

UN PROCEDIMIENTO DE DISCRETIZACION PARA LA SOLUCION NUMERICA DE UN PROBLEMA DE GRANDES DESVIACIONES

Aragone Laura S. - Introcaso Beatriz

Dpto. Matemática, E.C.E.N., Fac. Cs. Exactas, Ing. y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario, Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se presenta un procedimiento de cálculo numérico para la resolución de un problema de grandes desviaciones. El mismo consiste en una ecuación elíptica no lineal. El procedimiento aplica un método de discretización de trayectorias en H^1 , que sigue la línea de trabajo utilizada en [1, 2]. Se dan resultados de convergencia de las soluciones discretas a la solución del problema continuo y un algoritmo para la resolución computacional de las ecuaciones discretizadas que finaliza en un número finito de pasos. Se muestran ejemplos numéricos de aplicación.

ABSTRACT

In this paper we present a numerical procedure to solve a large deviation problem. This one consist in an elliptical non linear equation. The procedure uses a discretization method of trajectories in H^1 , which is similar to that applied in [1, 2]. We give results of convergence of the discrete solution to the continuous problem's solution and an algorithm to compute the numerical solution which finishes in a finite number of steps. Numerical examples are shown.

1. INTRODUCCION

1.1 Descripción del problema

En este trabajo se desarrolla un método numérico para resolver el problema de optimización

$$Q(x) = \inf \left\{ J(y(\cdot)) : y \in H^1(\mathbb{R}^+), y(\cdot) \subset \bar{\Omega} \right\}, \quad (1)$$

siendo

$$J(y(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\| \frac{dy}{ds}(s) + b(y(s)) \right\|^2 ds. \quad (2)$$

Este problema tiene su origen en el tratamiento de problemas de grandes desviaciones (ver [9, 19, 22]) y el breve comentario de §1.3.

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$. Supondremos en lo sucesivo que $0 \in \bar{\Omega}$ y que al mismo tiempo es el único punto atractivo del siguiente sistema dinámico, donde $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$

$$\frac{dy}{dt} = b(y), \quad (3)$$

es decir,

$$\bullet \quad b(y) \neq 0, \quad \forall y \neq 0 \quad (4)$$

$$\bullet \quad b \cdot n \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (5)$$

- $\forall x \in \bar{\Omega}$, la solución de (3) con condición inicial $y(0) = x$, verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0. \quad (6)$$

Como consecuencia del principio de la programación dinámica, la función Q verifica la ecuación

$$\frac{\|\nabla u\|^2}{2} + (b, \nabla u) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (7)$$

con condición de normalización

$$u(0) = 0. \quad (8)$$

Nota 1.1: Usaremos la notación (a, b) para designar el producto escalar entre elementos de \mathbb{R}^m .

Nota 1.2: Es obvio que $u \equiv 0$, es una solución del sistema (7)-(8), por lo que es preciso introducir una definición ad-hoc de solución de (7)-(8) que permita identificar a Q como la única solución de acuerdo a ese concepto. Utilizaremos para ello las técnicas de subsoluciones clásicas [11], de viscosidad [7, 8] y el tratamiento de las condiciones de frontera introducido por Soner [21].

Definición 1.1: Diremos que v es solución del sistema (7)-(8) en el sentido de la viscosidad si

- v es subsolución de (7) en el sentido de la viscosidad en Ω , es decir

$\forall \phi \in C^1(\Omega)$ tal que $v - \phi$ admite un máximo local en x_0 , entonces

$$\frac{\|\nabla \phi(x_0)\|^2}{2} + (b(x_0), \nabla \phi(x_0)) \leq 0 \quad (9)$$

- v es supersolución de (7) en el sentido de la viscosidad en $\bar{\Omega}$, es decir

$\forall \phi \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $v - \phi$ admite un mínimo local en x_0 , entonces

$$\frac{\|\nabla \phi\|^2}{2} + (b(x_0), \nabla \phi(x_0)) \geq 0 \quad (10)$$

- $u(0) = 0$.

$$(11)$$

Definición 1.2: Diremos que v es una subsolución clásica de (7)-(8) si: $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ y

$$\frac{\|\nabla v\|^2}{2} + (b, \nabla v) \leq 0 \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega \quad (12)$$

con condición de normalización

$$v(0) = 0. \quad (13)$$

1.2 Caracterización de Q

Las definiciones previas permiten caracterizar a la función Q de la siguiente manera:

Teorema 1.1:

- $Q \in W^{1,\infty}(\Omega)$
- Q es la única solución de viscosidad del sistema (7)-(8).
- Q es la máxima subsolución en el sentido clásico de (7)-(8).

La demostración utiliza técnicas clásicas (ver [8, 10, 11, 21]) y es aquí omitida por razones de brevedad.

1.3 Origen del problema

El problema descrito anteriormente proviene del análisis asintótico del comportamiento de un sistema dinámico con punto singular de tipo atractivo, sujeto a perturbaciones aleatorias pequeñas. El mismo fue analizado por Perthame en [19] desde el punto de vista teórico. El problema estocástico original tiene asociada la ecuación elíptica

$$\begin{cases} L_\epsilon u_\epsilon = -\frac{\epsilon}{2} \Delta u_\epsilon - b \cdot \nabla u_\epsilon & \text{en } \Omega, \\ u_\epsilon = \phi & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (14)$$

u_ϵ representa aquí la esperanza de un funcional de costo que involucra los valores de la función ϕ en el contorno $\partial\Omega$. Puede verse en [19] que u_ϵ converge a una constante μ cuando ϵ tiende a cero. Asimismo es

$$\mu = \int_{\partial\Omega} \phi(x) dP(x), \quad (16)$$

donde la medida de probabilidad P tiene soporte en el conjunto de puntos de que realizan el mínimo de la función Q sobre la frontera. La resolución directa de (14)-(15) conduciría a un problema mal condicionado (ver [6, 20]). Es por esto, que con vista a evaluar numéricamente μ , se procede al cómputo numérico de Q y mediante ella determinar el soporte de P .

2. EL PROBLEMA DISCRETO

2.1 Elementos del problema discreto

Para definir el problema discreto es necesario introducir una aproximación que comprenda la discretización del espacio $H^1(\mathbb{R}^+)$ y del espacio $C(\Omega)$. Utilizamos extensamente las técnicas descritas en [1, 2, 4, 13, 14, 15, 17, 18]. Cuidamos de trabajar con esquemas de discretización que verifican un principio de máximo discreto [5], propiedad cuyo rol esencial para obtener procedimientos convergentes en un amplio rango de problemas puede verse en [3]; asimismo hacemos uso de discretizaciones con pasos de tiempo de orden \sqrt{k} (siendo k el orden de las discretizaciones espaciales), discretizaciones espaciales cuyas ventajas son analizadas en [12, 13, 14, 17, 18].

2.1.1 Aproximación del dominio Ω

El espacio de estados Ω se discretiza mediante una red uniforme B de puntos dados por

$$x = \sum_{j=1}^m \xi^j e^j k \quad (17)$$

donde $e^j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (el 1 en la j -ésima posición), $\xi^j \in \mathbb{Z}$. Definimos la aproximación $\Omega^k = B \cap \Omega$, designamos N_k al cardinal de este conjunto y $V^k = \{x^j : j=1, \dots, N_k\}$ un ordenamiento arbitrario de los nodos de Ω^k .

$$W^k = \{w : V^k \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } w(0) = 0\} \quad (18)$$

2.1.2 Aproximación de Π^1

Llamaremos $F^k \subset H^1(\mathbb{R}^+)$ a un conjunto especial de trayectorias discretas. Las mismas estarán determinadas por una sucesión de vértices $x_\zeta \in V^k$ y de tiempos t_ζ tal que

$$\bullet y^k(t_\zeta) = x_\zeta \quad (19)$$

$$\bullet y^k(t) = x_\zeta + \frac{x_{\zeta+1} - x_\zeta}{t_{\zeta+1} - t_\zeta} (t - t_\zeta) \quad \forall t \in (t_\zeta, t_{\zeta+1}) \quad (20)$$

$$\bullet \|x_{\zeta+1} - x_\zeta\| \leq \sqrt{k}. \quad (21)$$

2.1.3 La función de costo óptimo discreta y sus propiedades

Restringiendo la evaluación del funcional J al espacio F^k , definimos la función de costo óptimo discreta

$$Q^k(x) = \inf \{ J(y^k(\cdot)) \mid y^k \in F^k \}, \quad (22)$$

la cual satisface el principio de la programación dinámica, que en este caso toma la forma

$$Q^k(x^i) = \min \left\{ Q^k(y^k(t_1)) + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left\| \frac{dy^k(t)}{dt} + b(y^k(t)) \right\|^2 dt \mid y^k \in F^k, y^k(0) = x^i \right\}. \quad (23)$$

Analizaremos en lo siguiente el cálculo de Q^k como aproximación de la función Q y su convergencia a la misma.

2.2 El problema discreto y su solución

2.2.1 Definición del operador P_k y del problema discreto \mathfrak{P}^k

Definición 2.1: Introducimos las siguientes definiciones auxiliares

$$\bullet \mathfrak{B}_1(i,j) = \int_0^1 b(x^i + (x^j - x^i)s) ds \quad (24)$$

$$\bullet H(i, j) = \frac{\|x^i - x^j\|}{\mathfrak{B}_1(i,j)} \quad (25)$$

$$\bullet \mathfrak{B}_2(i,j) = \int_0^1 \|b(x^i + (x^j - x^i)s)\|^2 ds \quad (26)$$

$$\bullet \text{Operador } P_k: W^k \rightarrow W^k$$

$$P_k w(x^i) = \min \left\{ w(x^j) + \|x^j - x^i\| \mathfrak{B}_2 + ((x^j - x^i), \mathfrak{B}_1) \mid \|x^j - x^i\| \leq \sqrt{k} \right\} \quad (27)$$

$$\bullet \text{Problema } \mathfrak{P}^k: \text{Encontrar el punto fijo del operador } P_k \quad (28)$$

2.2.2 Existencia y unicidad de solución discreta

Se puede probar el siguiente teorema, que establece la caracterización de la única solución Q^k del problema \mathfrak{P}^k .

Teorema 2.1:

- Q^k es el único punto fijo de P_k , es decir:

$$Q^k = P_k Q^k \quad (29)$$

- $\forall U^0 \in W^k$ se tiene

$$Q^k = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (P_k)^\nu U^0 \quad (30)$$

- $\forall U^0 \in W^k$ existe $\bar{\nu}(U^0)$ tal que

$$P_k^\nu U^0 = Q^k \quad \forall \nu \geq \bar{\nu} \quad (31)$$

- son válidas las propiedades de monotonía

$$U \leq \bar{U} \Rightarrow P_k U \leq P_k \bar{U} \quad (32)$$

$$U = 0 \Rightarrow P_k U \geq 0 \Rightarrow (P_k)^\nu U \uparrow Q^k \quad (33)$$

2.3 Convergencia de las discretizaciones

2.3.1 Procedimiento de discretización de una trayectoria de H^1

Dada una trayectoria admisible $y: [0, +\infty) \rightarrow \bar{\Omega}$, ($y \in H^1(\mathcal{R}^+)$), $y(0) \in V^k$, definimos $y^k: [0, +\infty) \rightarrow V^k$ mediante el siguiente procedimiento de construcción:

Paso 0: $\zeta = 0$, $h = \sqrt{k}$, $t_\zeta = 0$, $x_0 = y(0)$

Paso 1: $\zeta = \zeta + 1$, $t_\zeta = t_{\zeta-1} + h$

Paso 2: $x_\zeta = \arg \min \{ \|x_\zeta - y(t_\zeta)\| \mid x_\zeta \in V^k \}$

Paso 3: Si $\|x_\zeta - x_{\zeta-1}\| > h$, entonces $t_\zeta = \frac{1}{2}(t_{\zeta-1} + t_\zeta)$, e ir a Paso 2

Proposición 2.1: El procedimiento de construcción anterior verifica:

- el lazo 2-3 es recorrido un número finito de veces
- la trayectoria discreta generada tiene la siguiente propiedad:

$$\exists \bar{\zeta} \text{ tal que } x_\zeta = 0, \quad \forall \zeta \geq \bar{\zeta},$$

- $\exists c > 0$ (independiente de k), tal que: $t_\zeta - t_{\zeta-1} \geq c h$ (34)

- $\|y^k\|_{H^1} \leq \|y\|_{H^1} + C \sqrt{k} t_\zeta$. (35)

2.3.2 Establecimiento de la convergencia del procedimiento

Básicamente el procedimiento desarrollado consiste en una aproximación del espacio $H^1(\mathcal{R}^+)$ por funciones seccionalmente lineales. El funcional discretizado coincide con el funcional original. El resultado de convergencia es entonces inmediato probando la densidad de $\bigcup_k F^k$ en H^1 y la continuidad del funcional.

Teorema 2.2:
$$\lim_{k \rightarrow 0} (Q^k(x) - Q(x)) = 0 \quad (36)$$

Demostración: $Q(x^j) - Q^k(x^j) \leq 0$, en virtud de (1), (22) y de que $F^k \subset H^1$. veamos ahora que

$$\limsup_{k \rightarrow 0} (Q^k(x^j) - Q(x^j)) \leq 0. \quad (37)$$

Consideramos la función $\bar{y}(\cdot)$ que verifica $\bar{y}(0) = x^j$ y además

$$Q(x^j) = J(\bar{y}). \quad (38)$$

Dado $\epsilon > 0$, en virtud de la condición $\bar{y} \in H^1(\mathbb{R}^+)$, se tiene que (ver [16]),

$$\exists T(\epsilon) > 0 \text{ tal que } \forall t \geq T(\epsilon) \text{ vale } \|\bar{y}(t)\| \leq \epsilon. \quad (39)$$

Hasta el tiempo $T(\epsilon)$, consideramos la función y^k definida según el procedimiento detallado en 2.3.1.

Llamamos ζ_ϵ al primer índice tal que $t_{\zeta_\epsilon} \geq T(\epsilon)$. Tomamos

$$t_{\zeta_\epsilon+1} = t_{\zeta_\epsilon} + 1, t_{\zeta_\epsilon+\nu} = t_{\zeta_\epsilon+\nu-1} + 1, \forall \nu \geq 1 \text{ y } y^k(t_{\zeta_\epsilon+\nu}) = 0 \forall \nu \geq 1.$$

Dado que $\|y^k(t_{\zeta_\epsilon})\| \leq \epsilon + k$, resulta

$$\frac{1}{2} \sum_{\zeta=\zeta_\epsilon}^{\infty} \int_{t_\zeta}^{t_{\zeta+1}} \left\| \frac{dy^k(t)}{dt} + b(y^k(t)) \right\|^2 dt \leq c(\epsilon + k)^2. \quad (40)$$

En consecuencia, dado que $Q(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$, obtenemos

$$Q^k(x^j) - Q(x^j) \leq \frac{1}{2} \sum_{\zeta=1}^{\infty} \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\left\| \frac{dy^k(t)}{dt} + b(y^k(t)) \right\|^2 - \left\| \frac{dy(t)}{dt} + b(y(t)) \right\|^2 \right) dt \leq \frac{1}{2} I + c(\epsilon + k)^2, \quad (41)$$

siendo

$$I = \sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\left\| \frac{dy^k(t)}{dt} + b(y^k(t)) \right\|^2 - \left\| \dot{y}(t) + b(y(t)) \right\|^2 \right) dt. \quad (42)$$

Tenemos así

$$I = \sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} (I_1^\zeta + I_2^\zeta + I_3^\zeta + I_4^\zeta),$$

donde

$$I_1^\zeta = \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\left\| \frac{dy^k(t)}{dt} \right\|^2 - \left\| \frac{dy(t)}{dt} \right\|^2 \right) dt, \quad (43)$$

$$I_2^\zeta = \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\left\| b(y^k(t)) \right\|^2 - \left\| b(y(t)) \right\|^2 \right) dt, \quad (44)$$

$$I_3^\zeta = 2 \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\frac{dy^k(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}, b(y^k(t)) \right) dt, \quad (45)$$

$$I_4^\zeta = 2 \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\frac{dy(t)}{dt}, b(y^k(t)) - b(y(t)) \right) dt. \quad (46)$$

Definimos $\hat{y}^k \in H^1(\mathbb{R}^+)$, tal que

$$\hat{y}^k(t_\zeta) = y(t_\zeta) + \frac{y(t_{\zeta+1}) - y(t_\zeta)}{t_{\zeta+1} - t_\zeta} (t - t_\zeta) \quad \forall t \in (t_\zeta, t_{\zeta+1}),$$

la cual tiene las siguientes propiedades (ver [20])

$$\bullet \|y^k - \hat{y}^k\|_\infty \leq k \quad (47)$$

$$\bullet \left\| \frac{dy^k}{dt} - \frac{d\hat{y}^k}{dt} \right\|_\infty \leq C \sqrt{k} \quad (48)$$

$$\bullet \|y - \hat{y}^k\|_2 \leq C k \quad (49)$$

$$\bullet \|\hat{y}^k\|_{H^1} \leq \|y\|_{H^1} \quad (50)$$

Acotamos ahora los términos correspondientes a I_1^ζ de la siguiente manera

$$\sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} I_1^\zeta = \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\left\| \frac{dy^k(t)}{dt} \right\|^2 - \left\| \frac{d\hat{y}^k(t)}{dt} \right\|^2 + \left\| \frac{d\hat{y}^k(t)}{dt} \right\|^2 - \left\| \frac{dy(t)}{dt} \right\|^2 \right) dt$$

Es fácil observar que

$$\sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\left\| \frac{d\hat{y}^k(t)}{dt} \right\|^2 - \left\| \frac{dy(t)}{dt} \right\|^2 \right) dt \leq 0,$$

resulta así usando (48)

$$\sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} I_1^\zeta \leq \sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\left\| \frac{dy^k(t)}{dt} \right\|^2 - \left\| \frac{d\hat{y}^k(t)}{dt} \right\|^2 \right) dt \leq C \sqrt{k} T_\epsilon. \quad (51)$$

Veamos ahora la acotación correspondiente a I_2^ζ

$$\begin{aligned} I_2^\zeta &= \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\|b(y^k(t))\|^2 - \|b(y(t))\|^2 \right) dt = \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\|b(y^k(t))\| + \|b(y(t))\| \right) \left(\|b(y^k(t))\| - \|b(y(t))\| \right) dt \leq \\ &\leq 2 \|b\|_\infty \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\|b(y^k(t))\| - \|b(y(t))\| \right) dt \leq 2 \|b\|_\infty L_b \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \|y^k(t) - y(t)\| dt \leq \\ &\leq 2 \|b\|_\infty L_b \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \left(\|y^k(t) - \hat{y}^k(t)\| + \|\hat{y}^k(t) - y(t)\| \right) dt \leq \\ &2 \|b\|_\infty L_b \left((t_\zeta - t_{\zeta-1}) k + \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \|\hat{y}^k(t) - y(t)\| dt \right) \end{aligned}$$

Luego

$$\sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} \int_{t_{\zeta-1}}^{t_\zeta} \|\hat{y}^k(t) - y(t)\| dt = \int_0^{t_{\zeta_\epsilon}} \|\hat{y}^k(t) - y(t)\| dt \leq \sqrt{T_\epsilon} \|\hat{y}^k - y\| \leq C k \sqrt{T_\epsilon}$$

Por lo tanto

$$\sum_{\zeta=1}^{\zeta_\epsilon} I_2^\zeta \leq 2 C \|b\|_\infty L_b k \left(T_\epsilon + C \sqrt{T_\epsilon} \right). \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
I_3^{\zeta} &= 2 \int_{t_{\zeta-1}}^{t_{\zeta}} \left(\frac{dy^k(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}, b(y^k(t)) \right) dt \leq \\
& 2 \int_{t_{\zeta-1}}^{t_{\zeta}} \left(\frac{dy^k(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}, b(y^k(t)) - b(x_{\zeta-1}) \right) dt + 2 \int_{t_{\zeta-1}}^{t_{\zeta}} \left(\frac{dy^k(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}, b(x_{\zeta-1}) \right) dt. \\
\text{Luego} \quad \sum_{\zeta=1}^{\zeta_{\epsilon}} I_3^{\zeta} &\leq 2 L_b \sqrt{k T_{\epsilon}} \left\| \frac{dy^k(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right\|_2 + \sum_{\zeta=1}^{\zeta_{\epsilon}} 2 (x_{\zeta+1} - x_{\zeta} - y(t_{\zeta+1}) + y(x_{\zeta}), b(x_{\zeta})) \leq \\
& C L_b \|y\|_{H^1} \sqrt{k T_{\epsilon}} + 4 \|b\|_{\infty} k. \tag{53}
\end{aligned}$$

En forma similar a lo hecho en I_2^{ζ} , resulta (aplicando clásicos resultados de interpolación de funciones [20])

$$\begin{aligned}
\sum_{\zeta=1}^{\zeta_{\epsilon}} I_4^{\zeta} &= 2 \int_0^{t_{\zeta_{\epsilon}}} \left(\frac{dy(t)}{dt}, b(y^k(t)) - b(y(t)) \right) dt \leq 2 \left\| \frac{dy}{dt} \right\|_2 \left\| b(y^k(t)) - b(y(t)) \right\|_{L^2(0, T_{\epsilon})} \leq \\
& \leq 2 L_b \left\| \frac{dy}{dt} \right\|_2 \left(\left\| y^k(t) - \tilde{y}^k(t) \right\|_{L^2(0, T_{\epsilon})} + \left\| \tilde{y}^k(t) - y(t) \right\|_{L^2(0, T_{\epsilon})} \right) \leq \\
& \leq 2 L_b \left\| \frac{dy}{dt} \right\|_2 \left(k \sqrt{T_{\epsilon}} + C k \right) \tag{54}
\end{aligned}$$

Sumando (41), (42), (51)-(54) y tomando límite $k \rightarrow 0$, llegamos a (37).

□

2.4 Procedimiento de cómputo

2.4.1 Algoritmo

Paso 1: Dar $\epsilon > 0$, $U^0 \in W^k$, $n=0$

Paso 2: Calcular para cada $j=1, \dots, N_k$:

$$U^{n+1}(x^j) = \min \left\{ U^n(x^i) + \frac{H(i,j)}{2} \left\| \frac{x^i - x^j}{H(i,j)} + b(x^j) \right\|^2 \mid x_i \in V^k; \|x_i - x_j\| < h \right\} \tag{55}$$

Paso 3: Si $\|U^{n+1} - U^n\| = 0$, parar y $Q^k = U^{n+1}$

Si no $n = n+1$ e ir a Paso 2.

2.4.2 Convergencia del algoritmo

Teorema 2.3: El algoritmo finaliza en un número finito de pasos.

La demostración es una consecuencia inmediata del teorema 2.1.

3. EJEMPLOS NUMERICOS

Las siguientes graficas muestran dos aplicaciones en las cuales el tamaño del mallado es 21×21 , la función $b(x) = -x - 99 e^{(e', x)}$, donde, en la Figura 1 el vector $e = [1; -1]$ y en la Figura 2 $e = [1; 2]$.

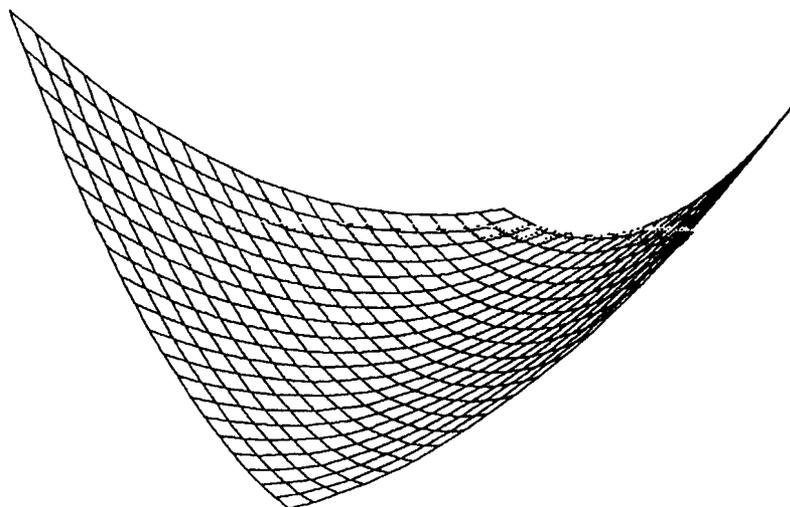


Figura 1

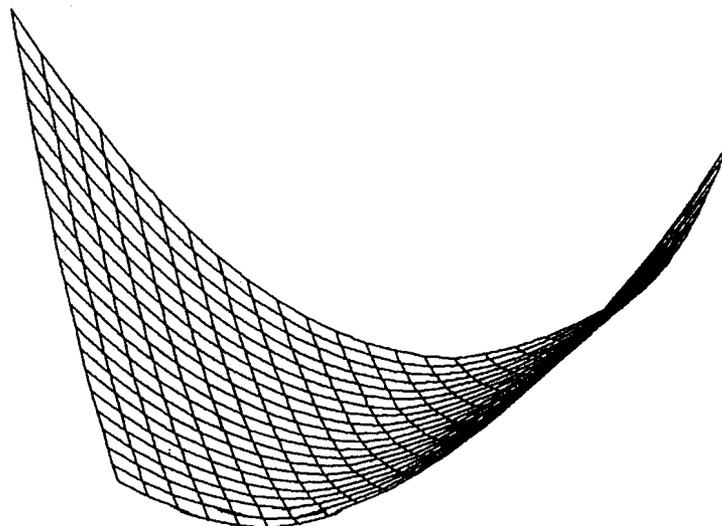


Figura 2

CONCLUSIONES

El procedimiento numérico desarrollado en este trabajo se apoya esencialmente en la interpretación del problema original como un problema de control óptimo y en la aproximación con trayectorias seccionalmente lineales de las evoluciones continuas del sistema dinámico. Otra característica especial de nuestro desarrollo es el hecho de que las trayectorias de aproximación deben pasar por los nodos del mallado del dominio Ω , característica que implica, entre otras propiedades, que el problema discreto final a resolver iterativamente es un problema de control óptimo sobre una cadena de Markov finita con un solo punto recurrente (coincidente con el punto atractivo del sistema dinámico); consecuencia de ello es la convergencia en un número finito de pasos del algoritmo iterativo de cómputo.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado parcialmente a través del subsidio PID BID-CONICET N° 213.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aragone L.S., *Contribuciones a la solución numérica de algunos problemas de optimización económica*, Tesis Doctoral, U.N.R., 1993.
- [2] Aragone L.S., González R.L.V., *Sobre la Resolución Numérica de Inecuaciones Cuasi-Variacionales Asociadas a Optimizaciones con Costo Promedio*, Anales del Congreso ENIEF'92, Bariloche, 1992.
- [3] Barles G., Souganidis P., *Convergence of Approximation Schemes for Fully Nonlinear Second Order Equations*, Asymptotic Analysis, Vol. 4, pp. 271-283, 1991.
- [4] Capuzzo Dolcetta I., Ishii H., *Approximate Solution of the Bellman Equation of Deterministic Control Theory*, Applied Mathematics & Optimization, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.
- [5] Ciarlet P.G., *Discrete Maximum Principle for Finite-Difference Operators*, Aequationes Mathematicae, Vol. 4, N° 3, pp. 338-352, 1970.
- [6] Ciarlet P.G., *Numerical Analysis for the Finite Element Methods*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1976.
- [7] Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.L., *Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 282, pp. 487-502, 1984.
- [8] Fleming W.H., Soner H.M., *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [9] Freidlin M.I., Wentzell A.D., *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [10] Friedman A., *Differential Games*, Wiley, New York, 1971.
- [11] González R.L.V., *Sur l'existence d'une solution maximale de l'équation de Hamilton-Jacobi*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Serie I, Tome 282, pag. 1287-1290, 1976.
- [12] González R.L.V., Tidball M.M., *Sur l'ordre de convergence des solutions discrétisées en temps et en espace de l'équation de Hamilton-Jacobi*, Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, Tomo 314, Serie I, pp. 479-482, 1992.
- [13] Kushner H.J., *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Preprint, Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown University, Providence, Rhode Island, 1988.
- [14] Kushner, H: *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*, Siam J. Control and Optim. 28, 5, 999-1048, 1990.
- [15] Kushner H.J., Dupuis F., *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [16] Maz'ja V.G., *Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [17] Menaldi J.L., *Probabilistic view of estimates for finite difference methods*, Mathematicae Notae, Vol. 32, pp. 1-37, 1988.
- [18] Menaldi J.L., *Some estimates for finite difference approximations*, SIAM Journal on Control and Optimization. Vol. 27, N°3, pp. 579-607, 1989.
- [19] Perthame B., *Perturbed dynamical systems with an attracting singularity and weak viscosity limits in Hamilton-Jacobi equations*. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 31. N°2, 723-748, 1990.
- [20] Raviart P.A., Thomas J.M., *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*, Mason, Paris, 1988.
- [21] Soner H.M., *Optimal Control with State-Space Constraint I*. SIAM J. Control and Optim., Vol. 24, N°3, pp. 551-561, 1986.
- [22] Varadhan S.R.S., *Large deviations and applications*, SIAM, Philadelphia, 1984.