

UN METODO APROXIMADO PARA EL ANALISIS DE FLUJO LAMINAR
Y TRANSFERENCIA DE CALOR EN CONDUCTOS
DE SECCION NORMAL COMPLICADA

Víctor H. Cortínez
Instituto de Mecánica Aplicada
y Departamento de Ingeniería,
Universidad Nacional del Sur, 8000, Bahía Blanca, Argentina

RESUMEN

Se presenta un método aproximado para el análisis de convección forzada en conductos de sección normal complicada. El enfoque se basa en la simplificación de la geometría de interés y de las ecuaciones gobernantes. De esta manera es posible determinar una solución analítica simple de la ecuación de momentum mientras que la ecuación de energía se resuelve mediante el método de Crank-Nicholson.

ABSTRACT

An approximate method for the analysis of forced convection in ducts of complicated cross section is presented. The approach is based in the simplification of the geometry of interest and the governing equations. Then it is possible to determine a simple analytical solution of the momentum equation while the energy equation is solved by means of the Crank-Nicholson method.

INTRODUCCION

Los modernos desarrollos de la tecnología química y nuclear hacen del problema de flujo laminar y transferencia de calor en conductos no circulares un tópico de considerable interés práctico. Varias investigaciones sobre el tema han sido llevadas a cabo desde la década del 60 [1,2]. Si bien es posible obtener soluciones mediante métodos puramente numéricos tales como Diferencias Finitas, Elementos Finitos y Elementos de Contorno, resulta de utilidad el desarrollo de procedimientos que sean más económicos desde el punto de vista computacional. En el presente trabajo se presenta una metodología aproximada analítico-numérica para tratar el mencionado problema en conductos de sección transversal de forma poligonal regular. La técnica se basa en la transformación conforme del dominio real en un círculo unitario en otro plano. A posteriori, mediante la aplicación del método de Kantorovich, en el plano transformado, se obtiene un sistema diferencial simplificado en el cual se ha eliminado la variable angular. Desde el mismo es posible determinar una solución analítica del campo de velocidades del flujo, mientras que para obtener el campo térmico se hace uso de un esquema en diferencias finitas tipo Crank-Nicholson. Luego es fácil determinar otras magnitudes de interés tales como la temperatura de mezcla y el número de Nusselt. Esta metodología es fácil de programar en la computadora y brinda resultados numéricos de considerable precisión a juzgar por las comparaciones efectuadas con algunas soluciones exactas disponibles. Por otra parte el método puede ser extendido para analizar conductos de otras geometrías, como así también otras cuestiones tales como conducción no lineal de calor en sólidos, etc.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Sea el flujo laminar totalmente desarrollado en un conducto de sección normal poligonal regular.

Las ecuaciones de momentum y energía, para propiedades del fluido constantes y para un número de Eckert pequeño con respecto a la unidad y despreciando el flujo axial de calor en comparación con la transferencia de calor a través de la pared del conducto, pueden expresarse como [2]

$$\nabla^2 u = - \frac{dP}{dz} \frac{1}{\mu} \quad (1)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c_p u}{k} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2)$$

sujetas a las condiciones

$$u=0 \quad \text{sobre } L(x,y)=0 \quad (3)$$

$$T=T_1 \quad \text{sobre } L(x,y)=0, z>0 \quad (4)$$

$$T=T_0 \quad z=0 \quad (5)$$

donde u : velocidad, P : presión, μ : viscosidad, ρ : densidad, T : temperatura, c_p : calor específico, k : conductividad térmica y $L(x,y)=0$: relación funcional que define el contorno poligonal regular (Figura 1).

El problema consiste en determinar u, T , y entonces otras cantidades de interés tales como el caudal, la temperatura de mezcla y el número de Nusselt.

METODO DE SOLUCION

Es posible transformar el dominio poligonal considerado en un círculo unitario en el plano ζ aplicando la transformación conforme dada por la función [3]

$$w=x+iy = f(\zeta) = a_p A_s \sum_{j=0}^{10} \alpha_j \frac{\zeta^{1+s_j}}{1+s_j} \quad (6)$$

donde $\zeta = r e^{i\theta}$ ($0 < r < 1$), a_p es la apotema del polígono, A_s es una constante para cada polígono (ver Apéndice I), s es el número de ejes de simetría y los coeficientes α_j se definen en forma recursiva como

$$\alpha_0 = 1 ; \alpha_1 = -2/s ; \alpha_j = \left(-\frac{2}{s} - j + 1\right) \frac{\alpha_{j-1}}{j} \quad , j > 2 \quad (7)$$

Las ecuaciones (1) y (2) se transforman de acuerdo con (6) en

$$\nabla^2 u = - \frac{dP}{dz} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 \frac{1}{\mu} \quad (8)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c_p u}{k} \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 \frac{\partial T}{\partial z} \quad (9)$$

Considerando el elevado grado de simetría del problema es razonable suponer que en el plano ζ , la dependencia de u y de T con respecto a la variable angular ϑ es muy débil. En consecuencia se postula

$$u = u(r) \quad \text{y} \quad T = T(r, z) \quad (10, 11)$$

Para eliminar entonces la variable ϑ en las ecuaciones (8) y (9) se aplica el método de Kantorovich [4]. Para esto se integran las mencionadas ecuaciones con respecto a ϑ . Operando se llega al sistema diferencial aproximado expresado en forma adimensional como

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = 4 G(r) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = G(r) F(r) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (13)$$

donde

$$G(r) = A_*^2 \sum_{j=0}^{10} \alpha_j^2 r^{2sj} \quad (14)$$

$$F = u / U \quad ; \quad U = \frac{ap^2}{4\mu} \frac{dP}{dz} \quad (15a, b)$$

$$\zeta = \frac{z k}{\rho c_p U a p^2} \quad ; \quad \phi = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad (15 c, d)$$

De acuerdo con las definiciones dadas anteriormente las condiciones (3), (4) y (5) se escriben de la siguiente manera:

$$F(1) = 0 \quad ; \quad \phi(1, \zeta) = 0 \quad ; \quad \phi(r, 0) = 1 \quad (16 a, b, c)$$

La solución de la ecuación (12) con la condición de contorno (16 a) es inmediata y viene dada por

$$F(r) = 4 A_*^2 \sum_{j=0}^{10} \alpha_j^2 \frac{1 - r^{2sj+2}}{(2sj+2)^2} \quad (17)$$

Para determinar, a continuación, la solución de la ecuación (13) se aplica un esquema en Diferencias Finitas tipo Crank-Nicholson [5] (ver Apéndice II). De esta manera la ecuación (13) es sustituida por

$$\begin{aligned} \phi_{i-1} A_{i,i-1} + \phi_i A_{i,i} + \phi_{i+1} A_{i,i+1} = \\ \bar{\phi}_{i-1} B_{i,i-1} + \bar{\phi}_i B_{i,i} + \bar{\phi}_{i+1} B_{i,i+1} \end{aligned} \quad (18)$$

donde

$$\phi_i = \phi \left[(i-1) \Delta r, \zeta \right] \quad ; \quad \bar{\phi}_i = \phi \left[(i-1) \Delta r, \zeta - \Delta \zeta \right] \quad (19a, b)$$

$$A_{i,i-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(i-1)} ; \quad A_{i,i} = -1 - G_i F_i \frac{(\Delta r)^2}{\Delta \zeta} \quad (19b,c)$$

$$A_{i,i+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4(i-1)} ; \quad B_{i,i-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4(i-1)} \quad (19c,d)$$

$$B_{i,i} = 1 - G_i F_i \frac{(\Delta r)^2}{\Delta \zeta} ; \quad B_{i,i+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4(i-1)} \quad (19e,f)$$

$$F_i = F[(i-1)\Delta r] ; \quad G_i = G[(i-1)\Delta r] \quad (19g,h)$$

Estas ecuaciones son válidas para $1 < i \leq 1/\Delta r$.
 Para $i=1$, es decir la ecuación en diferencias correspondiente a $r=0$ dada por la expresión anterior se indetermina.
 Para salvar la indeterminación debe considerarse la condición de simetría

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(0, \zeta) = 0 \quad (20)$$

luego

$$\lim_{r \rightarrow 0} (1/r) \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (21)$$

donde se ha hecho uso de la regla de L'Hopital.
 Consecuentemente en $r=0$, la ecuación (13) puede expresarse como

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}(0, \zeta) = G(0)F(0) \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad (22)$$

Discretizando (20) y (22) se llega a

$$\phi_1 \left[-2 - F_1 G_1 \frac{(\Delta r)^2}{\Delta \zeta} \right] + 2 \phi_2 = \bar{\phi}_1 \left[2 - F_1 G_1 \frac{(\Delta r)^2}{\Delta \zeta} \right] - 2 \bar{\phi}_2 ; \quad (23)$$

El sistema (18-22) puede ser expresado como

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} \phi_j = R_i ; \quad i=1, 2, \dots, N=1/\Delta r \quad (24)$$

donde las R_i 's se evalúan en $\zeta = \Delta \zeta$
 Este esquema resulta incondicionalmente estable.

Una vez obtenidos los campos de flujo y de temperatura se determinan el caudal, la temperatura de mezcla y el número de Nusselt.
 El caudal se define como

$$Q = \iint_A u \, dA \quad (25)$$

La correspondiente expresión en el plano transformado es

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 u \left| \frac{df}{d\zeta} \right|^2 r \, dr \, d\theta \quad (26)$$

Reemplazando (17) en esta última expresión se llega a

$$Q = 2\pi a_p^2 U A_*^2 \sum_{j=0}^{10} \sum_{i=0}^{10} \left\{ \frac{4 \alpha_j^2 \alpha_i^2}{(2s_j+2)^2} \left[\frac{1}{(2s_i+1)} - \frac{1}{2s(i+j)+4} \right] \right\} \quad (27)$$

La temperatura de mezcla adimensional es definida de la siguiente manera:

$$\phi_m = \frac{(\iint uT \, dA / Q) - T_1}{T_o - T_1} \quad (28)$$

Esta expresión puede ser escrita en la forma

$$\phi_m(\zeta) = \frac{\int_0^1 \phi F G r \, dr}{\int_0^1 F G r \, dr} \quad (29)$$

Finalmente, el número de Nusselt se define como

$$Nu = \frac{\left| k \oint \frac{\partial T}{\partial n} \, ds \right|}{k (T_m - T_1)} \quad (30)$$

Esta expresión puede ser escrita convenientemente como

$$Nu(\zeta) = \frac{2\pi \int_0^1 F G \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} r \, dr}{\phi_m} = \frac{2\pi}{\phi_m} \int_0^1 F G \frac{\phi - \bar{\phi}}{\Delta \zeta} r \, dr \quad (31)$$

Las integraciones que figuran en los numeradores de (29) y (31) se realizan en forma numérica, ya que la función ϕ está definida en forma discreta.

RESULTADOS NUMERICOS

A los efectos de estudiar la precisión del presente enfoque se analiza el caso de un conducto de sección normal cuadrada para el cual se dispone de soluciones exactas conocidas. Para secciones transversales con un número mayor de ejes de simetría ($s > 4$) la precisión debe mejorar aún, debido a que las aproximaciones (10) y (11) se aproximan en mayor medida a la realidad del problema.

En la Tabla I se muestran valores de un perfil de velocidad determinados mediante a) la expresión (17) y b) la solución exacta. Como se aprecia la concordancia es muy buena.

TABLA I
Valores de la velocidad del flujo laminar en un conducto cuadrado para $y=0$

r	x/ap	u/U	
		(1)	(2)
0	0	1.178	1.178
0.2	0.215	1.132	1.131
0.4	0.430	0.992	0.989
0.6	0.639	0.759	0.741
0.8	0.832	0.432	0.400
1	1	0	0

(1): Presente enfoque
 (2): Soluci3n exacta :
$$\frac{u}{U} = \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1,3}^{50} \sum_{m=1,3}^{50} \frac{\text{sen}[(1 + \frac{x}{ap}) \frac{n\pi}{2}] \text{sen}[\frac{m\pi}{2}]}{(n^2+m^2)n m}$$

TABLA II
Valores de ϕ en $r=0$ para un conducto cuadrado con flujo constante ($F=1$)

ζ	ϕ	
	(1)	(2)
0	1	1
0.05	0.99	0.99
0.1	0.89	0.90
0.15	0.74	0.74
0.2	0.59	0.59
0.25	0.46	0.46
0.3	0.36	0.36
0.35	0.28	0.28
0.4	0.22	0.22
0.45	0.17	0.17
0.5	0.13	0.13
0.7	0.05	0.05
0.9	0.01	0.01
1.4	0.001	0.001

- (1) Presente enfoque
 (2) Soluci3n exacta:

$$\phi = 16 \sum_{n=1,3}^{50} \sum_{m=1,3}^{50} \frac{e^{-\pi^2(n^2+m^2)\zeta/4}}{n m \pi^2} \text{sen} \left[\frac{n\pi}{2} \left(1 + \frac{x}{ap}\right) \right] \text{sen} \left[\frac{m\pi}{2} \left(1 + \frac{y}{ap}\right) \right]$$

En la Tabla II se muestra la evoluci3n de la temperatura en $r=0$ para el caso de flujo constante ($F=1$). Los presentes resultados coinciden pr3cticamente con los valores exactos.

En la Tabla III pueden observarse, para la misma situaci3n, los perfiles de temperatura en funci3n de x para $y=0$, $\zeta = 0.05, 0.15, y 0.25$. Los resultados comparan favorablemente con los valores exactos. La Tabla IV presenta valores del caudal para varias formas poligonales obtenidos por medio de la expresi3n (27). Tambi3n se muestran en la misma tabla valores determinados mediante una formulaci3n exacta [6]. Los resultados obtenidos mediante ambos enfoques muestran excelente concordancia.

TABLA III.-
Valores de ϕ en función de x y de ζ para el caso de un conducto cuadrado con flujo constante ($F=1$).

x/ap	(1)			(2)		
	$\zeta = 0.05$	$\zeta = 0.15$	$\zeta = 0.25$	$\zeta = 0.05$	$\zeta = 0.15$	$\zeta = 0.25$
0	0.99	0.74	0.46	0.99	0.74	0.46
0.215	0.98	0.70	0.44	0.98	0.71	0.44
0.430	0.93	0.59	0.36	0.93	0.60	0.37
0.630	0.78	0.42	0.25	0.78	0.44	0.26
0.832	0.45	0.21	0.12	0.46	0.23	0.13
1	0	0	0	0	0	0

Todos los valores fueron calculados para $y=0$.

(1): Presente enfoque ($\Delta\zeta=0.001$)

(2): Solución exacta

TABLA IV
Valores adimensionales del caudal ($Q/2\pi a_p^2 U$) para conductos de forma poligonal con flujo laminar

Polígono	Expresión (27)	Solución Exacta[6]
Cuadrado ($s=4$)	0.353	0.3579
Pentágono ($s=5$)	0.312	0.3138
Hexágono ($s=6$)	0.292	0.2929
Heptágono ($s=7$)	0.280	0.2811
Octógono ($s=8$)	0.273	0.2700

TABLA V
Valores de la temperatura de mezcla adimensional y del número de Nusselt para un conducto cuadrado con flujo constante ($F=1$)

ζ	ϕ		Nu	
	(1)	(2)	(1)	(2)
0.01	0.760	0.787	49.6	50.8
0.02	0.685	0.706	37.3	37.9
0.03	0.630	0.647	31.7	32.3
0.04	0.584	0.599	28.6	29.1
0.05	0.546	0.559	26.5	27
0.1	0.406	0.413	21.9	22.1
0.2	0.243	0.245	19.9	20
0.3	0.148	0.149	19.7	19.7
0.4	0.090	0.091	19.7	19.7
0.5	0.055	0.055	19.7	19.7
0.6	0.033	0.034	19.7	19.7

(1): Presente enfoque ($\Delta\zeta=0.001$, ϕ_m : expresión (29), Nu: expresión (31))

(2): Solución exacta

$$\phi = \frac{64}{\pi^2} \sum_{n=1}^{150} \sum_{m=1}^{150} \frac{e^{-\pi^2(n^2+m^2)\zeta/4}}{n^2 m^2} ; \quad Nu = \frac{64}{\pi^2 \phi_m} \sum_{n=1}^{150} \sum_{m=1}^{150} \frac{n^2+m^2}{n^2 m^2} e^{-\pi^2(n^2+m^2)\zeta/4}$$

La Tabla V presenta valores de la temperatura de mezcla adimensional y del número de Nusselt para un conducto cuadrado con flujo constante ($F=1$). Los presentes resultados comparan favorablemente con la solución exacta.

Por su parte, la Tabla VI muestra valores de la temperatura de mezcla y del número de Nusselt, en función de ζ para un conducto de sección hexagonal con flujo laminar. Todos los cálculos se han efectuado considerando $N=10$.

TABLA VI
Valores de la Temperatura de mezcla adimensional y del Número de Nusselt para un conducto hexagonal con flujo laminar
($\Delta\zeta=.001$)

ζ	ϕ_m	Nu
0.01	0.850	20.4
0.02	0.771	16.4
0.03	0.709	14.7
0.04	0.657	13.7
0.05	0.611	13.0
0.1	0.438	11.8
0.2	0.233	11.5
0.3	0.125	11.5
0.4	0.067	11.5

CONCLUSIONES

Se ha presentado un procedimiento analítico-numérico para la solución del problema de flujo laminar y transferencia de calor en conductos de sección poligonal regular.

A juzgar por los experimentos numéricos realizados la metodología brinda resultados de suficiente precisión desde el punto de vista práctico.

El método puede ser extendido para analizar otras geometrías, tales como conductos de sección circular corrugada, con tal de usar la función de transformación conforme adecuada.

Por otra parte puede ser adaptado para estudiar otros problemas como el análisis del flujo transitorio en regiones de geometría complicada [7].

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (Programa 1993-1994; Director: Profesor R. Rossi). El autor desea expresar su agradecimiento al Dr. P.A.A. Laura por sus valiosas sugerencias en la implementación de este trabajo.

REFERENCIAS

- 1.- Sparrow E.M. y Haji-Sheikh A.. "Flow and Heat Transfer in Ducts of Arbitrary Shape with Arbitrary Thermal Boundary Conditions" Journal of Heat Transfer 88, 1961, pags. 351-356.
- 2.- Casarella, M.J.; Laura, P.A. y Chi, M.. "On the approximate solution of flow and heat transfer through non-circular conduits with uniform wall temperature. British Journal of Applied Physics, Vol. 18, 1967, pags. 1327-1335.
- 3.- Schinzinger, R. y Laura, P.A.A. "Conformal Mapping: methods and

applications .Elsevier.1991

4.- Cortínez, V.H. 1993. "Optimización de Métodos Variacionales y sus Aplicaciones en Problemas de Ingeniería ".Tesis presentada a la Universidad Nacional del Sur,Bahía Blanca,Argentina ,en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Doctor en Ingeniería.

5.- Greenspan, D.. Discrete Numerical Methods in Physics and Engineering.Academic Press.1974.

6.- Romanelli,E.;Maurizi,M. y Laura, P.A.A.."Torsion of bars of regular polygonal cross section". Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE) 98(2),1972,pags.415-424.

7.- Cortínez, V.H.. "Unsteady Flow in Ducts of Complicated Boundary Shape" 1994 Publicación interna , Dpto. de Ingeniería , U. N. del Sur.

APENDICE I

Valores de los coeficientes A_s

s	4	5	6	7	8
A_s	1.0787	1.0526	1.0376	1.0279	1.0219

APENDICE II

Operadores en diferencias finitas utilizados

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta r^2} + \frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta r^2} \right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2 \Delta r} + \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_{i-1}}{2 \Delta r} \right]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \frac{\phi_i - \bar{\phi}_i}{\Delta \zeta}$$

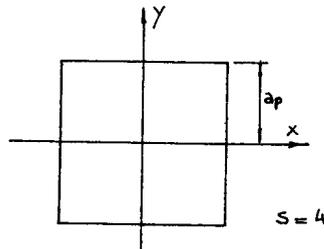


FIGURA 1.- Geometría Analizada