

**ANALISIS DE PROBLEMAS DE CONTACTO UTILIZANDO  
GENERACION INTERACTIVA DE MALLAS**

**Marcelo Elgueta V.**  
Departamento de Ingeniería Mecánica

**María Cecilia Rivara Z.**  
Departamento de Ciencias de la Computación

Universidad de Chile  
Casilla 2777, Santiago, Chile

**RESUMEN**

En este trabajo se aplica un algoritmo de refinamiento de mallas interactivo, en la solución de problemas de concentración de esfuerzos. En particular se aplica al problema de contacto sin roce entre cuerpos elásticos. La solución de este problema se basa en una formulación de penalidad, que consiste en minimizar un funcional de contacto, el cual se construye en base a la energía potencial total del sistema y a una energía ficticia que toma en cuenta las condiciones de contacto.

**ABSTRACT**

In this work an interactive mesh refinement algorithm is applicated to the solution of stress concentration problems. In particular, it's applicated to the problem of contact without friction between elastic bodies. The solution of this problem is based on a formulation of penalty, which consists in minimizing a funtional of contact, which is made with the total potential energy of the system and a fictitious energy taking into account the conditions of contact.

**INTRODUCCION**

En problemas de diseño mecánico, especialmente en el caso de elementos mecánicos sometidos a cargas variables en el tiempo, es fundamental conocer la distribución de esfuerzos en torno a discontinuidades geométricas o en torno a las zonas de contacto entre cuerpos elásticos. En el caso de cuerpos de geometrías sencillas y sometidos a cargas simples estos esfuerzos pueden ser calculados analíticamente [1]; sin embargo, para configuraciones más complicadas deben, inevitablemente, emplearse métodos numéricos [2,3].

En este trabajo se emplea el método de los elementos finitos, en un contexto bidimensional, para encontrar una solución numérica tanto del problema de concentración de esfuerzos como del problema de contacto sin roce entre dos cuerpos elásticos.

En los problemas mencionados, la selección de una malla de elementos

finitos es una de las decisiones más importantes en la aplicación y confiabilidad del método, especialmente en el caso en que el gradiente de los esfuerzos sea elevado. En este trabajo se utiliza un ambiente interactivo [4] que permite al usuario emplear su experiencia para construir una malla adecuada y obtener así una solución numérica confiable del problema. En este ambiente se genera una malla inicial la que se refina interactivamente, local y selectivamente, a medida que el usuario se lo solicita al sistema. El refinamiento es entonces dinámico, al contrario de lo que sucede en los sistemas convencionales, donde la discretización es estática, es decir, que no puede ser modificada una vez construida.

En el caso del problema de contacto, la solución se basa en una formulación de penalidad, que consiste en minimizar un funcional de contacto, el cual se construye en base a la energía potencial total del sistema y a una energía ficticia de contacto.

#### REFINAMIENTO INTERACTIVO

El método de los elementos finitos ha llegado a ser una de las técnicas más usadas en la resolución numérica de problemas de la más diversa índole. Sin embargo, la definición de una discretización adecuada del dominio del problema, especialmente en zonas donde se necesita obtener una discretización más fina, constituye aún un trabajo inicial muy laborioso. Es deseable entonces contar con una herramienta eficaz, que facilite esta labor.

Con este propósito se desarrolló un algoritmo de refinamiento para mallas de triángulos. Este algoritmo se basa en dividir los triángulos en cuatro partes, partiendo del lado más largo, como se indica en la figura 1(a). Con el objeto de obtener una triangulación válida, el refinamiento se propaga dividiendo algunos triángulos vecinos, como se muestra en la figura 1(b), donde, al refinar el triángulo inferior, también se refina el triángulo superior.

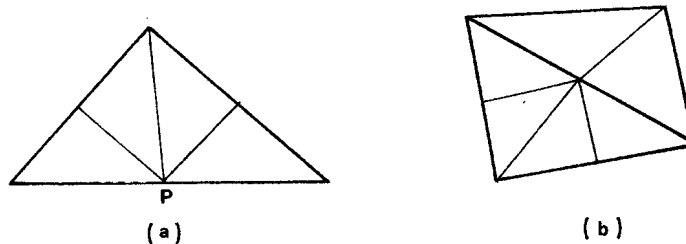


Figura 1. Refinamiento de triángulos

Se demuestra que todas las triangulaciones construidas de esta manera son triangulaciones válidas y suaves (la transición entre triángulos pequeños y grandes no es abrupta) y que los ángulos no degeneran a través del proceso [4].

#### CONTACTO SIN FRICCIÓN

Se consideran dos cuerpos de volúmenes  $V_1$  and  $V_2$ , sometidos a fuerzas de volumen  $F$  y de superficie  $t$  en una zona  $S_c$ . El estado de esfuerzos  $\sigma$  y de deformaciones  $\epsilon$  es el que minimiza el funcional [5]:

$$J = 1/2 \int_V \sigma \epsilon \, dV - \int_V F u \, dV - \int_V t u \, dS_c \quad (1)$$

donde  $u$  es el desplazamiento. Al considerar el contacto entre dos cuerpos, la siguiente restricción debe ser satisfecha:

$$(u_1 - u_2) \cdot n + \beta \geq 0 \quad (2)$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son los desplazamientos en los cuerpos 1 y 2 respectivamente,  $n$  es el vector normal unitario sobre la superficie de contacto y  $\beta$  es la separación inicial entre los dos cuerpos en la dirección de  $n$ .

La aplicación del procedimiento estándar del método de los elementos finitos conduce a colocar la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$J(u) = 1/2 u^T [K] u - u^T f \quad (3)$$

donde  $u$  es el vector de incrementos de los desplazamientos nodales;  $[K]$  es la matriz de rigidez y  $f$  es el vector de fuerzas nodales obtenido a partir de las dos últimas integrales de (1).

Para representar las restricciones de contacto dadas por la relación (2), se consideran dos superficies discretizadas próximas a entrar en contacto, como se muestra en la figura 2.

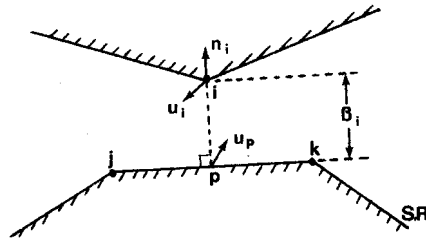


Figura 2. Superficies discretizadas.

Si una de estas superficies se toma como superficie de referencia S.R., se definen las siguientes variables relativas al nodo  $i$ .

- $n_i$  = vector unitario normal a la S.R. en el nodo  $i$ .
- $\beta_i$  = separación inicial entre el nodo  $i$  y la S.R. medida en la dirección de  $n_i$ .
- $u_i$  = desplazamiento del nodo  $i$ .
- $u_j$  = desplazamiento del nodo  $j$ .
- $u_k$  = desplazamiento del nodo  $k$ .
- $P$  = punto de la S.R. más cercano al nodo  $i$ .
- $\alpha_i$  = parámetro posicional adimensional del punto  $P$ .

El desplazamiento del punto  $P$  es interpolado linealmente en función de los desplazamientos de los nodos  $i$  y  $j$ , mediante la expresión

$$u_p = (1 - \alpha_i) u_j - \alpha_i u_k \quad (4)$$

Si inicialmente el nodo  $i$  se encuentra a una distancia  $\beta_i$  de la S.R., la

relación (2) puede expresarse mediante

$$\delta_i = (u_i - u_p) n_i + \beta_i \geq 0 \quad (5)$$

donde  $\delta_i$  es la separación final del nodo  $i$ .

Con el objetivo de desarrollar expresiones adecuadas para una formulación mediante elementos finitos, es conveniente escribir la restricción de contacto (5) en forma vectorial

$$\delta_i = \beta_i + c_i^T u \geq 0 \quad (6)$$

donde  $u$  representa el vector de todos los incrementos de los desplazamientos nodales del sistema. El vector  $c_i$ , denominado vector de contacto en el punto  $i$ , se define como

$$c_i^T = (0, \dots, n_i, 0, \dots, -(1 - \alpha_i)n_i, 0, \dots, -\alpha n_i, 0, \dots, 0) \quad (7)$$

Extendiendo la relación (6) para todos los nodos de contacto y empleando (7) se obtiene la expresión matricial

$$\delta = \beta + C^T u \geq 0 \quad (8)$$

donde los vectores  $\delta$  y  $\beta$  representan las separaciones finales e iniciales de todos los nodos de contacto, respectivamente. La matriz  $C$  denominada "Matriz de Contacto", es de orden  $n \times c$ , donde " $n$ " son todos los grados de libertad del problema y " $c$ " son los nodos de contacto. De esta manera  $C$  se encuentra constituida por los vectores  $c_i$ , mediante la relación:

$$C = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_c] \quad (9)$$

Para resolver el problema planteado se emplea un método de penalidad, que consiste en satisfacer las condiciones de contacto en forma aproximada, minimizando el cuadrado de las separaciones finales de los nodos de contacto. Esta expresión se escribe,

$$I = 1/2 k_n (\delta^T \delta) = 1/2 k_n (C^T + u)^T (C^T + u) \quad (10)$$

donde  $k_n$  es un parámetro de penalidad. Físicamente,  $k_n$  representa la constante de un resorte ficticio, ubicado entre el nodo  $i$  y el punto  $p$  de la figura 2, que actúa como un mecanismo de transferencia de energía entre ambas superficies; de este modo la relación (10) puede ser considerada como un término de energía ficticia

Si se considera el funcional (3), al agregar el término energético (10), el funcional a minimizar estará dado por

$$\pi = J + I \quad (11)$$

Una variación de  $\pi$  con respecto a  $u$  conduce a la relación

$$[K + k_n C C^T] u + f + k_n C \beta = 0 \quad (12)$$

## APLICACIONES

**Placa perforada sometida a tracción.** Un primer ejemplo, relacionado con concentración de esfuerzos, consiste en traccionar una placa que tiene una perforación de 50 mm de radio, como se muestra en la figura 3. La fuerza aplicada es de 400 kg y la sección transversal de la placa es de  $400 \text{ mm}^2$ .

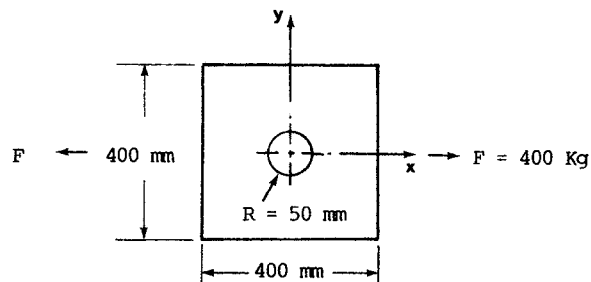


Figura 3. Placa perforada.

Inicialmente se construyó una malla de elementos finitos de 16 nodos. La zona de refinamiento consistió en un cuadrado de  $70 \text{ mm} \times 70 \text{ mm}$ , como se muestra en la figura 4(a). Después de tres refinamientos sucesivos se obtuvo una malla de 181 nodos. Esta malla se muestra en la figura 4(b). Se observa un refinamiento regular y un paso suave desde los triángulos pequeños a los más grandes.

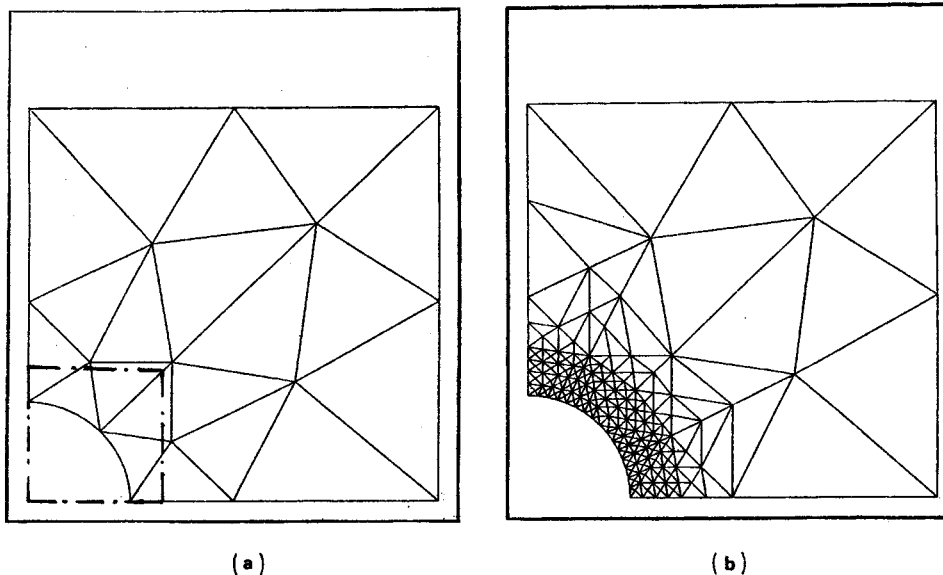


Figura 4 (a) Malla inicial de la placa perforada  
(b) Malla final de la placa perforada.

Con la última malla se calcularon numéricamente los esfuerzos. En la figura 5 se muestra el esfuerzo normal  $\sigma_\theta$  sobre el eje y, en función de la distancia al borde de la perforación. Se observa una excelente correlación entre los valores numéricos y los analíticos. Estos últimos se calculan mediante la relación [1]

$$\sigma_\theta = S/2 (1 + (R/r)^2) - S/2 (1 + 3 (R/r)^4) \cos 2\theta$$

donde S es el esfuerzo nominal y R el radio de la perforación. Para la curva mostrada en la figura 5,  $\theta$  vale  $90^\circ$ .

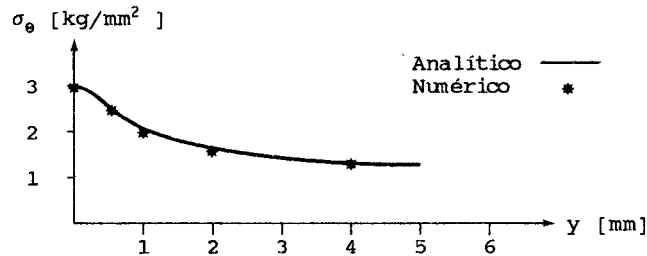


Figura 5. Esfuerzo tangencial.

**Contacto entre cilindro y plano.** Un segundo ejemplo se relaciona con un problema de contacto. Consiste en un cilindro de 70 mm de radio, cargado con una fuerza de 5000 kg sobre un bloque plano rígido, como se esquematiza en la figura 6.

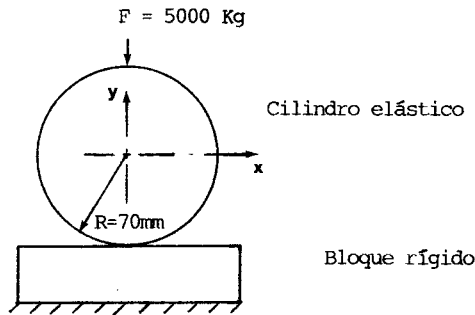


Figura 6. Contacto entre cilindro y plano.

Se construyó una malla inicial de 26 nodos, la que se muestra en la figura 7(a). En la figura 7(b) se muestra una malla obtenida después de tres refinamientos sucesivos. En este caso la zona de refinamiento consistió en un círculo de 30 mm de diámetro con su centro ubicado a 10 mm sobre el punto de contacto. En la figura 7(c) se muestra una malla obtenida con cuatro refinamientos sucesivos a partir de la malla inicial de la figura 7(a), pero con una zona de refinamiento más pequeña. Claramente se observa, en esta última malla, un refinamiento más concentrado.

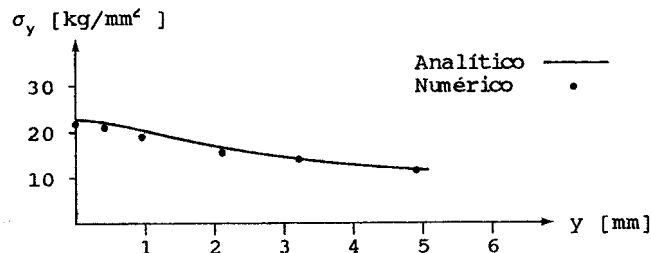


Figura 8. Esfuerzo de compresión

### CONCLUSIONES

Este trabajo muestra que el refinamiento interactivo de mallas constituye una herramienta de apoyo de enorme utilidad para definir la discretización a utilizar en la resolución de un problema numérico. Esta herramienta permite transformar un trabajo laborioso, como es el de definir la discretización en una zona que requiere un elevado grado de refinamiento, en una tarea muy simple. En general, los pasos que se deben seguir son los que se indican a continuación:

- construir una malla inicial basta
- definir la zona que se desea refinar
- refinar hasta obtener una malla adecuada. En esta etapa se puede tanto refinar como desrefinar.
- ejecutar el programa de cálculo
- si el resultado no es satisfactorio se pueden repetir las etapas anteriores.

### AGRADECIMIENTOS

Al Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología, FONDECYT, proyecto 1220/91, por el apoyo brindado.

### REFERENCIAS

- [1] **Timoshenko, S.P. y J. N. Goodier.** Theory of Elasticity. Tokio McGraw-Hill, 1970.
- [2] **Klarbring, A.,** Quadratic Programs in Frictionless Contact Problems. Int. J. Eng. Sci., Vol.24, 1986, págs. 1207-1217.
- [3] **Torstenfelt, B.,** An Automatic Incrementation Technique For Contact Problems With Friction. Comp. & Str. Vol.19, 1984, págs. 393-400.
- [4] **Rivara M.C.** A Grid Generator Based on 4-triangles Conforming Mesh Refinement Algorithms. Int.J. Numer. Methods in Engineering, Vol. 28, 1989, págs. 2889-2906.
- [5] **Hill, R.,** The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1964.