

PROCEDIMIENTOS PARA LA GENERACION DE MALLAS TRIDIMENSIONALES DE ELEMENTOS FINITOS

Véneré Marcelo Javier
Centro Atómico Bariloche - CNEA

RESUMEN

En el presente trabajo se presenta un sistema computacional orientado a la generación de mallas no estructuradas para geometrías tridimensionales de gran complejidad. Se describe con cierto detalle las distintas etapas en el proceso de generación: descripción de la geometría utilizando un sistema de CAD, especificación de la discretización deseada, generación de la malla de superficie, generación de la malla de volumen, y aplicación de procesos para mejorar la malla obtenida. En cada caso se presentan brevemente las técnicas utilizadas y se mencionan los pros y contras de las mismas. Finalmente se discuten diferentes posibilidades de utilizar técnicas adaptivas que permitan reducir o evitar el costo de realizar una nueva discretización.

ABSTRACT

In this work a computational system for the construction of non-structured finite element meshes for three dimensional domains is presented. The different steps involved in the process are described including: geometry description using a standard CAD system, specification of the desired discretization, surface and volume mesh generation and the application of some mesh-improvement methods. Finally, a discussion on different approaches for the use of adaptive techniques are included.

INTRODUCCION

El modelado numérico se está transformando en una herramienta imprescindible en varias áreas de la ingeniería, sin embargo el empleo de las mismas sigue siendo bastante técnico y requiere de usuarios con cierto grado de especialización, en particular en aquellas situaciones que no pueden reducirse a problemas uni- o bi-dimensionales. El principal obstáculo en estos casos suele ser la etapa de discretización de la geometría que se ha transformado en un verdadero cuello de botella para aquellos que precisan realizar modelados numéricos en problemas tridimensionales de interés tecnológico.

Estos hechos han sido sin duda los impulsores de los recientes desarrollos en las áreas de generación automática de mallas no estructuradas por un lado y adaptividad por el otro. Gracias a las primeras se han ampliado notablemente las posibilidades de generación en geometrías complejas y se disminuyó en igual medida el esfuerzo para obtener una primera malla. Las técnicas adaptivas en cambio, permiten automatizar la detección de zonas de la malla en las que la discretización es inadecuada y la corrigen, evitando que el usuario tenga que regenerarla.

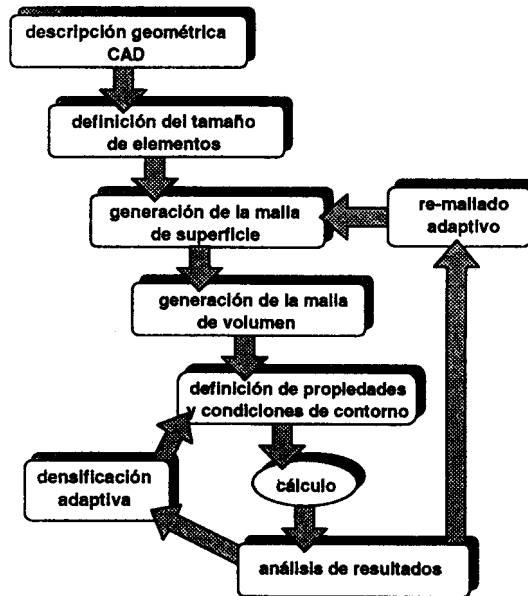


Figura 1: Etapas en el proceso de modelado numérico

En la figura 1 se muestra en rasgos generales las distintas etapas presentes en un modelado numérico. El proceso comienza con la descripción geométrica del modelo, la cual normalmente se realiza utilizando un sistema de CAD (*Computer Aided Design*). Luego se define la discretización y se genera la malla de elementos finitos. Si se utiliza algún método de generación automática de mallas no estructuradas, esta etapa suele estar dividida en dos partes: la generación de la superficie por un lado y del volumen por el otro. A continuación se definen las propiedades y condiciones de contorno y posteriormente se realiza el cálculo. Finalmente se analizan los resultados y se verifica que la solución halla convergido. En caso contrario será necesario re-definir la discretización, preferentemente en forma adaptiva.

En el presente trabajo presentamos un sistema computacional que permite realizar, con distinto grado de automatización, tanto la preparación inicial de datos como el ajuste de la discretización mediante un proceso adaptivo. En primer lugar se describe con cierto detalle la serie de pasos que deben darse para obtener una discretización inicial del modelo, incluyéndose los problemas y dificultades más frecuentes que aparecen en este proceso. Las técnicas de generación empleadas han sido presentadas en forma breve incluyéndose las referencias para el caso de que el lector quiera información más detallada. A continuación se incluyen algunos ejemplos que corresponden a la resolución de diferentes problemas de aplicación. Finalmente se discuten distintas posibilidades de emplear técnicas adaptivas y se presenta un ejemplo donde se utilizó un método de densificación local.

DESCRIPCION DE LA GEOMETRIA.

El primer paso que debe darse en el proceso de generación de mallas, es introducir en alguna forma la descripción de la geometría. Afortunadamente es cada vez más frecuente el empleo de sistemas de CAD entre los diseñadores de componentes, por lo que es muy probable que el usuario de métodos numéricos reciba buena parte de este trabajo ya hecho. Sin embargo sólo muy excepcionalmente los recibirá en la forma precisa como los requiere su sistema de generación de mallas, ya que el diseñador sólo está interesado en obtener una imagen de su modelo y no se preocupa por remover las partes que no pertenecen a la pieza pero que no se ven, o mantener compatibilidad entre la cantidad de segmentos utilizados para describir dos superficies adyacentes, o incluso que no exista un contacto preciso entre las mismas (ver figura 2). En nuestra experiencia particular estos problemas los resolvemos desde dentro del sistema de CAD y suele ser el trabajo que requiere mayores esfuerzos por parte del usuario. Sin duda crear herramientas que permitan

automatizar esta etapa es una tarea de gran importancia en el desarrollo de todo sistema de generación de mallas tridimensionales.

Existen dos formas bien diferenciadas de trabajar con objetos tridimensionales en un sistema de CAD: a través del modelado de sólidos o del modelado de superficies. En el primer caso se trabaja con una biblioteca de sólidos simples (esfera, cono, caja, cilindro, etc.) y pueden realizarse todo tipo de operaciones booleanas con los mismos. Si bien la gran mayoría de los componentes mecánicos pueden construirse de esta forma, existen casos en que esta metodología no puede aplicarse (vehículos aerodinámicos por ejemplo). Las principales ventajas de la misma son la simplicidad con que se define la geometría y la facilidad para automatizar la interfaz con el sistema de generación de mallas. Por el otro lado, el modelado con superficies permite una completa generalidad en la geometría a construir, pero exige una precisa descripción de cada pedazo (*patch*) de la superficie, lo que en muchos casos puede resultar muy engorroso. Un buen ejemplo de ello puede verse en la figura 3: con el modelado de sólidos solo fue necesario definir los dos cilindros y hacer una unión de los mismos, en cambio con el modelado de superficies hay que definir cinco *patches*, dos de los cuales tienen un lado muy difícil de determinar (la intersección).

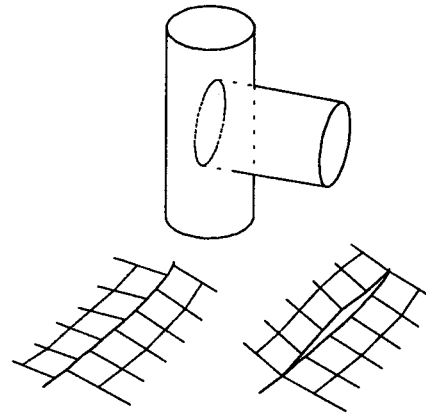


Figura 2: Problemas frecuentes en la descripción geométrica proveniente de un sistema de CAD

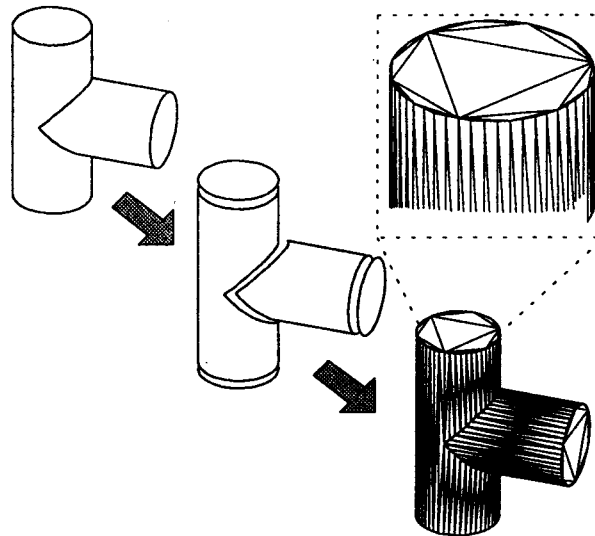


Figura 3: Descripción correcta de la geometría

Independientemente de la forma en que se haya generado la geometría, la información que un sistema de CAD puede entregar como dato para el generador de mallas de superficie es por un lado el conjunto de *patches*, cada uno de los cuales es descrito como una grilla de $M \times N$ o directamente como una triangulación, y por el otro las curvas de intersección de estos *patches*. En nuestro caso, el generador de mallas requiere que la frontera entre los *patches* no presente discontinuidades (ver ampliación en la figura 3), es decir que no deben quedar vértices sobre lados de elementos. En esta forma no es preciso que el CAD de la información de las curvas intersección, pero se introduce una exigencia mayor a esta etapa ya que cada *patch* debe terminar donde comienza el otro.

ESPECIFICACION DEL TAMANO DE LOS ELEMENTOS

Al generar una malla de elementos finitos, ya sea de superficie o de volumen, es preciso especificar el tamaño de los elementos en cada punto del espacio. La metodología más aceptada para ello es definir una función *diámetro del elemento* $h(x,y,z)$ en un número finito de puntos y extenderla a todo el dominio mediante interpolación.

Para realizar esta interpolación utilizamos el método sugerido en [1]. La idea es en primer lugar generar la malla Delaunay del conjunto de puntos en que se especificó la función $h(x,y,z)$, la que deberá incluir estrictamente al dominio de interés (normalmente será necesario agregar ocho puntos que sean vértices de una caja que englobe al dominio). Una vez disponible esta *malla base*, para calcular el valor de la función h en un punto arbitrario se busca cual es el tetraedro que contiene al punto en cuestión y se interpola linealmente dentro del mismo.

Este procedimiento resulta especialmente adecuado para hacer re-mallados adaptivos. En estos casos en base a un indicador del error en cada elemento se puede calcular un tamaño deseado h_e y adjudicarlo al centroide del elemento; la *malla base* que se genera con estos puntos tendrá entonces tantos nodos como elementos tenga la red original. En estas situaciones es importante que la búsqueda del tetraedro que contiene al punto sea muy eficiente, siendo inaceptable una búsqueda secuencial sobre todos los elementos de la malla (costo $O(N)$ por búsqueda). Dado que la malla base es convexa por construcción, es posible realizar una búsqueda direccional (ver [2]) reduciendo el costo a $O(N^{1/3})$. En nuestra implementación obtuvimos tiempos de búsqueda prácticamente constantes (rigurosamente el costo computacional es $O(\log(N))$), independientemente del tamaño de la malla base, gracias a una clasificación con un *oc-tree* de dicha malla (ver [2]).

GENERACION DE LA MALLA DE SUPERFICIE

Como se mencionó en el punto 2, con un sistema de CAD puede generarse la descripción de la geometría en forma de una serie de *patches* triangularizados. La unión de los mismos es una triangulación válida de la superficie del dominio que en teoría podría utilizarse para un cálculo o como punto de partida para generar una malla de volumen. Sin embargo, como puede verse en el ejemplo de la figura 3 o en el de la figura 5, esto en la práctica no es aplicable. Los dos problemas que se presentan son la inadecuada discretización que no se ajusta a la función *diámetro del elemento* $h(x,y,z)$ especificada y a la inaceptable calidad de los elementos.

Para transformar esa malla en una que se ajuste a los requerimientos del método de elementos finitos como la que se muestra en la figura 5, utilizamos la técnica presentada en [3]. La misma esta basada en tres tipos de modificaciones locales:

1. Inserción de nodos dividiendo las aristas de elementos con tamaño mayor que el especificado ($h(x,y,z)$).
2. Colapso de las aristas con tamaño mucho menor que el especificado. Se remueven en esta forma dos nodos y dos elementos y se agrega un nuevo nodo.
3. Cambio de diagonales entre triángulos vecinos en los casos que resulta posible y conveniente.

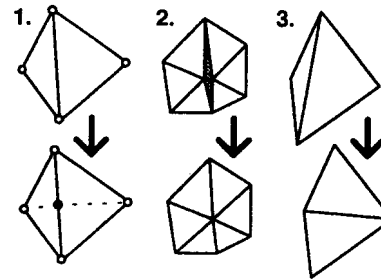


Figura 4: Modificaciones locales para transformar la triangulación

Con la primera operación se consigue agregar nodos en las zonas poco densificadas, mientras que la segunda es la operación inversa. El cambio de diagonales se utiliza para optimizar la calidad de los elementos.

Debido a que se está trabajando sobre una superficie y no sobre un plano, es necesario tomar una serie de consideraciones adicionales para evitar modificaciones inaceptables de la geometría. Por un lado se debe restringir el cambio de diagonales a los casos en que los dos triángulos son pseudo-coplanares, y por el otro, al generarse un nuevo nodo, el mismo debe ser proyectado sobre la superficie original del dominio.

Esta técnica está obviamente restringida a elementos del tipo triangulares y produce en general mallas no-estructuradas. Gracias a ello permite obtener discretizaciones con fuertes diferencias de densificación garantizando buena calidad de elementos (observese el ejemplo de la figura 5), lo que la hace apta para su utilización en un contexto adaptivo. Otro atractivo de este método es su bajo costo computacional que permite trabajar en forma interactiva aun en equipos tipo PC.

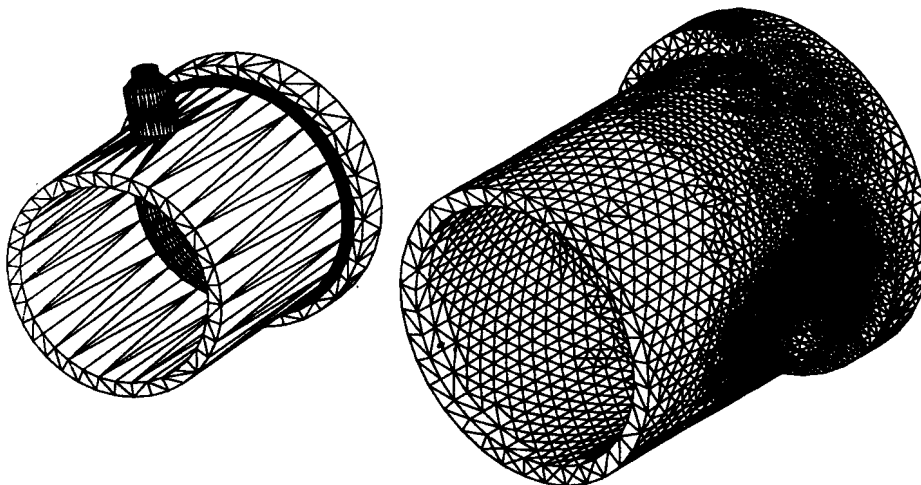


Figura 5: Descripción de la geometría y malla de elementos finitos para un recipiente de presión.

GENERACION DE LA MALLA DE VOLUMEN

Existe en la actualidad varios métodos para la generación automática de mallas tridimensionales no estructuradas. Ajustandonos a lo que puede verse en la literatura, los que se presentan como más exitosos son los basados en teselaciones Delaunay (ver [4], [5] y [6], el método Frontal (ver [7], [8], [9] y [10]) y los de oc-trees modificados (ver [11]). Realizar una descripción precisa de los mismos sería demasiado extenso, por ello solo incluimos aquí algunas de nuestras experiencias con los dos primeros y discutimos los problemas que se presentan cuando se trabaja en geometrías complejas o con mallas grandes (centenas de miles de elementos).

En general estas técnicas requieren como única información de entrada la especificación del tamaño de elemento deseado en todo punto del espacio y una triangulación de la superficie de la pieza (ésta debe estar formada por triángulos de buena calidad y que se ajusten al tamaño de elemento especificado). A partir de ésta, se genera la discretización del volumen sin intervención del usuario.

El método Delaunay es posiblemente el más utilizado para generar mallas tridimensionales. En general se recurre al algoritmo propuesto simultaneamente por Watson y Bower en el año 1981, para obtener la teselación Delaunay de un conjunto de puntos dado. Estos puntos pueden ser generados a medida que se los incorpora a la malla o en un paso previo. En nuestra implementación se utilizó esta último método (la descripción detallada del mismo puede verse en [12]). Una vez generada esta teselación es preciso recuperar la frontera del dominio, ya que la triangulación original de la superficie no necesariamente existirá como caras de los tetraedros generados. Este es el punto más delicado de este método ya que generalmente produce algunos elementos de muy mala calidad sobre la frontera. Este algoritmo tiene un costo computacional relativamente bajo, pudiendo generar mallas de centenas de miles de elementos en pocos minutos de un workstation tipo SUN IPX.

En lo que respecta al método Frontal, su principal virtud es la forma natural de generar los puntos interiores, lo que no solo permite obtener mejores discretizaciones sino también la posibilidad de utilizar *stretching*, es decir un estiramiento de los elementos en una dada dirección. Esto resulta especialmente atractivo en problemas con discontinuidades como aquellos en que aparecen ondas de choque. Por otro lado, este método tiene un costo computacional importante y su implementación de forma de obtener un costo $O(N)$ resulta muy compleja. En [13] se describe este algoritmo y se analizan algunos problemas que deben tenerse en cuenta para obtener una implementación robusta.

PROCEDIMIENTOS PARA MEJORAR LA CALIDAD DE LA MALLA

Una falencia común a todos los métodos de generación de mallas tridimensionales es el producir algunos elementos muy distorsionados, llegando incluso a volumen nulo o negativo. Si bien estos pueden ser muy pocos, aceptarlos en la malla va a deteriorar el condicionamiento del sistema de ecuaciones resultante. Es preciso por ello realizar una especie de pos-procesamiento a las mallas obtenidas con los métodos mencionados en el punto anterior. En nuestro caso hemos utilizado dos procesos diferentes: movimiento de los nodos libres y cambios de estructura de la malla.

En el primer caso, los nodos libres (en general todos los interiores) son desplazados de forma de optimizar una cierta función calidad de los tetraedros que concurren al mismo. en este proceso se debe introducir la restricción de que al mover el nodo no se produce ninguna superposición de volumen, o mejor aun, mover el nodo solo si la nueva configuración es una mejor situación que la

anterior. En esta forma la nueva malla que se obtiene siempre será mejor que la original. este método se describe en detalle en [14].

En el segundo caso se analizan una serie de cambios de estructura y si son convenientes (la calidad de los nuevos elementos es mejor que la de los originales) se los realiza. El equivalente en 2D a este proceso sería el cambio de diagonales entre triángulos vecinos.

Ambos métodos en combinación producen excelentes resultados, por lo que ya forman parte casi obligatoria en nuestro proceso de generación de mallas.

EJEMPLOS

Incluimos a continuación algunos ejemplos que permiten dar una idea de las posibilidades de este sistema para generar una primera discretización.

Ejemplo 1: Boquilla y tapa de recipiente de presión (figura 5)

En este ejemplo se muestra un recipiente sometido a presión interna que corresponde a un componente de la Planta Industrial de Agua Pesada Arroyito (PIAP) de la CNEA-Argentina. En este caso interesaba realizar un análisis del estado de tensiones entre la boquilla y la tapa, por lo que se realizó una densificación elevada en esa zona. La malla de volumen fue generada con el método Frontal y contiene 69105 tetraedros y 18049 nodos.

Ejemplo 2: Tapa de recipiente de presión

Este es otro ejemplo de una malla para realizar un análisis tridimensional del estado de tensiones en un recipiente de presión. En este caso se trata de la tapa de una torre que tiene una serie de orificios no simétricos y también pertenece a la PIAP. En la figura 6 se muestra la superficie de la malla generada incluyendo una vista del interior del dominio, y un corte de la malla de volumen. La misma fue generada con el método Frontal y tiene 120401 tetraedros y 27385 nodos. El peor ángulo entre caras tiene 166° y entre aristas 148° . Los ángulos mínimos son de 10°

Ejemplo 3: Configuración de velas en un velero de competición

En este caso se deseaba estudiar las prestaciones de diferentes configuraciones de velas en un velero de competición. La figura 7 muestra la malla de superficie generada para una de estas configuraciones. La malla de volumen fue construida con la técnica Delaunay y está formada por 22953 nodos y 127743 tetraedros. El peor ángulo entre caras tiene 176° y entre aristas 170° .

Ejemplo 4: Quilla de un velero de competición.

La figura 8 muestra la malla de superficie de la quilla del velero del ejemplo anterior. Este caso presentaba el condicionamiento de definir correctamente el borde de ataque debiendo mantenerse el número de elementos en el orden de 250000. Se utilizó también la técnica Delaunay obteniéndose una malla con 256675 tetraedros y 48276 nodos. Los peores ángulos entre caras y aristas fueron de 168° y 160° respectivamente.

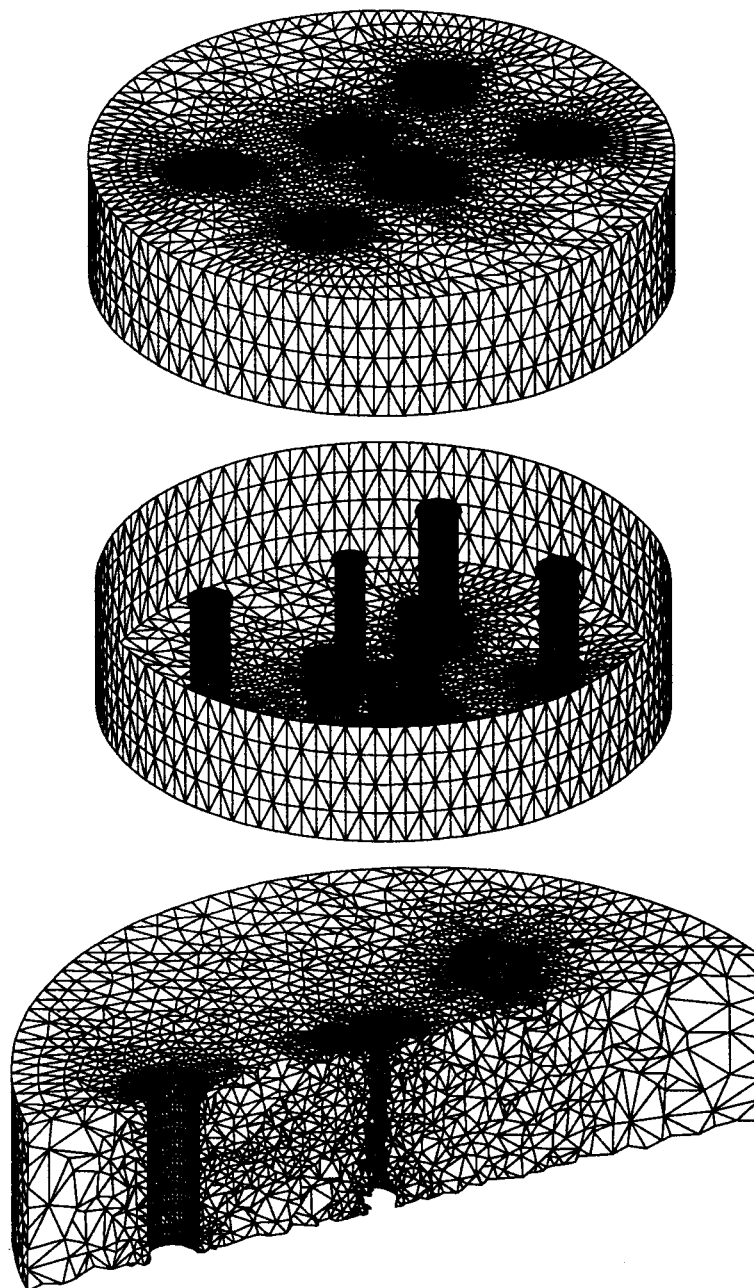


Figura 6: Malla correspondiente a la tapa de un recipiente de presión

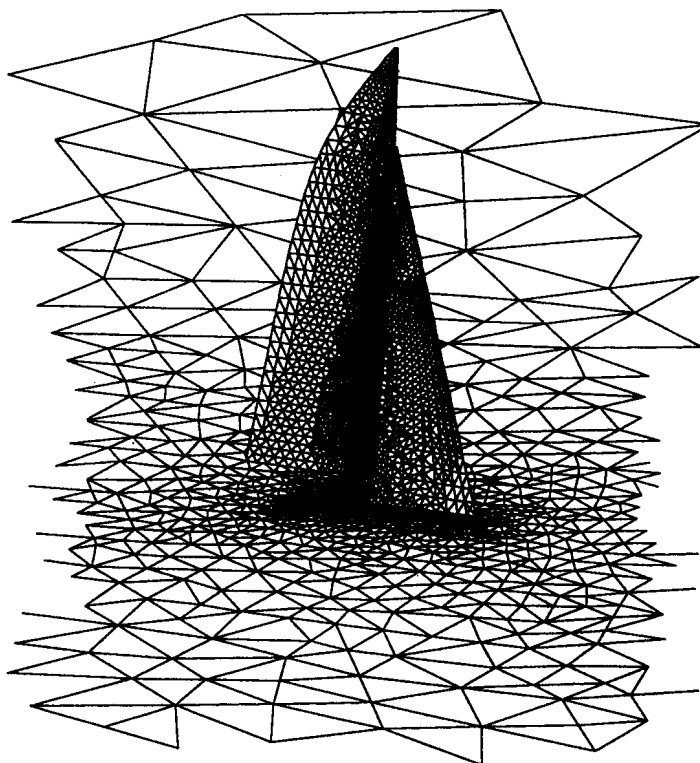
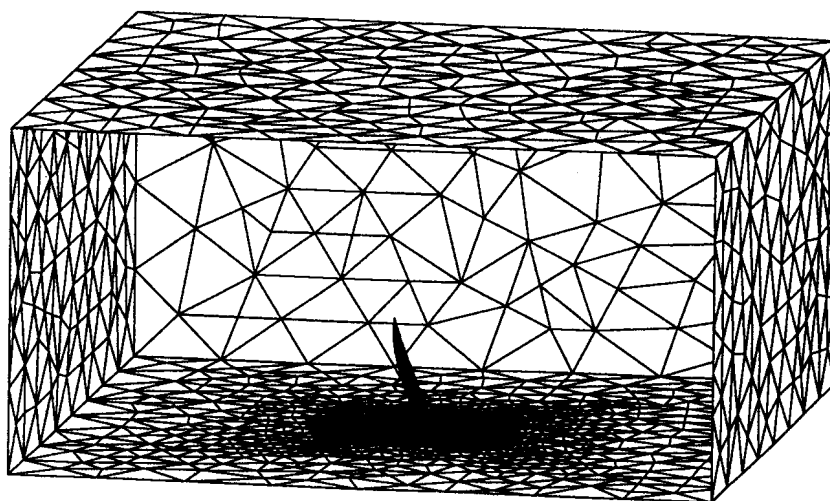


Figura 7: Configuración de velas de un velero de competición

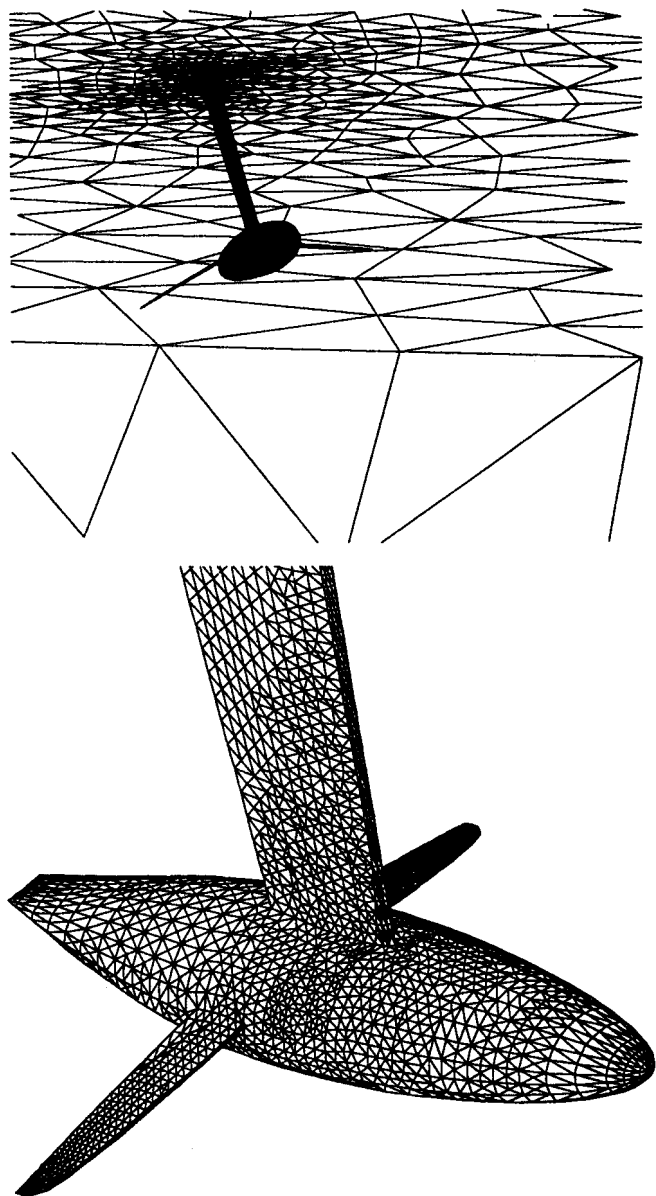


Figura 8: Quilla de un velero de competición. Malla de la superficie

PROCESOS ADAPTIVOS

Una vez hecho el cálculo se debe realizar un análisis de la solución para verificar que la misma haya convergido, en caso contrario será necesario realizar un nuevo cálculo con otra discretización. Para poder realizar este análisis en forma automática, es preciso contar con un estimador de error que nos indique cuales elementos son demasiado grandes y cuales demasiado pequeños. Una vez que se dispone de este indicador del error, la nueva discretización puede hacerse en dos formas bien diferenciadas (ver figura 1): a) re-generación de la malla, o b) modificación de la malla ya generada.

En el primer caso, la malla ya generada se descarta y se comienza el proceso nuevamente desde la etapa de generación de la malla de superficie, pero ahora en lugar de especificar el tamaño de los elementos manualmente se utiliza el indicador de error. En general basta con una o dos iteraciones de este proceso para obtener la discretización adecuada para el problema.

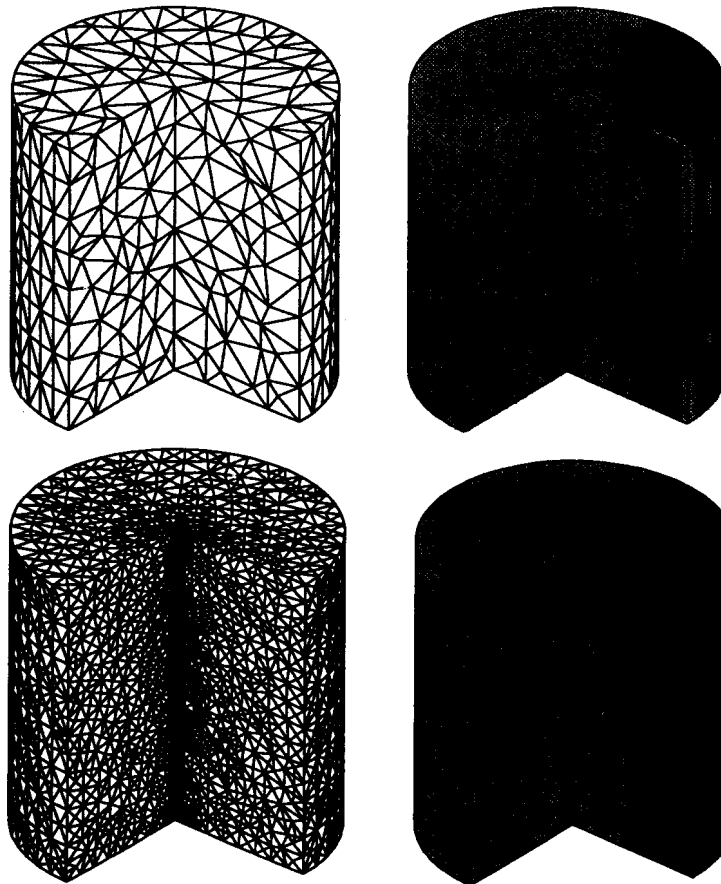


Figura 7: Generación adaptiva mediante división de elementos

En el segundo caso existen dos alternativas: desplazamiento de los nodos interiores y inserción de nuevos nodos y elementos. La primera opción suele estar limitada a desplazamientos relativamente pequeños ya que de lo contrario se producen elementos con volumen negativo. Con la segunda en cambio, hemos obtenido resultados muy alentadores. Este método está basado en el agregado de nuevos nodos mediante la división de elementos por su arista más larga: En primer lugar se dividen en esta forma aquellos elementos que el estimador de error indicó como demasiado grandes. Con ello es posible que queden elementos con nodos en el medio de sus aristas (los vecinos a los divididos). Para eliminarlos, en segundo lugar se dividen también por su arista más larga a aquellos elementos no-conformes. Este último proceso se repite hasta que no quede ningún elemento de este tipo.

Este algoritmo permite generar nuevas mallas cada vez más densificadas con un costo computacional muy bajo, y en nuestra experiencia no deteriora sensiblemente la calidad de los elementos. Implementando una interfaz que permita reubicar las propiedades materiales y condiciones de contorno, es posible realizar el proceso de densificación adaptiva en forma totalmente automática. En la figura 7 se muestra un ejemplo donde se desaba determinar que zonas estaban en tracción y cuales en compresión. Para obtener una buena convergencia de la solución se realizaron diez procesos de este tipo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es en realidad producto del esfuerzo de un equipo en el que han participado tanto investigadores de la Div. Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche, CNEA-Argentina, como del Laboratorio Nacional de Computación Científica (LNCC) del CNPq-Brasil. Fue de fundamental importancia para ello el soporte recibido por CONICET a través del PID-BID N° 40, del Convenio Bilateral entre CNPq-Brasil y CONICET-Argentina, "Proyecto Argentino-Brasileño en Mecánica Computacional", y del RAHE-Brasil a través del proyecto RIP-PROCOM.

BIBLIOGRAFIA

1. Dari E.A., Vénere M.J., "Visualización de campos en 2D y 3D a partir de su valor en un número finito de puntos". Congreso de la AATN, Buenos Aires, (1990).
2. Dari E.A., Vénere M.J., "Algoritmos Eficientes para la Búsqueda del Elemento de una Red que Contiene un Punto Dado". *Mecánica Computacional*, Vol.10, 455-464, (1990).
3. Vénere M.J., Arnica D., "Surface Finite Element Mesh Generation", Presented at 4th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics. England (1994).
4. Baker T.J., "Tree Dimensional Mesh Generation by Triangulation of Arbitrary Points Sets", Proceedings AIAA 8th Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, HI, AIAA paper 87-1124, (1987).
5. Baker T.J., "Developments and Trends in Three Dimensional Mesh Generation", *Applied Numerical Mathematics*, Vol 5, pags 275-304, (1989).
6. Vénere M.J., Dari E.A., "Análisis comparativo de algoritmos para obtener triangulaciones Delaunay". *Mecánica Computacional*, Vol.10, pags. 491-506, (1990).

7. Lo, S.H., "A new Mesh Generation Scheme for Arbitrary planar domains", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, págs. 1403-1426, (1985).
8. Peraire J., Vahdati M., Morgan K., Zienkiewicz O.C., "Adaptive remeshing for compressible flow computations.", *Journal of Comp. Physics*, Vol.72, págs. 449-466, (1987).
9. Peraire J., Peiró J., "Adaptive Remeshing for Three-Dimensional Compressible Flow Computations", *Journal of Comp. Physics*, Vol 103, (1991).
10. Peiró J., "A finite element procedure for the solution of the Euler equations on unstructured meshes", Ph.D.Thesis, Dept. Civil Eng., Univ. College of Swansea, (1989).
11. Schroeder W.J., Shephard M.S., "A combined octree/Delaunay method for fully automatic 3D mesh generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 29, págs. 37-55, (1990).
12. Dari E.A., Vénere M.J., "A node placement method for 2D automatic mesh generation", *Latin American Research*, Vol 21, págs. 275-282, (1991).
13. Dari E.A., Vénere M.J., "Generación de mallas tridimensionales de elementos finitos utilizando el método Frontal". *Mecánica Computacional*, Vol.14, (1994).
14. Dari E.A., Buscaglia G., "Mesh Optimization: How to obtain good unstructured 3D finite element meshes with not so good mesh generators", to be published in *J. of Structural Optimization*.