Mecánica Computacional Volúmen XIII
Compilado por M. Vénere
Bariloche, setiembre de 1992

ADAPTE: ESTIMADOR DE ERRO PARA PROBLEMAS PLANOS EM ELASTICIDADE LINEAR

E.A. FANCELLO(*) e R.A. FEIJÓO (**)

(*) COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro C.P. 68503, Rio de Janeiro, Brasil
(**) Laboratório Nacional de Computação Científica, Lauro Müller 455, Rio de Janeiro, 22290, Brasil

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho a implementação de um programa para estimar o erro de aproximação e preparar dados para geração adaptativa de malhas em estados planos de elasticidade linear, quando são utilizados elementos triangulares isoparamétricos de 3 e 6 nós. Mostra-se a teoria associada à estimativa de erro e à previsão das características da nova malha. Também se mostram os princípios básicos do gerador automático, a junção deste com o estimador de erro e, finalmente, algumas malhas como exemplo do processo adaptativo.

1. INTRODUÇÃO

Muitos esforços têm sido dedicados à automatização de processos de projeto envolvedo análise numérica por elementos finitos, com o objetivo final de diminuir as exigências de conhecimentos prévios sobre o problema analisado e de experiência do analisador ou projetista. O grau de automatização destes processos foi aumentando progressivamente na medida em que foi evoluindo o desenvolvimento em áreas tais como teoria de otimização , análise de sensibilidade, geração automática de malhas, estimativa de erro, visualização de resultados, etc. O assunto que aqui tratamos corresponde à junção de dois dos itens acima mencionados: Estimativa de erro e geração automática de malhas, ambos orientados à geração adaptativa.

Mediante geração adaptativa pretende-se fornecer malhas de elementos finitos adequadas ao problema em estudo, no sentido que o erro cometido na aproximação seja uniforme e não superior a um valor solicitado. Este tipo de adaptação compreende processos conhecidos na literatura como tipo "h", nos quais, a partir de uma análise e, mediante a estimativa do erro cometido na aproximação , se faz uma previsão do novo tamanho de elemento a ser utilizado para ajustar a solução a um valor admissível.

Seguindo a linha proposta por Zienkiewickz e Zhu, (1987) foi implementado neste trabalho um programa para estimar o erro de aproximação e predizer um novo formato da malha de forma a obter uniformidade do erro.

Esto novo formato da malha previsto é fornecida pelo programa mediante valores (novo tamanho de elemento) associados aos nós da malha analisada.

A partir desta informação e da definição da geometria do problema, gera-se uma nova malha utilizando o gerador automático ARANHA (Fancello et.al., 1990, 1991).

O código implementado, denominado ADAPTE, permite a estimativa do erro de problemas planos em elasticidade, utilizando elementos isoparamétricos triangulares de 3 e 6 nós. Foi programado de forma tal que seu uso seja independiente do analizador utilizado, sendo fornecidos através de arquivo em formato livre, coordenadas, incidência e tensões elementares, além de alguns parâmetros como tipo de elemento, tipo de problema (tensão plana, deformação plana, axisimétrico), etc.

A seguir mostraremos a técnica utilizada para estimar o erro e os critérios de previsão das características da nova malha.

Mostraremos também de forma suscinta os princípios no qual se baseia o gerador automático utilizado e como se efetua a junção entre este e o estimador de erro.

2. ESTIMATIVA DE ERRO

2.1. Teoria de aproximação em problemas planos em elasticidade linear.

Os problemas aqui tratados correspondem a equações variacionais do tipo

$$\begin{aligned} & u \in \mathcal{V} \\ & a(u,w) = l(w) \quad \forall w \in \mathcal{V}, \end{aligned} \tag{1}$$

onde a é uma forma bilinear e coerciva ($\mathcal{V}$-elíptica), propriedades que aseguram existência e unicidade da solução u (teorema de Lax-Milgram). A solução aproximada obtida pelo método dos Elementos Finitos cumpre a igualdade

$$\begin{aligned} & u_h \in \mathcal{V}_h \\ & a(u_h, w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in \mathcal{V}_h, \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\mathcal{V}_h$ é o espaco das funções base da discretização adotada. Considerando que o domínio do problema exato e do problema aproximado coincidem e assumindo que $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ a equação (1) é válida para todo $v_h \in \mathcal{V}_h$. Assim, da diferença entre (1) e (2) temos

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in \mathcal{V}_h. \tag{3}$$

Denominando $e = u - u_h$ o erro cometido pela aproximação , vemos que este valor é ortogonal à aproximação efetuada.

No caso de elasticidade, a forma bilinear a corresponde à operação

$$a(u,w) = \int_\Omega D\nabla u^s \cdot \nabla w^s d\Omega, \tag{4}$$

onde D é o tensor de elasticidade de Green e ∇u^s é o tensor de deformação associado ao problema.

Se considerarmos que devido à relação constitutiva

$$\mathbf{T}(u) = D\nabla u^s, \tag{5}$$

podemos reescrever (4) como segue:

$$a(u, w) = \int_\Omega D^{-1}\mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{T}(w) d\Omega, \tag{6}$$

As propriedades da forma a permitem utilizá-la como uma norma, denominada norma energia:

$$\begin{aligned} \|u\| = (a(u,u))^{1/2} &= (\int_\Omega D\nabla u^s \cdot \nabla u^s d\Omega)^{1/2} \\ &= (\int_\Omega D^{-1}\mathbf{T}(u) \cdot \mathbf{T}(u) d\Omega)^{1/2} \end{aligned} \tag{7}$$

Desta forma, dada a solução exata u, a solução aproximada u_h e as respectivas tensões $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}_h$, temos que:

$$\|u\| = (a(u,u))^{1/2} = (\int_\Omega D^{-1}\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} d\Omega)^{1/2}, \tag{8}$$

$$\|u_h\| = (a(u_h,u_h))^{1/2} = (\int_\Omega D^{-1}\mathbf{T}_h \cdot \mathbf{T}_h d\Omega)^{1/2}, \tag{9}$$

$$\|e\| = (a(u-u_h, u-u_h))^{1/2} = (\int_\Omega D^{-1}(\mathbf{T}-\mathbf{T}_h) \cdot (\mathbf{T}-\mathbf{T}_h) d\Omega)^{1/2}. \tag{10}$$

Naturalmente, a solução exata $(u, \mathbf{T})$ nao é conhecida. Por esta razão, calcula-se uma *estimativa* do erro cometido mediante a utilização de uma tensão $\mathbf{T}^*$ que, sob algum critério, produz uma aproximação melhor de $\mathbf{T}$ que o valor $\mathbf{T}_h$. Este critério será discutido posteriormente.

Assim, a norma estimada do erro cometido está dada por

$$\|e\| = (\int_\Omega D^{-1}(\mathbf{T}^*-\mathbf{T}_h) \cdot (\mathbf{T}^*-\mathbf{T}_h) d\Omega)^{1/2}. \tag{11}$$

Para adimensionalizar os valores das normas, calcula-se o quociente do erro sobre a norma de energia:

$$\eta = \frac{\|e\|}{(\|u_h\|^2 + \|e\|^2)^{1/2}} \tag{12}$$

Este valor indica o erro percentual em termos globais. Porém, um dos objetivos da adaptatividade é garantir uniformidade do erro, isto é, pretende-se que em *todo* elemento da malha o erro não supere um valor pre-estabelecido. Este erro elementar solicitado calcula-se da seguinte forma. Seja η_{ad} a percentagem de erro máxima solicitada (admissível) e e^e_{ad}

o erro elementar máximo admissível. Se todos os elementos da malha posuissem este erro teremos que

$$\eta_{ad} = \frac{(m\|e^e_{ad}\|^2)^{1/2}}{(\|u_h\|^2 + \|e\|^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{m}\|e^e_{ad}\|}{(\|u_h\|^2 + \|e\|^2)^{1/2}}, \tag{13}$$

$$\|e^e_{ad}\| = \eta_{ad}\frac{(\|u_h\|^2 + \|e\|^2)^{1/2}}{\sqrt{m}} \tag{14}$$

onde m é o número de elementos da malha.

Assim, para cada elemento calcula-se a diferença entre o valor de erro estimado na análise e o desejado:

$$\xi^e_0 = \frac{\|e^e\|}{\|e^e_{ad}\|} \tag{15}$$

No trabalho de **Zienkiewicz and Zhu**, (1987), inclui-se um fator empírico de correção do erro estimado que depende do tipo de elemento. Este fator vale $f = 1.3$ para triângulos lineares e $f = 1.4$ para triângulos quadráticos. Assim,

$$\xi^e = \xi^e_0 \cdot f; \tag{16}$$

Antes de apresentar a maneira em que este valor é utilizado para prever uma nova malha, retornamos a uma aspecto importante já mencionado. Um dos pontos chave na estimativa de erro reside no critério utilizado para estabelecer um novo valor de tensão que melhore, em alguma medida, o valor obtido pela aproximação , sem que este cálculo implique un custo equivalente à própria análise.

Um tratamento usual consiste em assumir um campo de tensões proveniente da utilização das mesmas funções de interpolação que as utilizadas para os deslocamentos:

$$\mathbf{T}^* = N\bar{\mathbf{T}}^*. \tag{17}$$

Assim, determinam-se valores nodais $\bar{\mathbf{T}}^*$ tais que produzam o menor valor do seguinte funcional (mínimos quadrados):

$$\mathcal{F}(\bar{\mathbf{T}}^*) = \int_\Omega (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_h)^2 d\Omega. \tag{18}$$

A condição de mínimo é:

$$\int_\Omega (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_h)\cdot N\hat{\mathbf{T}} d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in R^n, \tag{19}$$

ou, equivalentemente a resolução do sistema

$$M\bar{\mathbf{T}}^* = F, \tag{20}$$

onde n é o número de nós e

$$M = \int_\Omega N^T N d\Omega \quad ; \quad F = \int_\Omega N^T \mathbf{T}_h d\Omega. \tag{21}$$

Resolver o sistema assim como apresentado significa violar a restrição sobre o custo numérico do estimador de erro. Uma forma de enfrentar este problema consiste em tomar algum critério para trabalhar com uma matriz de massa diagonal ao invés da matriz consistente M. Vários destes critérios podem ser vistos em **Hughes**, (1987). No presente trabalho é adotada a diagonalização por quadratura nodal, isto é, os pontos de integração são tomados acima dos nós. Desta maneira se produz uma diagonalização automática da matriz de massa no momento que a única função de forma com valor diferente de zero é a propria função do nó em questão, com valor igual à unidade. Assim, temos para cada elemento:

$$\begin{aligned} M_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j d\Omega \\ &= \sum_{p=1}^{Np} \varphi_i(p)\varphi_j(p)W(p) \det J. \end{aligned} \tag{22}$$

dado que o ponto de integração p é um nó do elemento temos que:

$$\begin{aligned} M_{ii}^e &= \sum_{i=1}^{nn} W(i) \det J \\ M_{ij}^e &= 0 \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{23}$$

onde nn é o número de nós do elemento. Analogamente, as forças equivalentes podem ser escritas como:

$$F_i^e = \sum_{i=1}^{nn} \mathbf{T}_h(i)W(i) \det J. \tag{24}$$

No caso dos elementos triangulares lineares, o determinante do Jacobiano é igual a duas vezes a área do elemento. Assim, os elementos da matriz diagonal M são, em cada grau de liberdade correspondente a um nó, proporcionais ao somatório das áreas dos elementos a este nó relacionados. Da mesma forma, os elementos do termo independiente são, em cada grau de liberdade de um nó, proporcionais ao somatório do produto da area pela tensão nodal de cada elemento convergente ao nó.

No caso de elementos triangulares quadráticos, o determinante do Jacobiano não é mais constante no elemento. Porém, se considerarmos que trabalhamos com elementos de boa qualidadade em relação à forma, o mesmo critério de aproximação pode ser adotado.

2.2. Previsão das características do nova malha. Malha de Parâmetros.

Através da equação (15) obteve-se um valor ξ_e, isto é, uma medida da relação entre a exatidão requerida e a obtida no elemento que permitirá estimar uma nova distribuição de tamanhos na malha, necessária para obter um erro uniforme.

Da teoria de erro em elementos finitos é bem conhecido que o erro da aproximação , admitindo ausência de discontinuidades na solução , está acotado segundo a seguinte expressão:

$$\|e\| \leq \alpha h^p \tag{25}$$

onde h é o tamanho do elemento e p a ordem das funcões de interpolação . Caso o problema analisado possua singularidades ou discontinuidades, o expoente p varia (**Zienkiewicz e Zhu**, 1991). Desta forma, escrevemos a expressão elementar da equação (15) como:

$$\xi^e \simeq \frac{\alpha(h^e)^p}{\alpha(h^e_{new})^p} \tag{26}$$

$$\rightarrow h^e_{new} = \frac{h^e}{\xi_e^{1/p}} \tag{27}$$

Destas duas últimas expressões podemos notar que para valores $\xi > 1$, o novo tamanho de elemento previsto h_{new} será menor que o anterior. O contrário acontecerá para valores de $\xi < 1$.

Com o intuito de evitar crescimentos exessivos nos elementos, o que pode ocasionar malhas de baixa qualidade e favorecer a obtenção de valores de erro sempre menores que o admissível, foi introduzido um "amortecimento" no crescimento dos elementos, isto é quando o valor de ξ é menor que 1. Neste caso se faz:

$$\xi := \xi + \frac{(1-\xi)}{2} \tag{28}$$

O elemento, portanto, não crescerá mais que $2^{1/p}$ vezes o seu tamanho por iteração .

Resumindo, cada elemento da malha analisada possui um novo valor de tamanho de elemento previsto, função do erro cometido no mesmo. Transladando estes valores elementares aos nós, mediante uma técnica análoga ao caso das tensões, obtem-se uma função contínua no domínio de análise, definido por valores nodais na malha. Dado um ponto qualquer no domínio, é possível determinar o tamanho teórico previsto de um elemento nesse ponto, através de interpolação dos valores nodais do elemento que contém o ponto. Esta função , que denominamos Malha de Parâmetros, é de fundamental importância para a geração da nova malha. Este é o assunto do item a seguir.

3. DA ESTIMATIVA DO ERRO À NOVA MALHA. GERAÇÃO AUTOMÁTICA.

Na atualidade, abundante é a literatura e os métodos relacionados à geração automática de malhas planas. As técnicas que alcançaram um maior grau de desenvolvimento são as denominadas técnicas de geração não estruturada, devido à facilidade de geração em geometrias complexas. No caso de malhas planas isto consegue-se principalmente utilizando elementos de formato triangular, porém ja se conhecem técnicas não estruturadas com elementos de formato quadrangular (**Zhu** et.al., 1990). Dentro destes métodos, um deles, proposto inicialmente por **Peraire** (1987), é particularmente interesante para os fins de geração adaptiva, devido que as informações básicas que esta técnica precisa são as seguintes:

a) Definição da geometria.
b) Definição das características de forma dos elementos dentro do domínio.

O gerador automáticao ARANHA emprega esta técnica que consiste basicamente nas seguintes operações :

Partindo de entidades geométricas (pontos, retas, arcos de círculo, curvas B-Spline) define-se matemáticamente a geometría do domínio de forma tal a tornar esta independente do tipo de discretização em elementos finitos efetuado.

Por outro lado, a informação sobre as características da malha é dada através da demominada Malha de Parâmetros (M.P.) isto é, uma malha de elementos triangulares lineares que cobre o domínio a discretizar. Sobre os nós desta malha associa-se a informação sobre forma dos elementos a gerar: tamanho propriamente dito e mais dois parâmetros utilizados para obter elementos deformados segundo uma direção dada. Assim, em cada ponto do domínio pode-se obter esta informação mediante interpolação .

Com estes dados, a geração se produz da seguinte maneira: De acordo com a informação da M.P., discretiza-se o contorno do domínio, formando o que se denomina um "front" de geração : conjunto de segmentos orientados (nó inicial - nó final). A partir deste momento, escolhe-se um destes segmentos e, gera-se um triângulo com tamanho e forma segundo os valores da M.P. no lugar. Gerado o triângulo, se atualiza o "front", e se escolhe outro segmento deste para repetir o ciclo. Este processo finaliza quando o "front" (que separa a parte já triangularizada da não triangularizada), transforma-se num conjunto vazio.

No item anterior foi obtida justamente a função que o gerador precisa, a M.P., cujos valores nodais foram calculados de forma a obter uma malha adequada ao problema analizado.

O processo adaptativo então, consiste nos seguintes passos:

0. Definição de geometría e Malha de Parâmetros inicial (geralmente com tamanho de elementos uniforme).
1. Geração da malha segundo a M. de P.
2. Análise do problema. Obtenção das tensões aproximadas.
3. Estimativa do erro.
4. Caso o erro estimado seja inferior ao erro admissível, fim do processo. Caso contrário,
5. Atribuição dos valores de tamanho de elemento previsto nos nós da malha analizada e definição desta malha como nova M. de P.
6. Retorna a 1

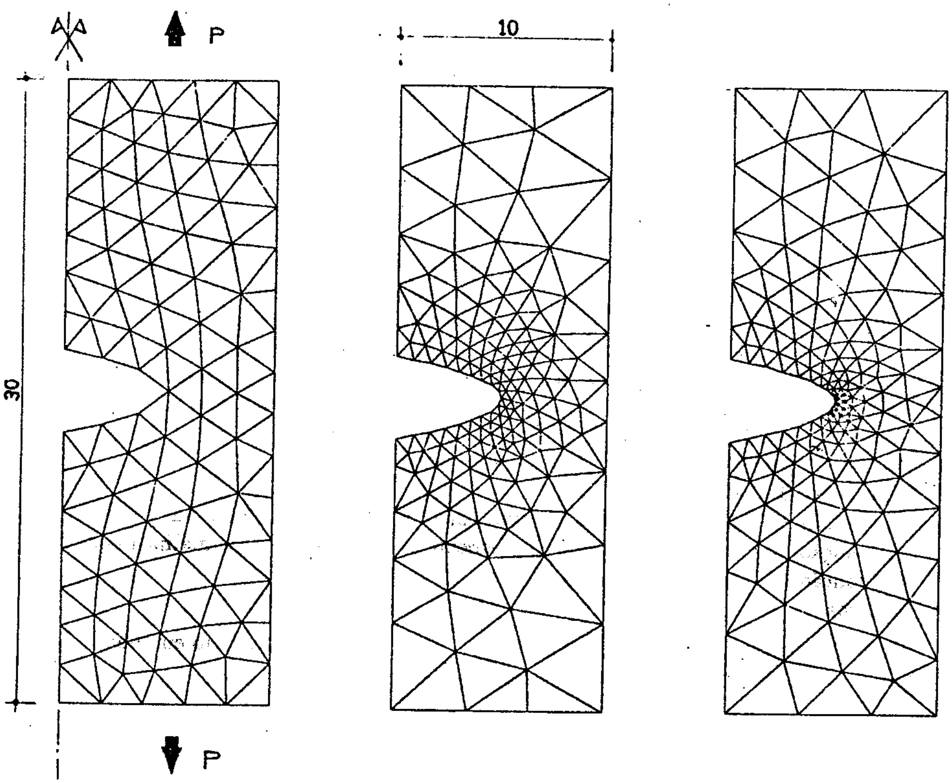
O critério de fim de processo variará segundo as exigências do usuário em relação ao valor do erro. A seguir motramos alguns exemplos numéricos.

4. EXEMPLOS

Tem-se no primeiro exemplo, uma placa de espessura unitária com um furo no meio submetida a tração . Por condição de simetria, analisa-se só a metade da peça. Devido a sua geometría, admite-se a hipótese de estado plano de tensões. Foram utilizados elementos isoparamétricos de três nós.

Apresentamos dois ciclos de adaptatividade a partir de uma malha inicial. Para a análise, utiliza-se o analisador de estados planos do SDP (Sistema para Desenvolvimento de Programas em Elementos Finitos) (SDP, 1991). O programa ADAPTE avalia o erro e fornece ao gerador ARANHA uma nova malha de parâmetros utilizando a malha analisada como base. O erro admissível foi de 15%. Os valores obtidos são sempre inferiores, devido ao limite imposto ao crescimento comentado anteriormente.

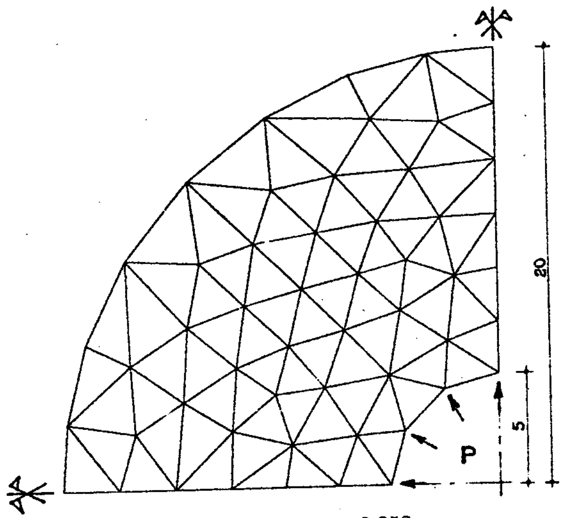
EXEMPLO 1: $\eta_{ad} = 0.15$; $E = 1000.0$; $\nu = 0.3$; $Espessura = 1.0$; $P = 1.0$



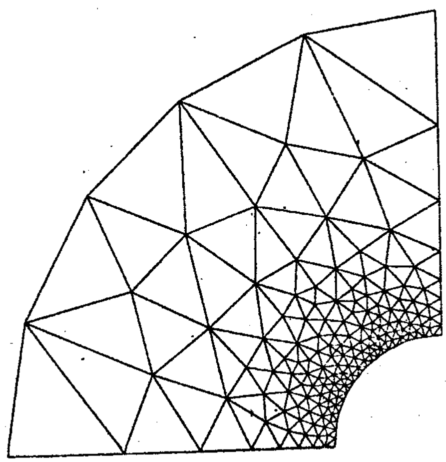
MALHA 0 : $\eta = 0.196$ MALHA 1 : $\eta = 0.129$ MALHA 2 : $\eta = 0.123$

Neste segundo exemplo, se têm um tubo de paredes grossas, submetido a pressão interna. A hipótese de análise é estado plano de deformações . O erro admissível solicitado foi de 15%.

EXEMPLO 2: $\eta_{ad} = 0.15$; $E = 1000.0$; $\nu = 0.3$; $P = 1.0$

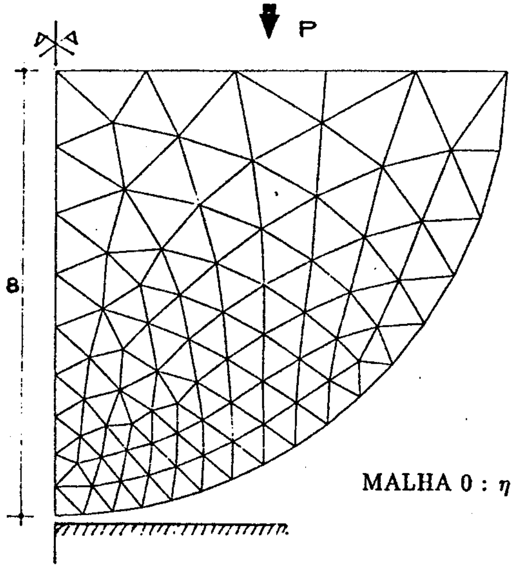


MALHA 0 : $\eta = 0.352$

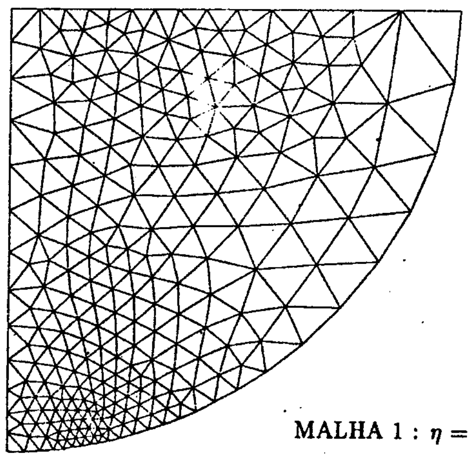


MALHA 1 : $\eta = 0.121$

Neste terceiro exemplo se apresenta um semi-cilindro submetido a um carregamento distribuíido na sua face superior e apoiado sobre uma superfície rígida. Neste exemplo foi necessário uma análise de contato utilizando elementos para estado plano de deformações (**Fancello** et.al, 1990). O erro solicitado foi de 8%.



MALHA 0 : $\eta = 0.129$



MALHA 1 : $\eta = 0.072$

EXEMPLO 2: $\eta_{ad} = 0.08$; $E = 1000.0$; $\nu = 0.3$; $P = 30$

5. CONCLUSÕES

O tipo de adaptativide implementada foi a continuação e ao mesmo tempo consequência das ferramentas de geração automática já desenvolvidas. Este método possui algumas vantages e desvantagens em relação a outras técnicas adaptativas tipo "h" como a inserção de elementos nas regiões onde o erro supera o valor solicitado (**Venere**, 1989).

Como desvantagens temos que o custo de uma geração completa é bem superior ao custo de densificação por "divisão" dos elementos. A divisão da malha original também facilita a utilização de técnicas "multigrid", por não modificar a posição dos nós antigos na nova malha.

Dentre as vantagens, as duas maiores são por um lado, a possibilidade de manter relativamente constante quantidade de graus de liberdade, problema grave na outra técnica onde este número tende a crescer rapidamente. Por outro lado, a aproximação da geometria, no caso de densificação por divisão de elementos, fica sempre vinculada a primeira malha gerada, contrário ao que acontece com a utilização de geradores onde a geometria é uma entidade desvinculada da malha. Esta diferência pode ser decisória, se tomamos como exemplo qualquer um dos três problemas apresentados.

Também devemos ressaltar que o custo relativo da geração dependerá do tipo de análise realizada. A resolução de um sistema não linear como o do último exemplo mostrado justifica amplamente a geração de uma malha completa.

Problemas envolvendo não linearidade material como plasticidade, viscoplasticidade, análise limite, etc., possuem uma relação (Custo Análise / Custo Geração) suficientemente elevada como para estimular o desenvolvimento de estimadores de erro e procedimentos adaptativos segundo a direção apresentada.

Bibliografia

- FANCELLO, E.A., FEIJÓO, R.A., ZOUAIN, N.P., "Formulação Variacional do Problema de Contato com Atrito; Resolução Via Regularização", XI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro, pp 1073-1089, 1990.
- FANCELLO E.A., GUIMARÃES A.C., FEIJÓO R.A., "Aranha - Gerador de Malhas 2-D para Elementos Finitos Triangulares de 3 e 6 Nós.", Anais do XI Congresso Ibero-Latino-Americano em Métodos Numéricos em Engenharia, Vol 2, pp 983-996, 1990.
- FANCELLO E.A., GUIMARÊS A.C., FEIJÓO R.A., VENERE M. "Geração Automática de Malhas 2D em Programação Orientada a Objetos.", XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp 635-638, São Paulo, 1991.
- HUGHES, T.J.R., "The Finite Element Method", Prentice Hall, 1987.
- PERAIRE, J., VAHDATI, K. MORGAN, K. ZIENKIEWICZ, O.C. "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations", Journal of Comp. Physics, 72, 449-466, 1987.
- VENERE, M.J., "Técnicas Adaptivas en Cálculo Numérico para Problemas en 2 y 3 Dimensiones", Anais do Segundo Congresso Franco Chileno e Latinoamericano de Matemáticas Aplicadas", 1989.

- SDP. Sistema de Desenvolvimento de Programas Baseados no Método dos Elementos Finitos. Manuais de Implementação de Rotinas e de Dados, L.N.C.C., Rio de Janeiro, 1991.
- ZHU, J.Z., ZIENKIEWICZ, O.C., HINTON, E. WU, J. "A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation", Int.J.Num.Meth.Eng., Vol 32, 849-866, 1991.
- ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.S., "A simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 24, 337-357, 1987.
- ZIENKIEWICZ, O.C., "Adaptivity and Mesh Generation", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol 32, 783-810, 1991.