

PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA
DE CASCAS LAMINADAS

Dilze Codá dos Santos Cavalcanti Marques
Departamento de Engenharia Estrutural, Centro de Tecnologia
Universidade Federal de Alagoas, BRASIL

Armando M. Awruch
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC/UFRGS
Av. Osvaldo Aranha, 99 - 90000 - Porto Alegre - RS - BRASIL

SUMÁRIO

Apresenta-se neste trabalho procedimentos para a análise de cascas laminadas em regime pré e pós-crítico utilizando-se o método dos elementos finitos. A formulação empregada tem como base uma descrição Lagrangeana Total. Comparam-se os desempenhos de duas estratégias ("Work Control Method" e "Generalized Displacement Control Method") na solução das equações não lineares de equilíbrio. Através da solução de vários exemplos numéricos demonstra-se a eficiência dos procedimentos apresentados.

ABSTRACT

Finite element procedures for the analysis of laminated shells in the pre and post-critical stages using a Total Lagrangian formulation are presented in this work. The performance of two strategies (Work Control Method and Generalized Displacement Control Method) for the solution of the nonlinear equilibrium equations are compared. Numerical examples are presented to illustrate the efficiency of the proposed techniques.

INTRODUÇÃO

Placas e cascas laminadas são estruturas às quais são destinadas importantes e diversificadas aplicações. Por exemplo, a cada dia cresce a utilização destas estruturas como parte integrante de automóveis, aviões, veículos espaciais e vasos de pressão, entre outras.

Tal fato tem motivado um grande interesse na descrição do comportamento das mesmas sob cargas estáticas e em estágio pré e pós-crítico face aos importantes resultados práticos que do conhecimento deste comportamento podem advir.

Dada a complexidade do assunto, a utilização de métodos numéricos faz-se indispensável, e o método dos elementos finitos tem se mostrado muito útil para tal fim.

Vários modelos de elementos finitos deduzidos com base em diferentes teorias de cascas tem sido empregados na análise não linear destas estruturas e, alternativamente, o uso dos chamados "elementos tridimensionais degenerados de cascas" [1] tem sido muito difundido por várias razões, entre as quais destacam-se a simplicidade e generalidade por eles apresentadas.

No contexto do estabelecimento das equações não lineares de equilíbrio,

tem sido muito empregadas as formulações incrementais Lagrangeana Total e Lagrangeana Atualizada.

Diferentes procedimentos numéricos para a solução destas equações encontram-se divulgados na literatura [2]. Entre estes o método do comprimento de arco constante [3] tem recebido relevante destaque.

No presente trabalho, utilizando-se elementos finitos tridimensionais degenerados de cascas junto com uma formulação Lagrangeana Total investiga-se o comportamento pré e pós-flambagem de placas e cascas laminadas. Utilizando-se ainda este mesmo tipo de elemento e adequadas transformações de coordenadas, o comportamento de estruturas dotadas de enrijecedores excêntricos é também investigado.

São empregadas duas estratégias, o Método do Controle por Trabalho [4] e o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados [5], para obter a solução das equações não lineares de equilíbrio. O desempenho destes algoritmos é verificado através de alguns exemplos numéricos que apresentam diferentes tipos de comportamento dando-se especial destaque a problemas nos quais ocorrem "snap-through" e "snap-back".

EQUAÇÃO INCREMENTAL DE EQUILIBRIO

Adotando-se um sistema de eixos cartesianos como referência e uma descrição Lagrangeana Total o princípio dos deslocamentos virtuais pode ser escrito na forma

$$\int_{o_v} {}^*S_{ij} \delta {}^*e_{ij}^o dV = {}^* \mathcal{R} \quad (1)$$

na qual ${}^*S_{ij}$ e ${}^*e_{ij}$ representam, respectivamente, componentes cartesianas do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e do tensor deformação de Green-Lagrange correspondentes ao tempo $t+\Delta t$ e referidas à configuração do tempo 0, \mathcal{R} é o trabalho virtual externo relativo ao tempo $t+\Delta t$, e o_v é o volume do corpo na configuração inicial, ou seja, no tempo 0.

A partir da equação (1) pode-se deduzir uma forma linearizada para a equação de equilíbrio incremental de um corpo [6]

$$\int_{o_v} {}^oC_{ijrs} {}^oe_{rs} \delta {}^oe_{ij}^o dV + \int_{o_v} {}^tS_{ij} \delta {}^on_{ij}^o dV = {}^* \mathcal{R} - \int_{o_v} {}^tS_{ij} \delta {}^oe_{ij}^o dV \quad (2)$$

Nesta equação ${}^oC_{ijrs}$ é o tensor constitutivo incremental, ou seja, que relaciona os incrementos das componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff (${}^tS_{ij}$) com os incrementos das componentes do tensor deformação de Green-Lagrange (${}^oe_{ij}$), referidos à configuração inicial, e ${}^on_{ij}$ e ${}^tS_{ij}$ são, respectivamente, partes linear e não linear destes incrementos de deformação.

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

A equação de equilíbrio de um elemento finito pode ser deduzida a partir da equação (2), e resulta

$$({}^o[K_L] + {}^t[K_{NL}]) \langle U \rangle = {}^* \langle R \rangle - {}^t \langle F \rangle \quad (3)$$

sendo $\langle U \rangle$ um vetor contendo incrementos dos deslocamentos nodais do elemento e

$$\begin{aligned} {}^t_0[K_L] &= \int_{0_V} {}^t_0[B_L]^T {}^t_0[C] {}^t_0[B_L] {}^0dV \\ {}^t_0[K_{NL}] &= \int_{0_V} {}^t_0[B_{NL}]^T {}^t_0[S] {}^t_0[B_{NL}] {}^0dV \\ {}^t_0\langle F \rangle &= \int_{0_V} {}^t_0[B_L]^T {}^t_0\langle S \rangle {}^0dV \end{aligned} \quad (4)$$

Nestas equações ${}^t_0[B_L]$ e ${}^t_0[B_{NL}]$ são as matrizes de formação-deslocamento linear e não linear, respectivamente, ${}^t_0[C]$ é a matriz constitutiva incremental, ${}^t_0[S]$ é uma matriz contendo componentes do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff e ${}^t_0\langle S \rangle$ é um vetor contendo estas mesmas componentes de tensão. Como no estudo considerado cada elemento é constituído por um número arbitrário de lâminas de diferentes materiais as integrais que constam nas equações (4) são desenvolvidas em uma soma de integrais sobre o volume de cada uma das referidas lâminas.

Os deslocamentos dos elementos finitos tridimensionais degenerados [1] são estabelecidos com a imposição das seguintes restrições sobre o campo de deslocamentos dos elementos isoparamétricos tridimensionais: (1) linhas retas normais à superfície média da casca em sua geometria inicial permanecem retas, porém não necessariamente normais, após a deformação; e (2) são consideradas nulas as componentes de tensão e de deformação normais transversais.

Apesar da equação (2) não conter qualquer restrição no que diz respeito as grandezas de deslocamentos e deformações nela envolvidos, as hipóteses acima mencionadas restringem o uso desta formulação à análise de estruturas em cascas sujeitas à pequenas deformações. Maiores detalhes são dados em [6].

RELAÇÃO CONSTITUTIVA DE UMA LÂMINA

As estruturas a serem analisadas são constituídas, em sua forma mais geral, por lâminas confeccionadas com diferentes materiais ortótropos superpostas e ligadas entre si. As direções principais destes materiais precisam, portanto, ser definidas com relação a eixos locais escolhidos convenientemente, adotando-se neste trabalho tais eixos conforme mostra a Fig. 1.

Para cada lâmina, supostamente constituída de material elástico linear, os incrementos de tensões de Piola-Kirchhoff (${}^t_0 S_{ij}$) relacionam-se com os incrementos de deformações de Green-Lagrange (${}^t_0 \epsilon_{ij}$) segundo as direções principais do material, pela equação

$${}^t_0\langle S \rangle = {}^t_0[C] {}^t_0\langle \epsilon \rangle \quad (5)$$

sendo

$${}^t_0\langle S \rangle = \langle {}^t_0 S_{11} \quad {}^t_0 S_{22} \quad {}^t_0 S_{33} \quad {}^t_0 S_{12} \quad {}^t_0 S_{13} \quad {}^t_0 S_{23} \rangle^T \quad (6)$$

$${}^t_0\langle \epsilon \rangle = \langle {}^t_0 \epsilon_{11} \quad {}^t_0 \epsilon_{22} \quad {}^t_0 \epsilon_{33} \quad 2 {}^t_0 \epsilon_{12} \quad 2 {}^t_0 \epsilon_{13} \quad 2 {}^t_0 \epsilon_{23} \rangle^T \quad (7)$$

$${}^0[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde os coeficientes c_{mn} são as rigidezes elásticas do material. Através da nulidade das ^{mn}terceiras linha e coluna desta matriz tem-se estabelecidas as hipóteses de serem nulas as componentes de tensão e de deformação normais transversais. Para fins de resolução numérica das integrais contidas nas equações (4), a partir da matriz da equação (8) e usando transformações usuais de coordenadas, são obtidas as matrizes constitutivas segundo as direções locais e globais mostradas na Fig. 1.

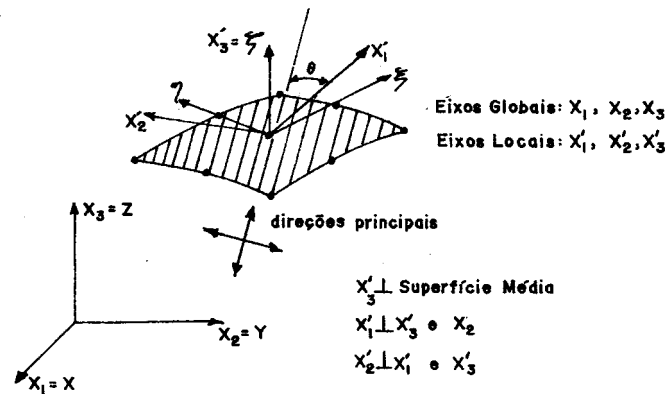


Fig. 1 - Eixos globais, eixos locais e direções principais das lâminas

PROCEDIMENTOS NUMERICOS DA ANÁLISE

Em diferentes procedimentos numéricos, do tipo incremental/iterativo, propostos para a solução das equações não lineares de equilíbrio, utiliza-se a estratégia de considerar o incremento de carga relativo a cada passo ou iteração da análise como uma incógnita adicional do problema. Tal estratégia consiste em, assumindo que o carregamento seja proporcional, escrever a equação (3) na forma

$${}^0[K_L] + {}^0[K_{NL}]^{(i-1)} (u)^i = ({}^0\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^i) \langle \bar{R} \rangle - {}^0\langle F \rangle^{(i-1)}$$

ou

$${}^*_{\circ}[K_T]^{(i-1)} \langle u \rangle^i = \Delta \lambda^i \langle \bar{R} \rangle + {}^*_{\circ} \langle \psi \rangle^{(i-1)} \quad (9)$$

onde ${}^*_{\circ}[K_T]^{(i-1)}$ é a matriz de rigidez tangente referente ao passo $t+\Delta t$ e à iteração $(i-1)$, $\langle u \rangle^i$ é o vetor de incrementos de deslocamentos nodais correspondentes à iteração i , $\Delta \lambda^i$ define o incremento de carga desta iteração, $\langle \bar{R} \rangle$ é um vetor de cargas nodais de referência e $\langle \psi \rangle^{(i-1)}$ é um vetor de forças desequilibradas correspondentes ao tempo $t+\Delta t$ e à iteração $(i-1)$ dado por

$${}^*_{\circ} \langle \psi \rangle^{(i-1)} = {}^*_{\circ} \lambda^{(i-1)} \langle \bar{R} \rangle - {}^*_{\circ} \langle F \rangle^{(i-1)} \quad (10)$$

O vetor de incrementos de deslocamentos nodais é obtido pela soma de dois vetores

$$\langle u \rangle^i = \Delta \lambda^i \langle u_1 \rangle^i + \langle u_2 \rangle^i \quad (11)$$

tal que

$${}^*_{\circ}[K_T]^{(i-1)} \langle u_1 \rangle^i = \langle \bar{R} \rangle \quad (12)$$

e

$${}^*_{\circ}[K_T]^{(i-1)} \langle u_2 \rangle^i = {}^*_{\circ} \langle \psi \rangle^{(i-1)} \quad (13)$$

Uma equação adicional é, então, estabelecida para que possam ser determinadas as $N+1$ incógnitas do problema. São dadas a seguir estas equações adicionais referentes aos métodos numéricos empregados neste trabalho. Os fundamentos nos quais os mesmos são baseados e os detalhes para implementação computacional são dados nas referências [4] e [5].

Método do Controle por Trabalho

Neste método define-se a priori um trabalho de controle ΔW e um vetor de cargas de referência $\langle \bar{R} \rangle$. Na primeira iteração de um passo qualquer j da análise determina-se o incremento do fator de carga pela equação

$$\Delta \lambda_j^1 = \pm \left(\frac{\Delta W}{\langle \bar{R} \rangle \langle u_1 \rangle_j^1} \right)^{1/2} \quad (14)$$

e nas demais iterações ($i \geq 2$)

$$\Delta \lambda_j^i = - \frac{\langle \bar{R} \rangle \langle u_2 \rangle_j^i}{\langle \bar{R} \rangle \langle u_1 \rangle_j^i} \quad (15)$$

nas quais $\langle \rangle$ designa $\langle \rangle^T$.

Método do Controle por Deslocamentos Generalizados

Este método utiliza como controle um parâmetro denominado "general stiffness parameter" (GSP), o qual, num passo genérico j da análise, é definido por

$$GSP = \frac{\langle u_1 \rangle_1^i \langle u_1 \rangle_1^i}{\langle u_1 \rangle_{j-1}^i \langle u_1 \rangle_j^i} \quad (16)$$

Na primeira iteração do passo j o incremento do fator de carga é obtido por

$$\Delta \lambda_j^i = \pm \Delta \lambda_1^i (GSP)^{1/2} \quad (17)$$

sendo $\Delta \lambda_1^i$ o incremento de carga adotado de início, ou seja, na primeira iteração do primeiro passo. Nas iterações seguintes ($i \geq 2$) tem-se

$$\Delta \lambda_j^i = - \frac{\langle u_1 \rangle_{j-1}^i \langle u_2 \rangle_j^i}{\langle u_1 \rangle_{j-1}^i \langle u_1 \rangle_j^i} \quad (18)$$

sendo que para $j=1$, faz-se $\langle u_1 \rangle_0^i = \langle u_1 \rangle_1^i$

Critério de Convergência

Os procedimentos acima referidos foram implementados em um programa computacional no qual são utilizados elementos retangulares quadráticos de 8, 8 e 9 nós. Admite-se neste programa que cada passo da análise é concluído quando numa iteração i cumpre-se a condição

$$\frac{\| \langle \psi \rangle^i \|}{N \cdot \| \lambda^i \| \cdot \| \langle \bar{K} \rangle \|} \leq \rho \quad (19)$$

onde ρ é uma tolerância prescrita adotada como 10^{-4} nos exemplos numéricos apresentados a seguir. $\| \cdot \|$ designa a norma euclidiana de um vetor e N é o número de graus de liberdade da estrutura.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Casca cilíndrica abatida com carga no centro

Este exemplo consiste de uma casca cilíndrica de material isotrópico solicitada por uma carga concentrada conforme mostra a Fig. 2. As bordas transversais (curvas) da casca são livres e as longitudinais são rotuladas ($u = v = w = \theta = 0$). Neste e nos demais exemplos u , v e w representam translações segundo as direções x , y e z e θ_x e θ_y são rotações em torno de eixos locais x' e y' , respectivamente, definidos como se mostra na Fig. 1. Um quarto da casca foi modelado com quatro elementos de nove nós. Na Fig. 2 são mostrados os resultados obtidos com o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados, os quais estão em concordância com os resultados obtidos em [7]. Este exemplo apresenta os fenômenos ditos "snap-through" e "snap-back". Houve problemas de divergência com a utilização do Método do Controle por Trabalho na região do "snap-back". Uma integração reduzida seletiva nos termos de cisalhamento da matriz de rigidez foi adotada.

Casca esférica laminada sob carga uniforme

Neste exemplo, um quarto de uma casca esférica laminada constituída por duas lâminas de material composto reforçado com fibras, "cross-ply" (0/90), solicitada por uma carga uniforme foi modelada com quatro elementos de nove nós. A geometria da casca é mostrada na Fig. 3. Diferentes condições de contorno BC1 e BC2, abaixo especificadas, foram adotadas e os resultados obtidos com o Método do Controle por Trabalho são, na mesma figura, comparados com os resultados apresentados em [7]. Constatou-se ser necessário um número maior de passos para a análise deste exemplo com o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados. Foi adotada uma integração total (3x3) no plano da estrutura enquanto que ao longo da espessura subdividiu-se cada lâmina em duas camadas e um ponto de integração em cada uma delas foi tomado. Propriedades das lâminas: $E_1/E_2=25$; $E_2=10^6$ psi; $G_{12}/E_2=0,5$; $G_{13}=G_{12}$; $G_{23}/E_2=0,2$; $\nu_{12}=0,25$.

$$\text{BC1: } v = w = \theta_2 = 0 \text{ em } x = a/2; \quad u = w = \theta_1 = 0 \text{ em } y = a/2 \\ u = \theta_1 = 0 \text{ em } x = 0; \quad v = \theta_2 = 0 \text{ em } y = 0$$

$$\text{BC2: } u = w = \theta_2 = 0 \text{ em } x = a/2; \quad v = w = \theta_1 = 0 \text{ em } y = a/2 \\ v = \theta_1 = 0 \text{ em } x = 0; \quad u = \theta_2 = 0 \text{ em } y = 0$$

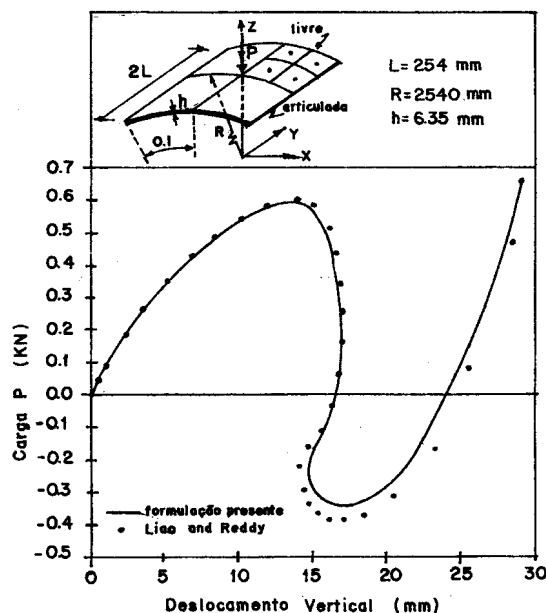


Fig. 2 - Casca cilíndrica abatida sob carga concentrada

Placa engastada com enrijecedores laterais excêntricos

Neste exemplo analisa-se a placa engastada e dotada de enrijecedores excêntricos nas bordas laterais, mostrada na Fig. 4, constituída de material homogêneo e isótropo. Foram utilizados dois elementos de nove nós para modelar a placa e quatro elementos de seis nós para modelar os enrijecedores. As matrizes de rigidez de todos os elementos foram obtidas fazendo uso de uma integração reduzida seletiva no plano da estrutura e de dois pontos de integração ao longo da espessura. Os resultados obtidos através do Método do Controle por Deslocamentos Generalizados, para a estrutura com e sem os enrijecedores são dados na Fig. 4, e estão em boa concordância com aqueles encontrados em [7].

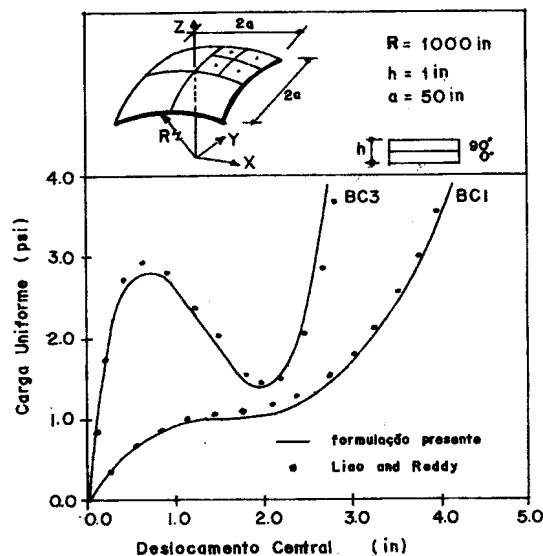


Fig. 3 - Casca esférica laminada sob carga uniforme

Casca esférica constituída de nove camadas (0/90/0/90...)

Uma casca esférica constituída de nove camadas de grafite-epóxi e cuja geometria é mostrada na Fig. 5, é neste exemplo analisada. Para fins de comparação com os resultados obtidos em [7] somente um quarto da casca foi modelado com quatro elementos de nove nós, admitiu-se atuar sobre a mesma uma carga vertical uniforme e condições de contorno BC1 foram adotadas. A curva carga x deslocamento obtida com o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados é também mostrada na Fig. 5. Observe-se que a mesma não apresenta pontos limites tal como a curva obtida para a casca do segundo exemplo com idênticas condições de contorno. Também neste exemplo foi constatado que o número de passos requerido para se atingir determinado nível de carga é menor para o método do controle por trabalho, se uma mesma carga inicial é admitida. A mesma regra de integração do exemplo anterior foi adotada. Propriedades das lâminas: $E_1/E_2=40$; $E_2=10^6$ psi; $G_{12}/E_2=0,6$; $G_{13}=G_{12}$; $G_{23}/E_2=0,5$ e $\nu_{12}=0,25$.

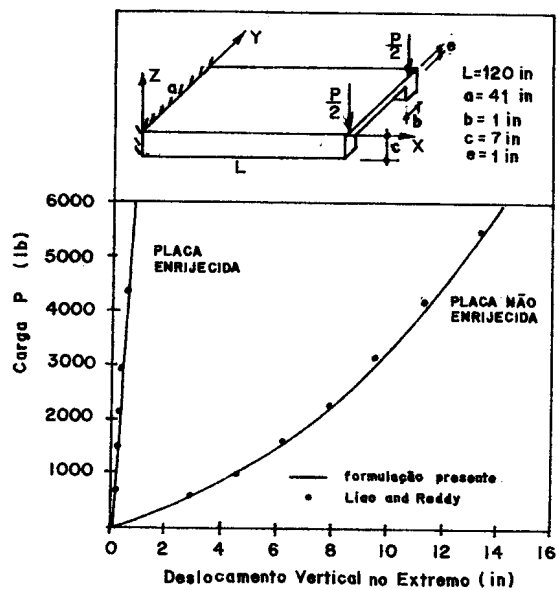


Fig. 4 - Placa engastada enrijecida

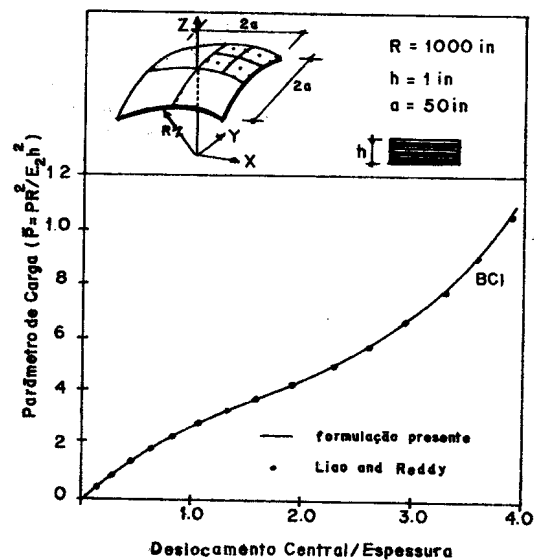


Fig. 5 - Casca esférica com nove camadas (0/90/0/90...)

CONCLUSÕES

No presente trabalho foram apresentados procedimentos para a análise de pré e pós-flambagem de placas e cascas laminadas usando elementos finitos tridimensionais degenerados. O emprego destes mesmos elementos na análise de estruturas dotadas de enrijecedores excêntricos foi também investigado. Dois métodos numéricos para a solução das equações não lineares de equilíbrio foram testados, o Método do Controle por Trabalho e o Método do Controle por Deslocamentos Generalizados. Nos exemplos de estruturas que sofrem "snap-through" foi requerido um número menor de passos para a realização da análise pelo método do controle por trabalho, para iguais cargas de partida, e nos exemplos em que houve enrijecimento da estrutura foi constatado exatamente o caso contrário. Pôde-se ainda verificar uma maior facilidade de uso do segundo método, pelo fato de que o êxito da solução depende apenas do valor da carga inicial, enquanto que no primeiro método tal êxito depende das escolhas arbitrárias do valor de ΔW , nem sempre razoável para a análise completa da estrutura, e do vetor de cargas $\{\bar{R}\}$. Os dois métodos, contudo, mostraram-se eficientes na solução de diversos exemplos, dos quais alguns foram aqui apresentados.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro prestado pelo CNPq.

REFERÊNCIAS

- [1] Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., *Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2, 1970, pp. 419-451.
- [2] Ramm, E., *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (Eds. Wunderlich, Stein, Bathe), 1981, pp. 63-89, Springer-Verlag.
- [3] Riks, E., *An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problem*, International Journal Of Solids and Structures, 15, 1979, pp. 529-551.
- [4] Yang, Y.B., *Linear and Nonlinear Analysis of Space Frames with Nonuniform Torsion using Interactive Computer Graphics*, Department of Structural Engineering Report, Cornell University, 1984.
- [5] Yang, Y.B. and Shieh, M.S., *Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points*, AIAA Journal, 28, 12, 1990, pp. 2110-2116.
- [6] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [7] Liao, C. -L. and Reddy, J.N., *An Incremental Total Lagrangian Formulation for General Anisotropic Shell-Type Structures*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 24061, 1987.