , \tag{37}$$

$$u_{hg} \in V_h \ , a(u_{hg}, v) = \int_\Omega g\, v\, dx \ , \quad \forall v \in V_h \ . \tag{38}$$

Observación 2.6 En el caso en que g sea constante en Ω , resulta

$$u_{hBqg} = B - q\, u_{h1} + g\, u_{h2} \text{ in } \Omega \,. \tag{39}$$

donde

$$u_{h2} \in V_h \ , \quad a(u_{h2}, v) = \int_\Omega v\, dx \ , \quad \forall v \in V_h \ . \tag{40}$$

Se definen ahora las funciones reales $F_{hBg} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $F_{hBq} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tales que

$$F_{hBg}(q) = J(u_{hBqg}) = \tfrac{1}{2} a(u_{hBqg}\, , u_{hBqg}) - \int_\Omega g\, u_{hBqg}\, dx + q \int_{\Gamma_2} u_{hBqg}\, d\gamma \ , \tag{41}$$

para $B > 0$ fijo y $g \in L^2(\Omega)$, y

$$F_{hBq}(g) = J(u_{hBqg}) = \tfrac{1}{2} a(u_{hBqg}\, , u_{hBqg}) - g \int_\Omega u_{hBqg}\, dx + q \int_{\Gamma_2} u_{hBqg} d\gamma \ , \tag{42}$$

para B y q positivos, fijos. Se obtienen entonces las siguientes propiedades [6]:

Teorema 2.7 Las funciones F_{hBg} y F_{hBq} verifican :

i) $F_{hBg} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ con

$$F'_{hBg}(q) = \int_{\Gamma_2} u_{hBqg}\, d\gamma \ , \tag{43}$$

una función estrictamente decreciente.

ii) $F_{hBq} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ con

$$F'_{hBq}(g) = -\int_{\Omega} u_{hBqg}\, dx \ , \tag{44}$$

una función estrictamente decreciente.

Corolario 2.8 i) Si $q_0 \in \mathbf{R}$ es tal que $F'_{hB_0g_0}(q_0) < 0$ para $B_0 > 0$ fijo y $g_0 \in L^2(\Omega)$ no negativa, entonces u_{hBqg} es de signo no constante en Ω (hay dos fases presentes) para todo B que verifique $0 < B \le B_0$; $g \in L^2(\Omega)$, tal que $0 \le g \le g_0$ y $q \ge q_0$.

ii) Si $g_1 \in \mathbf{R}$ es tal que $F'_{hB_1q_1}(g_1) > 0$ para B_1 y q_1 fijos y positivos , entonces u_{hBqg} es de signo no constante en Ω para todo B tal que $0 < B \le B_1$; $q \ge q_1$ y $g \in L^2(\Omega)$ que verifique $\sup_{x \in \Omega} g(x) \le g_1$.

Demostración: Los resultados siguen a partir del teorema anterior y los lemas 2.4 y 2.5 (el último sólo en el caso i) □

Como en [6] se define una **función flujo crítico discreta**

$$q_{hc} : \mathbf{R}^+ \times L^2(\Omega) \to \mathbf{R} \ , \quad (B,g) \to q_{hc}(B,g) \tag{45}$$

tal que

* para cada $B > 0$ y $q \le q_{hc}(B,g)$, $u_{hBqg} \ge 0$ en Ω (no hay cambio de fase),

* para cada $B > 0$ y $q > q_{hc}(B,g)$, u_{hBqg} es una función de signo no constante en Ω (se presentan dos fases).

Teorema 2.9 q_{hc} es una función no decreciente, es decir para toda $0 < B_1 \le B_2$ y para toda $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$, $g_1 \le g_2$ resulta $q_{hc}(B_1,g_1) \le q_{hc}(B_2,g_2)$.

Demostración: A partir del Lema (2.3), $0 \le u_{hB_1q_c(B_1,g_1)g_1} \le u_{hB_2q_c(B_1,g_1)g_2}$ en $\bar{\Omega}$ y en consecuencia se tiene la tesis□

Teorema 2.10 Sea F_{hBg} definida en (41), entonces se tiene

i)

$$F'_{hBg}(q) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q > Q_{h0}(B)$$

donde

$$Q_{h0}(B) = q_{h0}(B) + \frac{c_{hg}}{c_{h1}} , \tag{46}$$

$$c_{h1} = a(u_{h1},u_{h1}) = \int_{\Gamma_2} u_{h1}\, d\gamma \;>\; 0 \;, \tag{47}$$

$$c_{hg} = a(u_{hg},u_{h1}) = \int_{\Omega} g\, u_{h1}\, dx = \int_{\Gamma_2} u_{hg}\, d\gamma \;, \tag{48}$$

$$q_{h0}(B) = \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{c_{h1}} \;>\; 0 \;, \tag{49}$$

(u_{h1} y u_{hg} han sido definidas en (37) y (38) respectivamente) .

ii) Si $q > Q_{h0}(B)$ entonces u_{hBqg} es de signo no constante en Ω , $\forall g \in L^2(\Omega)$, $g \geq 0$, $B \in \mathbf{R}^+$.

Demostración: i) Usando (36)–(38) en (41) se obtiene

$$F_{hBg}(q) = -\tfrac{1}{2}\, a(u_{hg},u_{hg}) + q\, a(u_{hg},u_{h1}) - \frac{q^2}{2}\, a(u_{h1},u_{h1}) + B\, [q \mid \Gamma_2 \mid - \int_{\Omega} g\, dx]$$

Por lo tanto

$$F'_{hBg}(q) = a(u_{hg},u_{h1}) + B\, |\Gamma_2| - q\, a(u_{h1},u_{h1}) = c_{hg} + B\, |\Gamma_2| - q\, c_{h1} \;.$$

y en consecuencia

$$F'_{hBg}(q) \;<\; 0 \;\Leftrightarrow\; q \;>\; \frac{B \mid \Gamma_2 \mid}{c_{h1}} + \frac{c_{hg}}{c_{h1}} = q_{h0}(B) + \frac{c_{hg}}{c_{h1}} \,.$$

ii) Es consecuencia de i) y el Lema (2.4)□

Observación 2.11 En el caso en que g sea constante, se tiene $c_{hg} = g\, c_{h12}$ con

$$c_{h12} = a(u_{h1},u_{h2}) = \int_{\Omega} u_{h1}\, dx = \int_{\Gamma_2} u_{h2}\, d\gamma \;>\; 0 \,, \tag{50}$$

(u_{h2} definida en (40)) y

$$q_{h0}(B) + \frac{c_{h12}}{c_{h1}}\, g \;>\; q_{hc}(B,g) \;, \quad \forall g \geq 0 \,.$$

Observación 2.12 Para el caso $g = 0$ estudiado en [7] se obtiene que si $q > q_{h0}(B)$ entonces u_h es de signo no constante en Ω.

De manera similar, se considera ahora, para B y q fijas, el caso g constante en Ω . Resulta :

$$F_{hBq}(g) = -\frac{g^2}{2}\, a(u_{h2},u_{h2}) + qg\, [\, a(u_{h2},u_{h1}) + B \mid \Omega \mid] + Bq \mid \Gamma_2 \mid - \tfrac{1}{2} q^2 \int_{\Gamma_2} u_{h1}\, d\gamma$$

$$F'_{hBq}(g) = -\, a(u_{h2},u_{h2})\, g + q a(u_{h2},u_{h1}) - B \mid \Omega \mid \;,$$

donde u_{h1} y u_{h2} han sido definidas por (37) y (40) respectivamente. Se obtienen los siguientes resultados:

Teorema 2.13 Sea F_{hBq} definida por (42), entonces :

i) $$F'_{hBq}(g) \;>\; 0 \;\Leftrightarrow\; g \;<\; G_{h0}(B)$$

donde

$$G_{ho}(B) = q\,\frac{c_{h12}}{c_{h2}} - g_{ho}(B) \ , \tag{51}$$

$$c_{h2} = a(u_{h2}, u_{h2}) = \int_\Omega u_{h2}\,dx > 0 \ , \tag{52}$$

$$g_{ho}(B) = \frac{B\,|\,\Omega\,|}{c_{h2}} > 0 \ . \tag{53}$$

ii) Si $g < G_{ho}(B)$ entonces u_{hBqg} es de signo no constante en Ω .

__Observación 2.14__ En el teorema anterior no se requiere que q ni g sean positivas o no negativas, como ocurría en los teoremas previos.

3.- RELACION ENTRE LOS PROBLEMAS CONTINUO Y DISCRETO

En esta sección se utilizan las ideas desarrolladas en [7] para el caso $g = 0$, generalizándolas para $g \neq 0$.

__Teorema 3.1__ Las funciones u_1, u_2, u_{h1} y u_{h2} definidas por (16), (19), (37) y (40) respectivamente, verifican:

i) $a(u_i - u_{ih}, v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h \qquad i=1, 2$

ii) $\|u_i - u_{ih}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u_i - v_h\|_V \qquad i=1, 2$

iii) $\|u_i - u_{ih}\|_V \leq \frac{1}{\alpha} C_{0i} \|u_i\|_{r\Omega}\, h^{r-1} \qquad i= 1, 2,$

donde las constantes C_{0i} son las que surgen del resultado de interpolación (29).

__Demostración:__ i) Se deduce a partir de las definiciones de las funciones u_i y u_{ih}.

ii) Es consecuencia de la coercitividad de la forma bilineal a y de i).

iii) Es consecuencia de ii) y (29)□

De manera similar a lo realizado en [7] se deducen:

__Teorema 3.2__ Las constantes c_1, c_2, c_{12}, c_{h1}, c_{h2} y c_{h12} definidas respectivamente por (22), (26), (25), (47), (52) y (50) verifican

i) $a(u_1 - u_{h1}, u_1 - u_{h1}) = c_1 - c_{h1} \geq 0.$

ii) $a(u_2 - u_{h2}, u_2 - u_{h2}) = c_2 - c_{h2} \geq 0.$

iii) $a(u_1 - u_{h1}, u_2 - u_{h2}) = c_{12} - c_{h12}.$

iv) $q_{ho}(B) \geq q_0(B)$

v) $g_{ho}(B) \geq g_0(B).$

__Demostración:__ es consecuencia directa de las definiciones de las constantes □

__Teorema 3.3__ a) Las constantes c_1, c_2, c_{12}, c_{h1}, c_{h2} y c_{h12} verifican

i) $$0 \leq c_1 - c_{h1} \leq E_1\, h^{2(r-1)} \qquad \text{donde } E_1 = \frac{C_{01}^2 \|u_1\|_{r\Omega}^2}{\alpha^2} \tag{54}$$

ii) $$0 \leq c_2 - c_{h2} \leq E_2\, h^{2(r-1)} \qquad \text{donde } E_2 = \frac{C_{02}^2 \| u_2 \|_{r\Omega}^2}{\alpha^2} \tag{55}$$

iii) $$0 \leq | c_{12} - c_{h12} | \leq E_{12}\, h^{2(r-1)} \qquad \text{donde } E_{12} = \frac{C_{01} \| u_1 \|_{r\Omega}\, C_{02} \| u_2 \|_{r\Omega}}{\alpha^2} \tag{56}$$

b) Se tienen las siguientes estimaciones

i) $$0 < q_{ho}(B) - q_0(B) \leq \frac{E_1\, h^{2(r-1)}}{c_1}\, q_{ho}(B) \tag{57}$$

ii) $$0 < g_{ho}(B) - g_0(B) \leq \frac{E_2\, h^{2(r-1)}}{c_2}\, g_{ho}(B)\,. \tag{58}$$

Demostración: es consecuencia de los teoremas 3.1 y 3.2 y de lo realizado en [7] □

Teorema 3.4 Sean $B > 0$, $h > 0$ y $0 < \epsilon < 1$. Entonces se tienen las siguientes estimaciones:

i) $$0 < q_{ho}(B) - q_0(B) \leq \frac{E_1\, h^{2(r-1)}}{c_1\, \epsilon}\, q_0(B) \quad , \text{ si } 0 < h < h_{1r}(\epsilon) = \left(\frac{(1-\epsilon)c_1}{E_1}\right)^{\frac{1}{2(r-1)}}$$

ii) $$0 < g_{ho}(B) - g_0(B) \leq \frac{E_2\, h^{2(r-1)}}{c_2\, \epsilon}\, g_0(B)\,, \quad \text{si } 0 < h < h_{2r}(\epsilon) = \left(\frac{(1-\epsilon)c_2}{E_2}\right)^{\frac{1}{2(r-1)}}$$

Demostración: i) Fue probado en [7]

ii) A partir de (59) y siguiendo un método análogo el empleado en [7] se deduce:

$$N(h)\, g_{0_h}(B) \leq g_0(B)\,,$$

donde

$$N(h) = 1 - \frac{E_2}{c_2}\, h^{2(r-1)} < 1\,.$$

Si se considera para cada parámetro $0 < \epsilon < 1$, la siguiente equivalencia :

$$0 < \epsilon < N(h) < 1 \Leftrightarrow 0 < h < h_{2r}(\epsilon)\,,$$

puede derivarse la desigualdad ii) □

Teorema 3.5: Sean $B > 0$, g constante y $Q_0(B)$, $Q_{ho}(B)$, $G_0(B)$ y $G_{ho}(B)$ definidas por (20), (46), (24) y (51) respectivamente. Entonces

i) $$0 \leq | Q_0 - Q_{ho} | \leq \frac{F_1}{c_1(c_1 - E_1 h^{2(r-1)})}\, h^{2(r-1)}$$

donde $F_1 = (c_{12}|g| + B|\Gamma_2|)\,E_1 + c_1 E_{12}$

ii) $$0 \leq | G_0 - G_{ho} | \leq \frac{F_2}{c_2(c_2 - E_2 h^{2(r-1)})}\, h^{2(r-1)}$$

donde $F_2 = (c_{12}q + B|\Omega|)\,E_2 + c_2 E_{12}$.

Demostración: i) de (20), (23), (46), (49), (50), (54) y (56) se deduce i).

ii) de (24), (27), (51), (53) y (56) se deduce ii) □

Corolario 3.6

i) $$\lim_{h \to 0} Q_{h0}(B) = Q_0(B)$$

ii) $$\lim_{h \to 0} G_{h0}(B) = G_0(B).$$

Agradecimiento : Este trabajo ha sido realizado a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo del CONICET (Argentina) PID – BID N° 221 "Aplicaciones de Problemas de Frontera Libre".

REFERENCIAS

1. P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).
2. G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N° 185, LABORIA–IRIA, Rocquencourt (1976).
3. D. KINDERLEHRER–G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).
4. D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", C. R. Acad. Sc. Paris, 288 A (1979), 941–944; Ver también "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27(1979/80), 145–156 .
5. D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computacão Científica, Vol. 5, SBMAC, Rio de Janeiro (1987).
6. G.G.GARGUICHEVICH–D.A.TARZIA, "The Steady-State two–phase Stefan Problem with an internal energy and some related problems", Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXXIX, 615-634 (1991).
7. D.A.TARZIA, "Numerical Analysis for the Heat Flux in a Mixed Elliptic Problem to obtain a Discrete Steady – State Two – Phase Stefan Problem", Rapport de Recherche INRIA N°1593, Rocquencourt (1992). Ver también Cuad. Inst. Mat. Beppo Levi, Rosario, 24 (1993), 103-120.