

## **DETERMINACION DE CARGAS AERODINAMICAS SOBRE LAS PALAS DE TURBINAS EOLICAS**

**Ricardo A. Prado**

*Departamento de Mecánica Aplicada  
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Comahue  
calle Buenos Aires No. 1400 - (8300) Neuquén - Argentina*

### **RESUMEN**

El presente trabajo describe la formulación de un modelo computacional para el cálculo de las distribuciones de circulación y cargas aerodinámicas a lo largo de la envergadura de las palas de turbinas eólicas de eje horizontal, para predeterminadas características geométricas y condiciones de funcionamiento de la turbina. El modelo potencial propuesto está basado en la modelización de las palas mediante paneles con hilos vorticosos rectos ligados a los mismos y la determinación de la estela del rotor, de configuración fija, mediante un sistema de hilos vorticosos libres helicoidales de pasos y radios no constantes. Las velocidades inducidas por el sistema vorticoso son calculadas por la aplicación de la ley de Biot-Savart. Determinada la distribución de circulación sobre cada pala, se calculan las distribuciones de sustentación y resistencia, cuyos efectos integrados sobre las palas dan origen al torque de la turbina, que moverá al generador eléctrico, y a la tracción de la hélice. Este trabajo se completa con un ejemplo con el fin de comparar los resultados del presente modelo.

### **ABSTRACT**

This paper describes the formulation of a computational model for calculating the circulation and the aerodynamic load distributions along the span of horizontal-axis aeolic turbine blades, for predetermined turbine geometric characteristics and working conditions. This proposed potential model is based on a panel modeling, with a system of straight bound vortices and a prescribed fixed rotor wake, cofomed by a system of free vortex filaments with helical path having pitch and radius not constant. The velocities induced by that vortex system are calculated by the Biot-Savart law. Once determined the circulation distribution along the blades, the lift and drag distributions are calculated; the integrated effects of those distributions along the blades originate the rotor torque, that will drive the electric generator, and the propeller thrust. The paper includes an example in order to compare the results of the present method.

### **INTRODUCCION**

En el siguiente análisis, la turbina eólica está representada por palas idénticas, no flechadas y de gran alargamiento, simétricamente espaciadas en su posición angular. Dichas palas son rígidas y están rígidamente conectadas al cubo (es decir, no se consideran los efectos aeroelásticos). Se asume que tanto el cubo como la torre no afectan las características aerodinámicas del rotor. Se establece asimismo que la turbina opera en un campo uniforme de viento, de dirección perpendicular a su plano de rotación, bajo condiciones estacionarias. La velocidad de rotación de la turbina,  $\Omega$ , se considera constante. El flujo de aire se asume incompresible y no viscoso. Los efectos viscosos son sólo considerados cuando se utilizan las propiedades del perfil en la sección de cálculo.

Dado que las palas de las turbinas eólicas se consideran no flechadas (la flecha al cuarto de cuerda es nula), la línea que une los cuartos de cuerda de cada sección yace sobre un eje perpendicular a la dirección del viento. Se define entonces una terna de ejes solidaria a la hélice, con origen en el cubo de la misma, de manera que el eje  $x(+)$  quede determinado por la línea de cuartos de cuerda de los paneles ubicados sobre la denominada pala

número 1, el eje  $z(+)$  tiene la dirección del eje de rotación (o sea la dirección del viento incidente), quedando el eje  $y$  determinado por una terna ortogonal derecha. Así, el plano  $xy$  define al plano de rotación de la turbina. Se asume que la turbina (y por ende el sistema de ejes) se mantiene fijo en el espacio, y el aire adquiere una rotación uniforme,  $\omega = -\Omega$ , (de sentido contrario al sentido de rotación de la turbina), compartiendo además el movimiento de avance en la dirección positiva del eje  $z$  (Figura 1).

Tanto la geometría de las palas (distribución de cuerdas,  $c(x)$ , ángulos de pala,  $\beta_c(x)$ , calaje de la pala, perfil aerodinámico) como sus condiciones de operación (velocidad no perturbada del viento,  $V_\infty$ , coeficiente de expansión de la vena de fluido que pasa a través del rotor,  $a$ , velocidad de rotación de la turbina,  $\Omega$ ) son conocidas. Los ángulos de pala representan los ángulos locales entre el plano de rotación y las líneas de cuerda en cada sección. La torsión geométrica está representada por la variación de estos ángulos de pala.

## FORMULACION DEL MODELO VORTICOSO

Con el fin de determinar las cargas aerodinámicas que actúan sobre las palas de una turbina eólica de eje horizontal, se aplican diferentes técnicas computacionales. Uno de los posibles métodos es el denominado método de los paneles [1], mediante el cual la pala es discretizada mediante un número finito de paneles, los cuales son adecuadamente distribuidos a lo largo de la envergadura de las palas. El presente modelo se basa en la teoría de la línea sustentadora [2-6], a la cual se adapta un modelo de estela vorticiosa fija en expansión.

Para el cálculo de la distribución de circulación a lo largo de las  $N$  palas de una turbina, cada una de éstas es reemplazada por  $m$  paneles ubicados a lo largo de la envergadura de pala, de modo que sus cuerdas coincidan con la distribución local de cuerdas de la pala (es decir, no existe una distribución de paneles según cuerda). Como cada panel debe experimentar las mismas sustentación y resistencia que el perfil ubicado en dicha sección, los paneles yacen sobre el plano formado por el primer eje del perfil (o eje de sustentación nula, definido por los ángulos  $\beta_0$ ) de cada sección de pala, de manera que en cada posición la sección de panel represente una placa plana con igual sustentación que el perfil aerodinámico de la sección de pala considerada. Debido a la torsión de las palas, los paneles se encuentran alabeados, rotando alrededor de las posiciones de los cuartos de cuerda.

Cada panel contiene un sistema de hilos vorticosos ligados formado por hilos rectos ubicados sobre la línea de cuarto de cuerda y sobre los bordes del panel, desde su cuarto de cuerda hasta el borde de fuga de la pala. A partir de las esquinas posteriores de cada panel parten hilos vorticosos, denominados libres, que conforman la estela de la turbina eólica (Figura 2 y Figura 3). Dada la superposición de los efectos de avance del aire y rotación de la turbina, los hilos vorticosos semi-infinitos que configuran la estela describen trayectorias helicoidales. Los ejes de los helicoides coinciden con el eje  $z(+)$ . Estos helicoides no presentan el paso ni el radio constantes, dado que el rotor extrae energía del fluido y de acuerdo a la aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento axial, el tubo de corriente envolvente del sistema vorticoso de la estela debe expandirse a medida que el aire fluye corriente abajo del rotor.

La circulación asociada al hilo vorticosos ligado a cada panel, la cual debe ser constante de acuerdo a los teoremas de Helmholtz, debe distribuirse de manera que en su conjunto represente una aproximación discretizada a la distribución de circulación a lo largo de la envergadura de la pala, variación que refleja la distribución de cargas sobre la misma (Figura 4). El efecto del conjunto de hilos vorticosos es el de adicionar en todo el campo un flujo, denominado inducido, que debe sumarse vectorialmente al campo de velocidades debido a la velocidad de avance del aire y al efecto de la rotación. El campo de velocidades inducidas es calculado mediante la aplicación de la ley de Biot-Savart (1). Así, el diferencial de velocidad inducida en el punto  $P$  de coordenadas  $(x_p, y_p, z_p)$  debido a un hilo vorticosos de intensidad constante  $\Gamma$ , siendo  $\zeta$  el vector posición del punto de cálculo  $P$  al elemento  $ds$ , diferencial de arco del filamento vorticosos (Figura 5), es dado por la relación

$$d\vec{v}_i(x_p, y_p, z_p) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{\zeta}}{|\vec{\zeta}|^3} \quad (1)$$

Mediante la integración de la ley de Biot-Savart a lo largo de la longitud del hilo vorticosos se determinan las tres componentes cartesianas de las velocidades inducidas  $(V_{ix}, V_{iy}, V_{iz})$ , que en el caso general no tienen una solución analítica, por lo cual, el correspondiente cálculo requiere de una evaluación numérica. Tal es el caso de las velocidades inducidas por el sistema vorticosos de la estela.

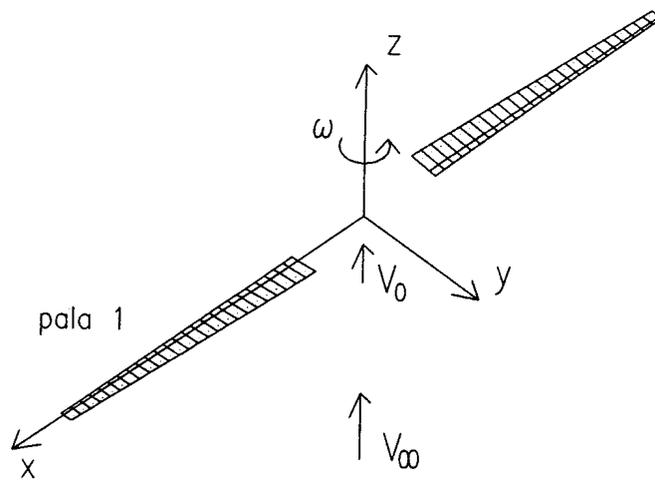


Figura 1

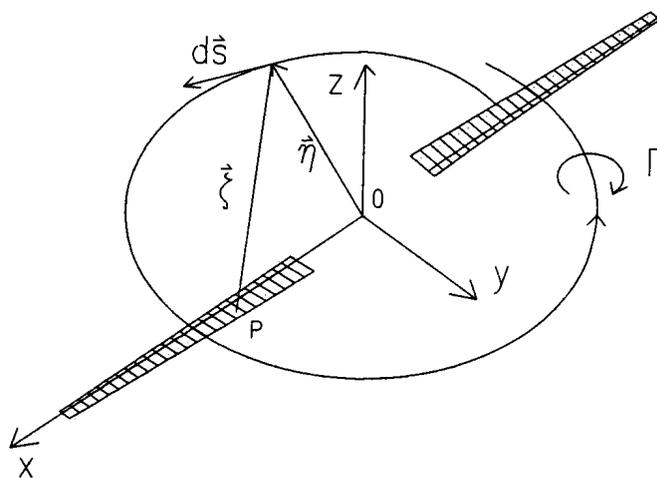


Figura 2

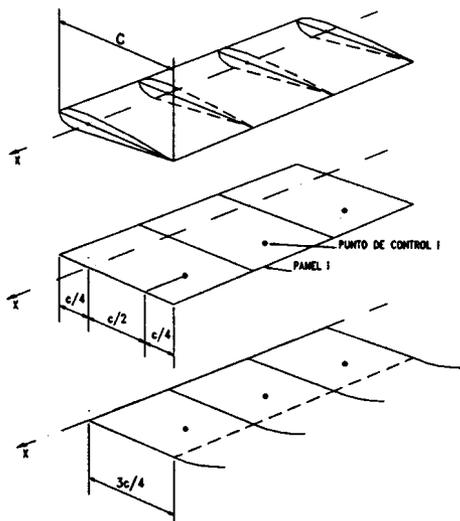


Figura 3

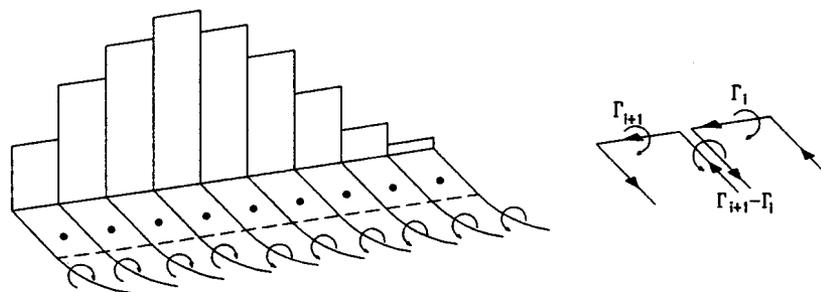


Figura 4

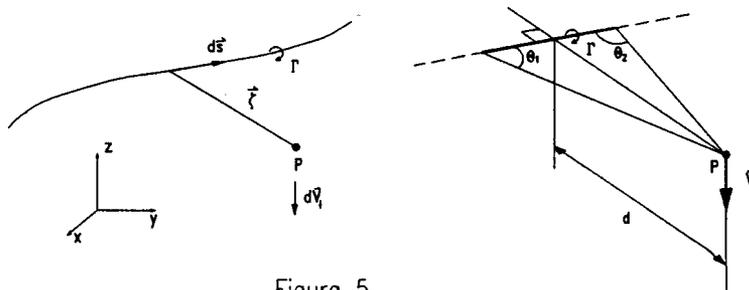


Figura 5

En el caso de los hilos vorticosos ligados al panel, por tratarse de hilos rectilíneos de longitud finita, la ley de Biot-Savart se reduce a

$$V_i|_P = \frac{\Gamma (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)}{4\pi d} \quad (2)$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  representan los ángulos comprendidos entre el segmento de hilo vorticoso y las radios vectores que unen los extremos del segmento con el punto donde se desea determinar la velocidad inducida,  $d$  denota la distancia desde el segmento de hilo vorticoso recto al punto de cálculo,  $P$ , y  $V_i$  representa el módulo de la velocidad inducida, la cual está dirigida perpendicularmente al plano que contiene al segmento de hilo vorticoso recto y al punto de cálculo  $P$ .

### CONFORMACION DE LA ESTELA DEL ROTOR

El aire que fluye dentro del tubo de corriente que pasa a través del rotor va sufriendo una expansión pues se va retardando por entregar parte de su energía cinética a la turbina. Por ello, la velocidad del viento en el plano del rotor,  $V_0$ , es menor que la velocidad no perturbada del viento, siendo  $V_0 = V_\infty(1-a)$ , donde  $a$  es el coeficiente de reducción de velocidad en el disco ( $0 < a < 1$ ). En el presente modelo se considera que el tubo de corriente envolvente del sistema vorticoso de la estela,  $\tau$ , tiene una configuración fija dada por la expresión

$$R_r^6 + R_r^4(z^2 - 2R) + R_r^2(R^2 - 2z^2)R^2 + z^2(1 - a^2) = 0 \quad (3)$$

donde  $R_r(z)$  representa la variación del radio del tubo de corriente  $\tau$  a medida que el aire fluye a lo largo del eje  $z$ , y  $R$  es el radio de la turbina, [7]. El aire que pasa alrededor de cada panel debe permanecer en un tubo de corriente anular que se expande a medida que el aire fluye corriente abajo de la posición del rotor (Figura 6). La geometría de los hilos vorticosos de la estela es dada por

$$z_s = z_0 + C \cdot (\varphi - \varphi_0) \quad x_s = r_s \cdot \cos(\varphi + \Theta_0) \quad y_s = r_s \cdot \text{sen}(\varphi + \Theta_0) \quad (4)$$

donde  $\varphi$  representa el parámetro del helicoides,  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \infty$ ,  $\varphi_0$  es el valor de  $\varphi$  correspondiente al inicio del hilo vorticoso helicoidal en el borde de fuga del panel, de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $r_s$  es el radio local del helicoides,  $\Delta\Theta_0$  representa el espaciado angular entre la  $N$  palas, con lo cual  $\Theta_0 = 2(k-1)\pi/N$ , ( $k = 1, \dots, N$ ). Por condición de continuidad dentro del tubo de corriente  $\tau$ , el paso del helicoides varía según la expresión

$$C = C(z) = \frac{V_0 R^2}{\omega [R_r(z)]^2} \quad (5)$$

Para el cálculo de las velocidades inducidas por el sistema de hilos vorticosos de la estela, por tratarse de filamentos semi-infinitos, la ley de Biot-Savart se integra numéricamente mediante el método de Gauss-Legendre [8] para 512 puntos de cálculo a lo largo de la longitud de los hilos libres, procedimiento utilizado en [9].

Los hilos vorticosos que se desprenden del borde de fuga de las palas y los hilos ligados a los paneles inducen velocidades sobre todo el campo fluidodinámico. Así, el campo de velocidades resultante sobre un punto perteneciente a la pala número 1, de coordenadas  $(x_p, y_p, z_p)$ , quedará determinado por las componentes

$$\begin{aligned} V_x(x_p, y_p, z_p) &= V_{1x}(x_p, y_p, z_p) \\ V_y(x_p, y_p, z_p) &= \omega x_p + V_{1y}(x_p, y_p, z_p) \\ V_z(x_p, y_p, z_p) &= V_0 + V_{1z}(x_p, y_p, z_p) \end{aligned} \quad (6)$$

### DISTRIBUCION DE CIRCULACION Y VELOCIDADES INDUCIDAS

Es posible determinar la velocidad inducida resultante en cualquier punto del espacio cuando la intensidad de cada hilo vorticoso es conocida. Sin embargo, dado que dichas intensidades no son conocidas a priori, primeramente se las debe determinar mediante la aplicación de condiciones de contorno. Así, la distribución de

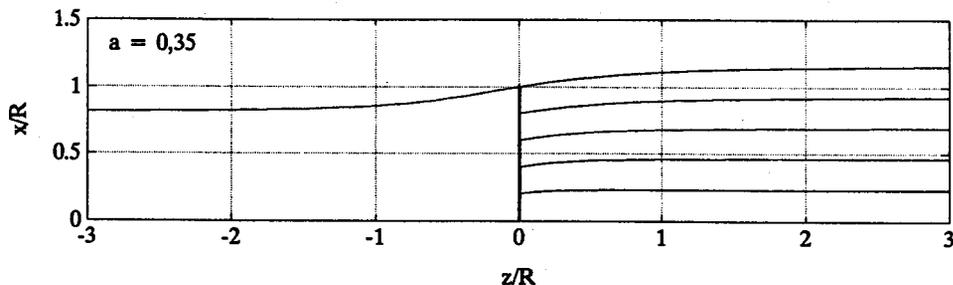


Figura 6

circulación asociada al sistema completo de hilos vorticosos debe verificar la condición de impermeabilidad del panel en los puntos ubicados sobre la línea correspondiente a la semienvargadura de cada panel, a 3/4 de cuerda desde el borde anterior del panel (dichos puntos se denominan puntos de control o de colocación), Figura 7. La condición de impermeabilidad indica que no existe velocidad normal al panel en el punto de control,

$$V_n(P) = \bar{V}_r \cdot \hat{n}|_P = 0 \quad (7)$$

De la aplicación de esta condición de tangencia de la velocidad resultante a los paneles en los respectivos puntos de colocación, se tiene que la intensidad de circulación de cada hilo vorticoso debe ser tal que se verifique la relación (8) en cada punto de control,  $P_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), donde se ha despreciado la componente del campo de velocidades inducido en dirección de la envargadura de la pala, (es decir,  $V_{ix} \approx 0$ ),

$$\left( V_0 + V_{iz}|_{P_i} \right) \cos(\beta_0 + \beta_0) \Big|_{x_p} - \left( \omega x_p + V_{iy}|_{P_i} \right) \sin(\beta_0 + \beta_0) \Big|_{x_p} = 0 \quad (8)$$

donde

$$V_{iy}|_{P_i} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \Gamma_j \quad V_{iz}|_{P_i} = \sum_{j=1}^m b_{ij} \Gamma_j \quad (9)$$

y  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  son los coeficientes de influencia, calculados en los puntos de control  $P$  por la aplicación de la ley de Biot-Savart al caso de un sistema vorticoso (efecto superpuesto de los segmentos vorticosos rectos e hilos de la estela) constituido por filamentos de circulación unitaria. Resulta entonces un sistema de  $m$  ecuaciones lineales simultáneas en las incógnitas  $\Gamma_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ), para determinar la circulación asociada a cada panel.

Evaluada la distribución de circulación del sistema vorticoso completo, la cual debe anularse hacia los extremos de la pala ( $x = x_1$  y  $x = x_2$ ), se determina entonces el campo de velocidades sobre el hilo ligado a 1/4 de cuerda del panel (es decir, a lo largo de la línea sustentadora representada por los puntos  $q$  ubicados sobre el eje  $x$ ) resultando el siguiente campo de velocidades, donde se desprecia nuevamente la componente radial del campo de velocidades inducidas,  $V_{ix}$ ,

$$V_y(x,0,0) = \omega x + V_{iy}(x,0,0)$$

$$V_z(x,0,0) = V_0 + V_{iz}(x,0,0) \quad (10)$$

$$V_r^2(x,0,0) = V_y^2(x,0,0) + V_z^2(x,0,0)$$

Determinado el campo de velocidades resultante sobre la línea sustentadora ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ), se calculan los ángulos de ataque efectivos en cada sección,  $\alpha$ , y las distribuciones de cargas aerodinámicas a lo largo de la envargadura de las palas: sustentación,  $l$ , resistencia,  $d$ , (perpendicular y paralela, respectivamente, a la velocidad resultante  $V_r$ ) o tracción,  $t$ , y fuerza transversal,  $f$ , (perpendicular y paralela, respectivamente, al plano de rotación de la turbina). Figura 8.

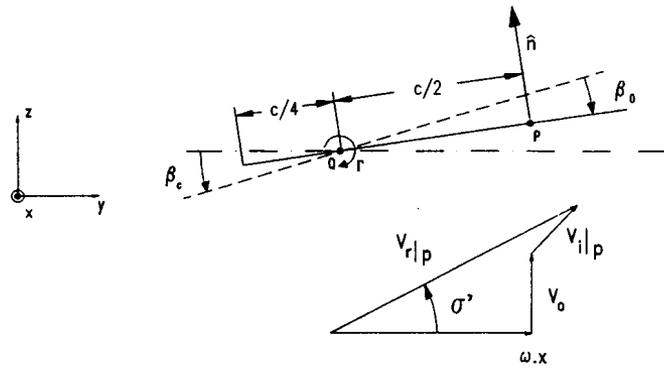


Figura 7

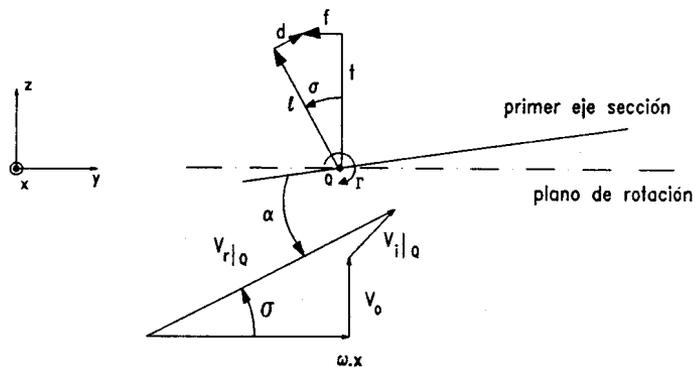


Figura 8

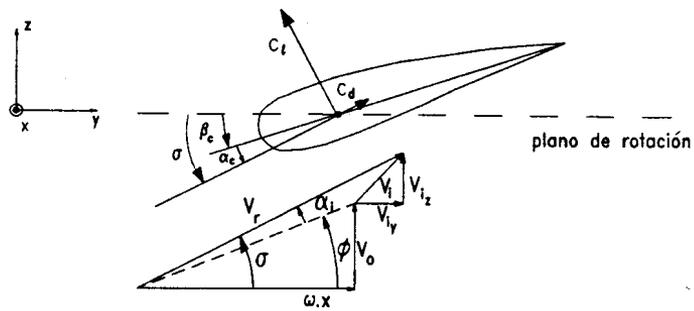


Figura 9

## DISTRIBUCION DE CARGA Y PARAMETROS DE LA TURBINA

Con el fin de determinar los parámetros que miden la performance de una turbina eólica (tracción, torque, potencia entregada) y las distribuciones de carga sobre la envergadura de las palas, se debe calcular la distribución de ángulos de ataque inducidos y efectivos,  $\alpha_i$  y  $\alpha$ , para determinar las distribuciones de los coeficientes de sustentación y resistencia basándose en las características del perfil de pala en cada sección de cálculo (Figura 9),

$$C_l = f_1(\alpha) \quad C_d = f_2(\alpha) = f_3(C_l) \quad (11)$$

La tracción,  $T$ , torque,  $Q$  y potencia,  $P$ , de la turbina se determinan mediante las siguientes expresiones:

$$T = \frac{1}{2} \rho N \int_{x_b}^{x_s} (C_l \cos \sigma + C_d \sin \sigma) V_r^2 c. dx \quad (12)$$

$$Q = \frac{1}{2} \rho N \int_{x_b}^{x_s} (C_l \sin \sigma - C_d \cos \sigma) V_r^2 c. x. dx \quad (13)$$

$$P = Q\omega \quad (14)$$

donde

$$\sigma(x) = \arctg\left(\frac{V_o + V_{iz}(x)}{\omega x + V_{iy}(x)}\right) = \alpha_i(x) + \phi(x) = \alpha_e(x) + \arctg\left(\frac{V_o}{\omega x}\right) \quad (15)$$

Se define coeficiente de potencia,  $C_p$ , a la relación entre la potencia extraída por la turbina y la energía cinética por unidad de tiempo de una corriente libre de viento con una sección transversal igual a la superficie del disco rotor,

$$C_p = P / (\rho \pi R^2 V_o^3 / 2) \quad (16)$$

## EJEMPLO

En el siguiente ejemplo se presentan los resultados obtenidos mediante un programa de cómputo que implementa el modelo discutido en el presente trabajo. Estos se comparan con los resultados presentados en [10], para una turbina eólica de eje horizontal cuya geometría y condición de operación es indicada en [10, p.85].

Se ha considerado que el factor de reducción de velocidad en el disco,  $a$ , sea igual a 0,35, dado que la expansión típica de la estela es del 35% [6]. Las propiedades aerodinámicas del perfil utilizado, N.A.C.A. 4415, fueron tomadas de [11]. Se ha considerado una ley cuadrática para la curva polar de resistencia del perfil y una ley lineal para el coeficiente de sustentación como función del ángulo de ataque efectivo de la sección, para ángulos de ataque menores que el ángulo de pérdida, y un valor constante de dicho coeficiente por encima del ángulo de pérdida, siguiendo el modelo presentado en [2, p.308].

La Figura 10.a muestra la distribución adimensional de la circulación,  $100\Gamma/\omega R^2$ , a lo largo de la pala de la turbina, sobre la línea sustentadora de la misma. La Figura 10.b muestra la variación de los ángulos de ataque efectivos, medidos desde las líneas de cuerda de las secciones de pala,  $\alpha_c$ , que originan las distribuciones de los coeficientes de sustentación y resistencia mostrados en las Figura 10.c y 10.d, respectivamente. Como se observa, la parte interna de la pala presenta pérdida.

Otros resultados del programa de cómputo son el valor de la potencia extraída,  $P = 570$  W y del correspondiente coeficiente de potencia  $C_p = 0,342$ , calculados para una relación  $\omega R/V_o = 6$ . Para dicha condición, la referencia [10, Fig.4 y Fig.5] presenta como resultados una potencia del orden de 600 W y un coeficiente de potencia de valor 0,35, aproximadamente.

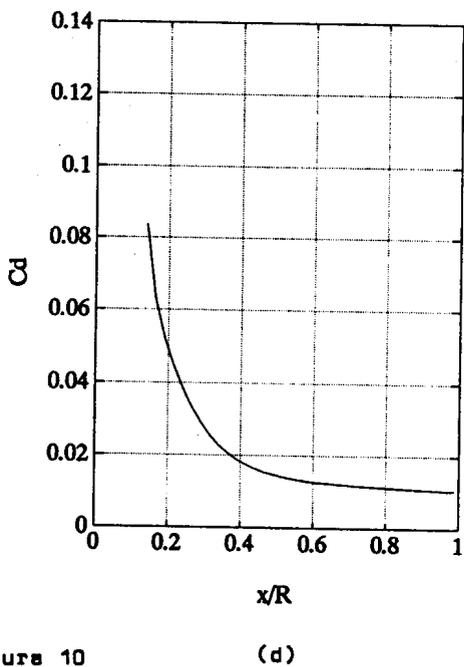
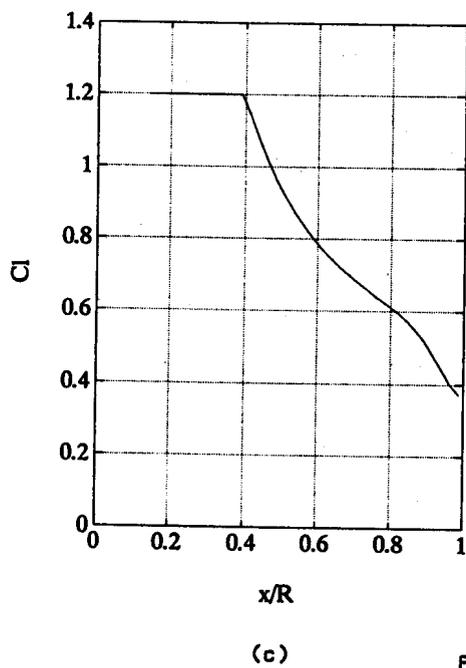
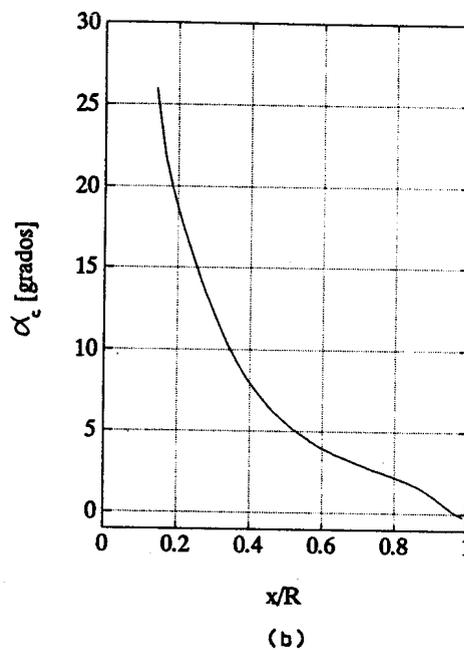
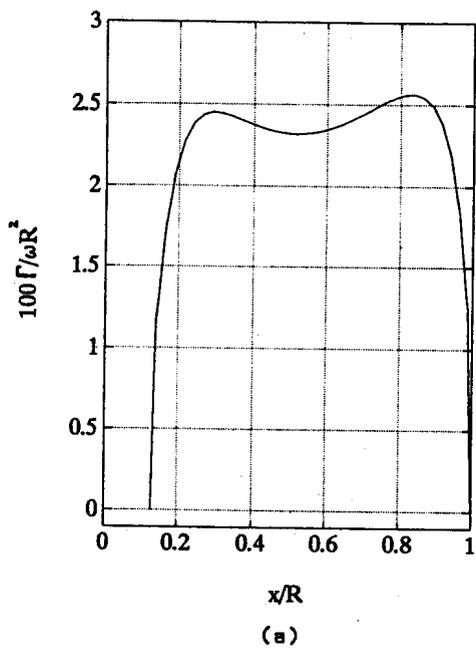


Figura 10

## CONCLUSIONES

Este modelo sería adecuado para el análisis aproximado de las cargas aerodinámicas de las palas y la estimación de la performance de una turbina eólica de eje horizontal, procedimientos tendientes al diseño preliminar del rotor tanto en las condiciones de trabajo óptimo como fuera de ellas.

Dado que el presente modelo incluye un tubo de corriente que se expande a medida que atraviesa al rotor, representa una formulación más real del campo fluidodinámico alrededor de una turbina eólica de eje horizontal. Además, el establecimiento de la geometría de dicho tubo de corriente (en lugar de utilizar métodos más complejos, donde la estela se desarrolla paso a paso y se deforma bajo la acción de sus propias velocidades inducidas) simplifica los cálculos numéricos y reduce los tiempos computacionales.

Por otra parte, se debe tener presente que la teoría de la línea sustentadora, al considerar solamente las características bidimensionales de la sección de pala, no representa adecuadamente las condiciones fluidodinámicas hacia los extremos de las palas, lugares donde los efectos tridimensionales son relevantes y donde las velocidades radiales no deberían ser despreciadas.

Asimismo, tal como se establece en [12], la influencia del número de Reynolds debería ser considerada, pues el efecto primario de dicho grupo adimensional sobre las características aerodinámicas de las secciones de pala (debido a su influencia sobre las condiciones de la capa límite del perfil) se observa en la modificación de los ángulos de pérdida y de los coeficientes de resistencia.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece la colaboración del Ing. Ariel R. Marchegiani y del Dis. Ind. Andrés S. Rodríguez por la confección de las figuras del presente trabajo.

## REFERENCIAS

1. Bertin, J.J. and Smith, M.L., "Aerodynamics for engineers". Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
2. Afjeh, A.A. and Keith, T.G., Jr., "A Vortex Lifting Line Method for the Analysis of Horizontal Axis Wind Turbines". *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.108, pp.303-309, 1986.
3. Afjeh, A.A. and Keith, T.G., Jr., "A Simplified Free Wake Method for Horizontal-Axis Wind Turbines Performance Prediction". *Journal of Fluid Engineering*, Vol.108, pp.400-406, 1986.
4. Koh, S.G. and Wood, D.H., "Formulation of a Vortex Wake Model for Horizontal-Axis Wind Turbines". *Wind Engineering*, Vol.15, No.4, pp.196-210, 1991.
5. Koh, S.G. and Wood, D.H., "Implementation of a Vortex Wake Model for Horizontal-Axis Wind Turbines". *Wind Engineering*, Vol.15, No.5, pp.262-274, 1991.
6. Gould, J. and Fides, S.P., "Computational Methods for the Performance Prediction of HAWT's". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.39, pp.61-72, 1992.
7. Prado, R.A., "Reformulación de la teoría de la cantidad de movimiento aplicada a turbinas eólicas de eje horizontal". Departamento Mecánica Aplicada, Facultad Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue, 1994.
8. Stroud, A.H. and Secrest, D., "Gaussian Quadrature Formulas". Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
9. Prado, R.A. y Boccanera, D.R., "Cálculo de cargas aerodinámicas sobre palas de hélices mediante el cálculo de velocidades inducidas por aplicación de la ley de Biot-Savart". X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, RJ, Dezembro 1989. *Anais do X COBEM*, pp.85-88.
10. Tangler, J.L., "Comparison of Wind Turbine Performance Prediction and Measurement". *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.104, pp.84-88, 1982.
11. Abbott, I.H. and von Doenhoff, A.E., "Theory of wing sections". Dover Publications, Inc., New York, 1959.
12. Musial, W.D. and Cromack, D.E., "Influence of Reynolds Number on Performance Modeling of Horizontal Axis Wind Rotors". *Journal of Solar Energy Engineering*, Vol.110, pp.139-144, 1988.