

CONEXION NO CONFORME DE MALLAS DE ELEMENTOS FINITOS MEDIANTE UNA FORMULACION HIBRIDA

Luis Quiroz Larrea, Patricio Ibáñez Elissalde
Laboratorio de Mecánica Computacional
Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Concepción
Casilla 53-C, Concepción

RESUMEN

El proceso ideal de Diseño Asistido por Computador (CAD) hoy en día es aquel donde el usuario sólo debe crear el modelo geométrico de una pieza, y el análisis del comportamiento físico de ésta se efectúa de manera transparente y automática.

En este sentido, uno de los problemas fundamentales que se encuentran es la generación del modelo de análisis (en este caso de elementos finitos) a partir del modelo geométrico. En piezas de geometría compleja, los generadores de mallas actuales no pueden realizar la generación automática de mallas conformes. Por lo tanto, para generar las mallas en dominios de geometría compleja es necesario dividir el modelo en varias partes o subdominios geométricos simples antes de aplicarles el generador de mallas, con lo cual se obtiene una discretización incompatible en la interfaz formada por dos subdominios.

En este trabajo, se propone un procedimiento de unión de mallas no conformes o incompatible (nodos no coincidentes ni elementos del mismo tipo) ya generadas para subdominios independientes, con el fin de eliminar la intervención del usuario.

El procedimiento de conexión de subdominios propuesto utiliza una formulación similar a la de los elementos finitos de tipo híbrido y se denomina conexión continua.

ABSTRACT

Nowadays, the ideal Computer Aided Design is a process where the user only creates the geometric model of parts and their physical behavior analysis is done in an automatic and transparent way.

In this sense, the generation of the analysis model (here, the finite element model) from the geometric model is the fundamental problem. Available mesh generators cannot produce automatically compatible meshes in parts with complex geometry. Therefore, to generate the mesh in complex domains the model should be divided in several parts or simple geometric subdomains before applying mesh generators. The result is an incompatible discretization on the interface between two subdomains.

In this work, a procedure to connect incompatible or nonconforming meshes automatically generated in subdomains is presented. The proposed procedure uses a formulation similar to hybrid finite element formulation and is called continuous connection.

1. INTRODUCCION

Hoy en día el diseño de piezas mecánicas, y de estructuras en general, está basado principalmente en métodos numéricos, en los cuales la asistencia del computador juega un rol fundamental. La disciplina que reúne las herramientas que permiten la automatización y simulación del proceso clásico de diseño se denomina *diseño asistido por computador* (CAD).

Dentro del CAD existen dos grandes áreas: la modelación geométrica consistente en la representación numérica de una pieza o conjunto; y el análisis físico del modelo geométrico mediante métodos numéricos. Entre los métodos existentes el de interés para el presente trabajo es el Método de Elementos Finitos.

En el proceso ideal de CAD al cual se tiende actualmente, el usuario sólo debería construir el modelo geométrico, y luego el análisis del comportamiento físico se debiera realizar en forma automática y transparente. Sin embargo, el modelo utilizado para un análisis por elementos finitos está construido por entidades matemáticas distintas de las utilizadas en los modelos geométricos. El modelo de elementos finitos usa una aproximación polinomial por tramos de la geometría que es diferente de la descripción del modelo geométrico que utiliza entidades como curvas y superficies de Bezier, B-Splines y NURBS [1]. Para generar el modelo de elementos finitos a partir del modelo geométrico se requiere de un procedimiento de transformación de éste último modelo, constituido por un generador automático de mallas de elementos finitos que toma el modelo geométrico y lo divide en elementos polinomiales según diferentes métodos relacionados con el tipo de elementos deseados, su tamaño y su distribución.

Actualmente se pueden construir modelos geométricos muy complejos, para los cuales los generadores de mallas en ocasiones no son capaces de efectuar en forma automática la generación controlada de elementos. Es necesario entonces, dividir el modelo geométrico en varios subdominios de geometría más simple antes de aplicarlos el generador de mallas. Con esto se logra la discretización de cada subdominio independientemente, pero el resultado es una malla incompatible o no conforme en la interfaz entre dos subdominios. Esto significa que los nodos no coinciden en posición o en cantidad, lo que requiere de la intervención del usuario a fin de realizar una relocalización de nodos.

Entre los generadores de mallas uno muy apreciado es el generador de tipo transfinito, pues es el que genera las mallas más regulares y porque el proceso mismo de generación es fácilmente controlable. Sin embargo, es el más limitado en cuanto a la geometría del dominio a discretizar, ya que éste debe ser de la forma de los elementos que se van a generar, por ejemplo, para elementos cuadrilaterales el dominio debe ser cuadrilateral. Otra desventaja es que si se desea refinar un cierto subdominio, el refinamiento se debe propagar a los otros subdominios para mantener la compatibilidad en la interfaz.

Otra fuente de incompatibilidad entre subdominios se puede presentar si se discretiza cada subdominio con elementos de tipo diferente con el fin de representar mejor el comportamiento de cada subdominio, o de disminuir el número de grados de libertad del modelo global.

Una forma de utilizar los generadores de mallas, y en especial los de tipo transfinito, en forma automática y transparente en cada subdominio es permitir la incompatibilidad en la interfaz. Para realizar esto es necesario establecer un procedimiento que genere en forma automática las relaciones entre las variables del modelo de elementos finitos de cada subdominio, es decir, un procedimiento de *conexión* de los subdominios.

En relación a la conexión de elementos del mismo tipo, llamada *conexión homogénea*, la mayor parte de los trabajos [2,3] tratan en realidad del refinamiento de mallas por división, pero no extienden sus conclusiones a una unión más general. En lo que respecta a la conexión de elementos de distinto tipo, *conexión heterogénea*, muy pocos autores [4,5] han trabajado en otro procedimiento que no sea la conexión mediante elementos de transición [6,7].

En este trabajo se presenta el desarrollo teórico del método de *conexión continua*, basándose en las investigaciones de Quiroz [8] quien ha planteado este método y el de la conexión discreta. Además, se presentan algunos ejemplos de aplicación en la perspectiva de implantar el procedimiento en un programa CAD/Elementos Finitos.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sean dos subdominios discretizados independientemente Ω_1 y Ω_2 , cuyos contornos son $\delta\Omega_1$ y $\delta\Omega_2$ excluyendo la interfaz Γ de unión de dichas regiones.

La energía potencial de cada dominio, $\pi_1(u_1)$ y $\pi_2(u_2)$, puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\pi_1(u_1) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \epsilon^T H \epsilon d\Omega - \int_{\delta\Omega_1} \bar{t}^T u_1 d\delta\Omega - \int_{\Omega_1} b^T u_1 d\Omega \\ \pi_2(u_2) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \epsilon^T H \epsilon d\Omega - \int_{\delta\Omega_2} \bar{t}^T u_2 d\delta\Omega - \int_{\Omega_2} b^T u_2 d\Omega\end{aligned}\quad (1)$$

donde ϵ es el tensor de deformaciones, H es la matriz de Hooke, \bar{t} son las tracciones de superficie especificadas en $\delta\Omega$, b son las fuerzas de cuerpo o de volumen y u es el campo de desplazamientos.

El campo de desplazamientos u debe satisfacer las relaciones entre desplazamientos y deformaciones, y las condiciones de borde:

$$\begin{aligned}\epsilon &= Lu & \text{en } \Omega_1, \Omega_2 \\ u &= \bar{u} & \text{en } \delta\Omega_{1u}, \delta\Omega_{2u}\end{aligned}\quad (2)$$

Además, los desplazamientos de cada subdominio no pueden estar libres en la interfaz Γ , sino que deben ser iguales entre ellos:

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma \quad (3)$$

La minimización del funcional $\pi_1(u_1, u_2) = \pi_1(u_1) + \pi_2(u_2)$, sujeto a la restricción (3) conduce a la solución del problema.

Discretizando ambos subdominios, de modo que la aproximación del campo de desplazamientos este dado por $u = Nq$, la minimización del funcional $\pi_1(u_1, u_2)$ conduce a las conocidas ecuaciones:

$$\begin{aligned}K_1 q_1 &= R_1 \\ K_2 q_2 &= R_2\end{aligned}\quad (4)$$

donde K son las matrices de rigidez, q los conectores de desplazamientos y R las fuerzas generalizadas de los dominios discretizados 1 y 2.

La separación de los conectores de desplazamientos entre los que pertenecen a la interfaz Γ , denotados q_Γ , y los que pertenecen al resto del dominio, denotados q_n , permite escribir la restricción (3) en términos de los conectores de desplazamiento sobre la interfaz como:

$$L_1 q_\Gamma = L_2 q_\Gamma \quad (5)$$

donde L_1 y L_2 son las matrices que unen a los conectores pertenecientes a las regiones 1 y 2 sobre la interfaz Γ . La construcción de estas restricciones es la pieza clave en este estudio y será tratada más adelante.

3. SOLUCION DEL PROBLEMA

El problema presentado es similar al problema de optimización bajo restricciones, con la diferencia que aquí se tienen restricciones de igualdad dadas por (3) o (5), mientras que en optimización generalmente se presentan restricciones de desigualdad.

Para solucionar este problema existen diferentes métodos o estrategias [4,5]: método de eliminación directa,

método de los multiplicadores de Lagrange, método de la función de penalización, método del lagrangiano aumentado. Entre estos el que parece más atractivo de usar es el de los multiplicadores de Lagrange, ya que con el se obtienen todos los valores, incluso los multiplicadores de Lagrange que tienen un importante significado físico.

4. CONSTRUCCION DE LAS RESTRICCIONES

4.1. Superficie de referencia

Para realizar la construcción de las restricciones se define la superficie de referencia S , como la superficie o curva continua del modelo geométrico, que divide los dos subdominios y cuya geometría contiene la de la interfaz efectiva de unión Γ_s . Sobre esta superficie de referencia la distribución de desplazamientos u_s es arbitraria. Además, las dos discretizaciones diferentes de la interfaz, una de cada lado, se denominaran Γ_1 y Γ_2 .

La distribución de los desplazamientos u_s se define por una función polinomial por tramos de la misma manera que para los elementos finitos. Por lo tanto, se puede escribir como:

$$u_s^i = \sum_{j=1}^{n_s} C_{ij} a_j \quad (6)$$

donde i denota la componente de los desplazamientos, C_{ij} son los elementos de la matriz de funciones de forma, a_j son los grados de libertad de u_s y n_s es el número de grados de libertad de u_s .

4.2. Conexión discreta

Un grado de libertad de un nodo k está ligado a la superficie de referencia por:

$$q_k = u_s(\xi_k, \eta_k) = \sum_{j=1}^{n_s} C_{ij}(\xi_k, \eta_k) a_j \quad (7)$$

donde ξ_k, η_k son las coordenadas paramétricas de los nodos sobre la superficie de referencia.

Luego, para ambas interfaces se puede escribir:

$$q_{\Gamma_1} = C_1 a \quad q_{\Gamma_2} = C_2 a \quad (8)$$

donde C_1 y C_2 son las matrices de las funciones de forma de la superficie de referencia evaluadas para las coordenadas de los n_1 y n_2 grados de libertad de las interfaces Γ_1 y Γ_2 .

Si $n_1 \geq n_2$, se puede escribir q_{Γ_1} en función de q_{Γ_2} , y si además, $n_1 = n_2$, entonces la matriz C_2 es cuadrada e invertible, con lo cual la ecuación de restricción toma la forma:

$$q_{\Gamma_1} = C_1 C_2^{-1} q_{\Gamma_2} \quad (9)$$

Esto no es otra cosa que la interpolación de los desplazamientos de cada lado de la interfaz por los desplazamientos de S con un método de mínimos cuadrados discreto. Sin embargo, con esto no se minimiza necesariamente la violación de los desplazamientos en la solución del problema global de elementos finitos. Por esto, se requiere que u_s sea una función compatible con las funciones de aproximación de los elementos finitos de uno de los lados de la interfaz. Por lo tanto, la única opción que queda es elegir la aproximación sobre la superficie de referencia igual a la aproximación de los elementos finitos del lado que posee el menor número de grados de libertad: la superficie Γ_2 .

4.3. Conexión Continua

En lugar de tomar cada conector separadamente como en la conexión discreta, se pueden expresar los errores de la aproximación de los desplazamientos de la discretización de cada lado de la interfaz con respecto a la superficie de referencia como:

$$u_{\Gamma_1} - u_s \qquad u_{\Gamma_2} - u_s$$

Este error puede ser minimizado, sobre la superficie efectiva de unión Γ_e , en un sentido integral por un método de mínimos cuadrados. Es decir, minimizar el área entre las dos funciones.

Si u_Γ^i es la aproximación por elementos finitos de la componente i de los desplazamientos de un lado de la interfaz, y u_s^i es la aproximación sobre la superficie de referencia de la misma componente i , entonces el método de los mínimos cuadrados continuo se expresa por

$$\min_{\Gamma_e} \int (u_\Gamma^i - u_s^i)^2 d\Gamma \quad (11)$$

como las variables independientes son los a_j , entonces la minimización se obtiene con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_j} \int_{\Gamma_e} (u_\Gamma^i - u_s^i)^2 d\Gamma &= 0 \quad j=1, \dots, n_s \\ \int_{\Gamma_e} (u_\Gamma^i - u_s^i) \frac{\partial u_s^i}{\partial a_j} d\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

como $u_s^k = \sum_{k=0}^{n_s} C_{ik} a_k$, entonces se tiene que

$$\frac{\partial u_s^i}{\partial a_j} = C_{ij} \quad (13)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} (u_\Gamma^i - u_s^i) C_{ij} d\Gamma &= 0 \\ \int_{\Gamma_e} u_\Gamma^i C_{ij} d\Gamma &= \int_{\Gamma_e} u_s^i C_{ij} d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

Generalmente, u_Γ^i y u_s^i están definidas por tramos que no necesariamente coinciden, por lo tanto, se debe subdividir la integral del lado izquierdo en la suma de las integrales sobre las intersecciones I_p de los tramos de definición de cada función. Suponiendo que hay n tramos de intersección, entonces:

$$\sum_{p=1}^n \int_{I_p} (u_\Gamma^i C_{ij}) dI = \int_{\Gamma_e} u_s^i C_{ij} d\Gamma \quad (15)$$

Si sobre los intervalos I_p la aproximación de los desplazamientos de los elementos finitos esta dada por:

$$u_\Gamma^i = \sum_{r=1}^m N_{ir} q_r \quad (16)$$

entonces se tiene:

$$\sum_{p=1}^n \int_{I_p} \left\{ \sum_{r=1}^m N_{ir} q_r \right\} C_{ij} dI = \int_{\Gamma_e} u_s^i C_{ij} d\Gamma \quad (17)$$

El ensamble de la ecuación anterior en relación a los grados de libertad sobre la frontera de todos los

elementos que pertenecen a la interfaz, permite escribir en forma matricial:

$$\begin{aligned} B_1 q_{\Gamma_1} &= Da \\ B_2 q_{\Gamma_2} &= Da \end{aligned} \quad (18)$$

No es necesario calcular la matriz D , ya que al considerar los dos lados de la interfaz se puede eliminar el segundo término. Haciendo esto, las restricciones se escriben:

$$B_1 q_{\Gamma_1} = B_2 q_{\Gamma_2} \quad (19)$$

con

$$B_{rj} = \sum_{p=1}^n \int_{I_p} N_{ir} C_{ij} dI \quad (20)$$

6. APLICACIONES

En este punto se muestran algunas aplicaciones del método de conexión continua presentado antes. Los ejemplos tratados aquí son sencillos y se presentan con el objeto de confirmar el procedimiento.

6.1. Placa en tracción

La figura 1 muestra una placa de 20x10 cm sometida a una tracción longitudinal de 1000 kg/cm. Las características del material son $E=2.1e6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$ y espesor igual a 1 cm.

Considerando la placa dividida en dos subdominios, se puede discretizar independientemente cada subdominio con elementos bi-lineales, como lo muestra la figura 2. Aquí se puede notar que no existe conformidad en la interfaz.

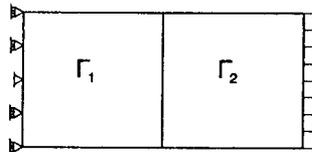


Figura 1. Placa en tracción.

Para este problema los esfuerzos longitudinales teóricos en la placa son de 1000 kg/cm². Los resultados de esfuerzos del análisis por elementos finitos (AEF) utilizando la conexión continua, corresponden exactamente a este valor teórico.

Los resultados de desplazamientos del AEF (figura 2) muestran como la conexión continua permite transmitir los desplazamientos entre un subdominio y otro a través de la interfaz. El tono más oscuro corresponde a desplazamientos nulos y el más claro a desplazamientos de 0.952 cm., que también coinciden con los valores teóricos de desplazamientos en los extremos de la placa.

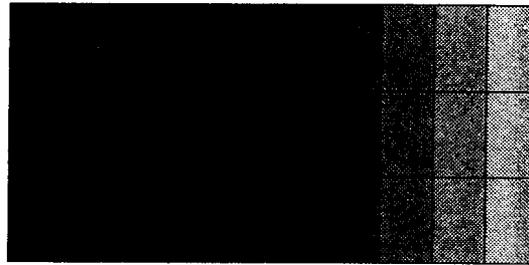


Figura 2. Análisis de placa en tracción.

6.2. Placa con cambio de sección en tracción

En este ejemplo se considera una placa en tracción con un cambio de sección. Cada tramo de sección uniforme se discretiza independientemente, de manera que en la interfaz de unión no existe conformidad (figura 3). Los resultados de esta aproximación se compararan con una discretización conforme en la interfaz (figura 4).

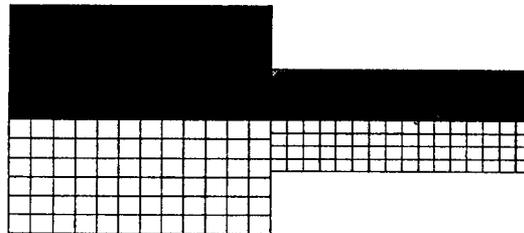


Figura 3. Modelo no conforme.

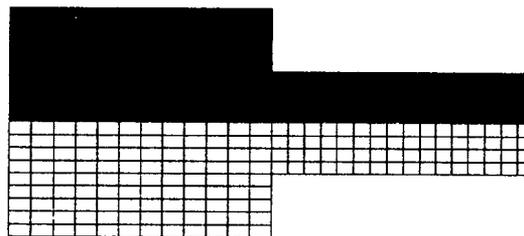


Figura 4. Modelo conforme.

Al comparar los resultados de esfuerzos longitudinales mostrados en las figuras 3 y 4, se observa que los valores tienen la misma distribución a partir de cierta distancia de la interfaz, lo cual confirma que el procedimiento de conexión logra transmitir los desplazamientos y esfuerzos a través de la interfaz.

En la zona cercana a la interfaz las distribuciones de esfuerzos son distintas, y en el caso no conforme existe una discontinuidad de los valores entre un lado y otro de la interfaz. Sin embargo, esto es normal ya que en el modelo conforme los esfuerzos en los nodos son una media de los valores en cada elemento que comparte ese nodo, mientras que en el modelo no conforme para la determinación de esta media sólo intervienen los valores de un lado de la interfaz.

6.3. Placa perforada en tracción

Este es un ejemplo clásico utilizado para evaluar los procedimientos de determinación de esfuerzos en el método de elementos finitos. La figura 5.a muestra una placa de 20"x10", con un orificio de diámetro 0.5", sometida a una tracción longitudinal de 10 lb/in. Las características del material son $E=1000$ psi, $\nu=0.3$ y espesor igual a 0.1". Luego, los esfuerzos nominales son de 100 psi. En la figura 5.b se muestra una discretización inicial de la placa con elementos bilineales.

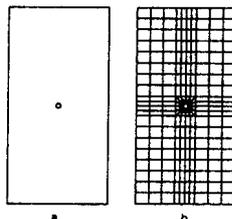


Figura 5. Placa con orificio.

Con estas dimensiones el esfuerzo máximo teórico es de 285 psi. Para la malla inicial, el esfuerzo longitudinal máximo obtenido llega a tan sólo 156.7 psi. Para mejorar este valor se debe refinar la malla en la región de concentración de esfuerzos, una forma de hacer esto es aumentar el número de elementos en la forma clásica, o bien rediscretizar sólo la región de concentración de esfuerzos y realizar una conexión homogénea entre esta región y el resto de la estructura. A fin de comparar los resultados, se desarrollaron los dos casos citados.

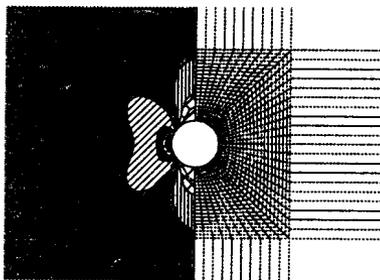


Figura 6. Modelo conforme.

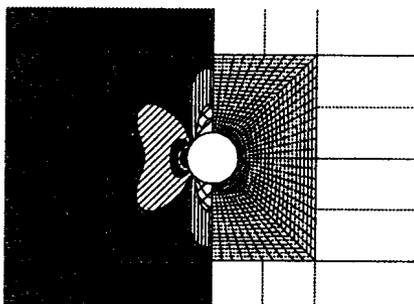


Figura 7. Modelo no conforme.

En el primer caso se utilizó una malla más fina conectada en forma compatible con el resto de la estructura, con lo cual el refinamiento modifica también el resto de la malla que toca los límites de la región de interés. La malla resultante se muestra en la figura 6, con la visualización limitada a la zona mencionada. La misma malla de

la región cuadrada es conectada por el método de la conexión continua al resto de la estructura, como se muestra en la figura 7.

Se puede observar que la distribución de esfuerzos es la misma en ambos casos, siendo el esfuerzo máximo de 283.7 psi, valor que presenta un error de un 1% con respecto al valor teórico.

7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se ha presentado el método de conexión continua de mallas no conformes, aplicado a problemas de conexión homogénea. Sin embargo, el método también se ha aplicado con éxito a la conexión heterogénea.

Para resolver el problema se ha optado por usar el método de los multiplicadores de Lagrange debido a la información adicional que entregan los multiplicadores. En el método de conexión continua, estos multiplicadores corresponden a las tracciones de superficie conjugadas a los desplazamientos de la superficie de referencia S , y corresponden a conectores fuertes. En cambio, en el método de la conexión discreta los multiplicadores son conectores débiles.

Los resultados obtenidos muestran que los métodos de conexión son aplicables a un gran número de problemas prácticos, presentando ventajas claras en problemas como la discretización de dominios complejos y el refinamiento de mallas en regiones limitadas del dominio total.

El método de conexión continua requiere todavía de un trabajo adicional para ser aplicado en forma automática a problemas tridimensionales, debido a la dificultad de evaluar integrales de productos de funciones cuyos parámetros son incompatibles. La solución a estos problemas está siendo investigada actualmente por los autores.

Otro problema no resuelto es la evaluación de la unión, esto es, establecer un estimador del error que tome en cuenta el introducido por la unión no conforme, ya que los procedimientos de estimación de error utilizados actualmente no pueden considerar una interfaz incompatible.

8. REFERENCIAS

- [1] Ibáñez, P. "Representación de curvas y superficies en modelación geométrica", Informe L.M.C.94-0001, Universidad de Concepción, Chile. Marzo, 1994.
- [2] Somerville, I.J. "A technique for mesh grading applied to conforming plate bending elements", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol.6, No.2, pp.310-312, 1973.
- [3] Harvey, J.W. & Clark, W.C. "Smooth interfacing of finite element models", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol.14, pp.1073-1104, 1979.
- [4] Barlow, J. "Constraint relationships in linear and nonlinear finite element analyses", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol.18, pp.521-533, 1982.
- [5] Tsai, P.; Chen, W.H. "The combination of different type elements using a Lagrangian multiplier technique for static and dynamic structural analysis", *Computers & Structures*, Vol.21, N°3, pp.493-500, 1985.
- [6] Surana, K.S. "Transition finite elements for three-dimensional stress analysis", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol.15, pp.991-1020, 1980.
- [7] Cofer, W.F. & Will, K.M. "A three dimensional shell-solid transition element for general nonlinear analysis", *Computers & Structures*, Vol.38, No.4, pp.449-462, 1991.
- [8] Quiroz, L. "Connexion de maillages hétérogènes dans la méthode des éléments finis. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique. 1992.