Mecánica Computacional Volúmen XIII
Compilado por M. Vénere
Bariloche, setiembre de 1992

JUEGOS DIFERENCIALES DE SUMA NULA CON TIEMPOS DE DETENCIÓN SIN DESCUENTO

Mabel M. Tidball

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Universidad Nacional de Rosario

Pellegrini 250, (2000) Rosario

RESUMEN

En este trabajo se analiza el problema de juegos diferenciales de suma nula con tiempos de detención sin descuento y las propiedades de regularidad de la función valor del juego. Discretizando la inecuación bilátera de Isaacs asociada al problema, se obtiene un problema discreto del cual se caracteriza totalmente el conjunto de soluciones y se presentan algoritmos prácticos de cómputo.

ABSTRACT

In this paper we analize a zero sum differential game problem with stopping times without discount and the regularity properties of its value function. We discretise the Isaacs bilateral inequalities using finite elements and we obtain a discrete problem. We totally caracterize the set of discrete solutions and we present practical algorithms to compute them.

1. INTRODUCCION

Cuando se considera el problema de juegos diferenciales con tiempos de detención sin descuento (es decir, cuando el coeficiente de actualización λ es cero) se pierde en general las propiedades de regularidad de la función valor del juego. Mientras que para el caso $\lambda > 0$ se prueba la holderianidad de la función valor (ver [13]), en este caso, aún con condiciones de regularidad de los datos, se demuestra que aunque la función valor es única puede ser discontinua. Estudios relacionados sobre este problema puede verse en [1]. Además se caracteriza el conjunto de discontinuidades de la misma.

Esta función valor verifica un sistema de inecuaciones integrales de tipo Isaacs (ver [4], [6], [11], [15]) que puede ser discretizado utilizando el método de los elementos finitos [12]. El problema discreto no tiene en general solución única. Dentro del conjunto de soluciones existe una que está naturalmente asociada a la definición del problema original. Además de caracterizar completamente el conjunto de soluciones presentamos en este trabajo un procedimiento para identificar a esa solución especial. Las implementaciones computacionales aceleradas de este procedimiento están basadas en las técnicas estudiadas en [3] y [14].

Se estudian casos especiales donde la solución del problema continuo es regular y única (ver [5]), la discretización del problema tiene solución única y estas soluciones son convergentes a la función valor del juego.

2. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

2.1 El problema de juegos

En este juego diferencial, las variables de decisión de los jugadores son los tiempos de parada del sistema controlado. La evolución dinámica del sistema está descripta por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d}{dt}y(t) = g(y(t)) \qquad y(0) = x \tag{1}$$

$x \in \Omega$, Ω dominio abierto y acotado de $\Re^n$

Como el juego es de suma nula, el objetivo del primer jugador es maximizar un funcional J, y el objetivo del segundo jugador es minimizarlo.

Si llamamos con τ_1 y τ_2 los tiempos de detención de los jugadores 1 y 2 respectivamente, entonces el funcional J tiene la siguiente estructura:

$$J(x,\tau_1,\tau_2)=\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \int_0^{\tau_1\wedge\tau_2\wedge\tau\wedge\theta} f(y(s))ds+\psi_1(y(\tau_1))\chi_{\tau_1<\tau_2}+\psi_2(y(\tau_2))\chi_{\tau_2<\tau_1}+\psi_0(y(\theta))\chi_{\theta<\tau_1\wedge\tau_2} \tag{2}$$

donde: $\theta=\theta(x)$ es el primer instante en donde la trayectoria con condición inicial x sale de Ω ($\theta=+\infty$ cuando al trayectoria permanece siempre en Ω). Es decir:

$$\theta(x)= \inf \{t: y(t) \notin \Omega\}$$

τ_i i=1,2 son los tiempos de detención utilizados por los jugadores; $f(y)$ es el costo instantáneo, ψ_0 es el costo a pagar si el sistema sale de Ω y ψ_1, ψ_2 son los costos finales que tienen que pagar los jugadores 1 y 2 respectivamente; y que en general verifican la siguiente condición:

$$\psi_2(x) \geq \psi_1(x) + \mu \qquad \forall\, x \in \Omega,\ \mu > 0 \tag{3}$$

Nota 1: Puede observarse que debido a la condición (3) el funcional (2) está bien definido ya que el caso $\tau_1=\tau_2$ (finito) no corresponde a ninguna estrategia realista de ambos jugadores.

Nuestro objetivo es encontrar $\bar{\tau}_1$ y $\bar{\tau}_2$ tales que: $V(x) = \sup_{\tau_1} \inf_{\tau_2} J(x, \tau_1, \tau_2)$ donde V (si existe) es la función valor del juego y $\bar{\tau}_1$ y $\bar{\tau}_2$ las estrategias optimales de equilibrio o punto de ensilladura del funcional J.

Suponemos:

(H) g, f, ψ_i, i=0,1,2 son funciones lipschitzianas acotadas en Ω (L_g, L_f, L_{ψ_i} sus constantes de Lipschitz y M_g, M_f, M_{ψ_i} sus cotas).

Nota 2: Es necesario considerar el límite superior (o el límite inferior, en el caso de considerar el peor caso para el jugador 1), como se puede observar facilmente en el siguiente ejemplo. Sea M suficientemente grande; $\psi_2(x)=M$ y $\psi_1(x)=-M$ tal que $\tau_1= \tau_2=+\infty$, $f(x)=x_1$, $\Omega=(-2, 2)$ y sea

$$x_1'(t) = x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -x_1(t)$$

en este caso $\int_0^{\infty} f(y(s))ds$ no existe.

2.2 Propiedades de la función valor

- **2.2.1** ***Existencia de la función valor***

Si (H) es válida entonces existe la función valor del juego ya que podemos definir los valores inferior y superior del juego $\underline{V}$ y $\overline{V}$ respectivamente, por:

$$\underline{V}(x) = \sup_{\tau_1} \inf_{\tau_2} J(x, \tau_1, \tau_2) \qquad \overline{V}(x) = \inf_{\tau_2} \sup_{\tau_1} J(x, \tau_1, \tau_2)$$

y puede probarse (ver [4] y [11]) que: $V(x) = \underline{V}(x) = \overline{V}(x)$

Nota 3: En términos de la función valor del juego podemos encontrar ϵ-estrategias optimales de equilibrio, tales que:

$$J(x, \tau_1, \overline{\tau}_2) - \epsilon \leq J(x, \overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2) \leq J(x, \overline{\tau}_1, \tau_2) + \epsilon \quad \forall\, \tau_1, \tau_2$$

Las ϵ-estrategias optimales de equilibrio están definidas de la siguiente manera:

$$\overline{\tau}_1 = \inf \{s /\ V(y(s)) \leq \psi_1(y(s)) + \epsilon\} \qquad \overline{\tau}_2 = \inf \{s /\ V(y(s)) \geq \psi_2(y(s)) - \epsilon\}$$

- **2.2.2** ***Ejemplo de V discontinua.***

Ejemplo: Sea $\Omega = [-1, 1]$ y la dinámica del sistema dada por: $\frac{dy}{dt}(t) = y(t)$, $y(0) = x$, $f(x)=0$, $\psi_0(x)=0$, $\psi_1(x)=\frac{1}{2}(3x-1)$, $\psi_2(x)=\frac{1}{2}(3x+1)$; entonces:

$$V(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x=0 \\ -1 & \text{if } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

2.3 Inecuación variacional de Issacs

V verifica la siguiente inecuación de Isaacs:

$$\psi_1(x) \leq V(x) \leq \psi_2(x) \quad \forall\, x \in \Omega$$

$$V(x) < \psi_2(x) \rightarrow \exists\, \delta_x \ /\ \forall \delta < \delta_x \ V(x) \geq \int_0^\delta f(y(s))ds + V(y(\delta))$$

$$V(x) > \psi_1(x) \rightarrow \exists\, \delta_x \ /\ \forall \delta < \delta_x \ V(x) \leq \int_0^\delta f(y(s))ds + V(y(\delta))$$

2.4 Propiedades de los problemas con frontera

Si suponemos que $\theta(x) < \infty$ $\forall x$ (es decir todas las trayectorias finalizan en $\partial\Omega$) y que atraviesan $\partial\Omega$ con una velocidad suficientemente grande; es decir: $\exists\, a > 0,\ \gamma > 0 /$

$$\forall\, y(s) \quad d(y(s),\partial\Omega) \leq a \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} d(y(s),\partial\Omega) \leq -\gamma \tag{4}$$

Se puede probar en este caso que la función de costo óptimo V es lipschitziana y que existen las estrategias optimales de equilibrio (ver [4]). Estas propiedades surgen del hecho de que el tiempo de salida es una función lipschitziana de x.

2.5 Propiedades de algunos procesos ergódicos

Un proceso donde es posible dar una caracterización más determinada de la solución de nuestro problema es aquel donde el sistema evoluciona dentro de una variedad compacta. En ese caso la solución de (1) define en Ω un semigrupo de traslaciones S(t). Si suponemos que este semigrupo tiene una única medida invariante μ y se verifica que:

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) \neq 0$$

entonces:

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau f(y(s))ds = \infty \cdot \operatorname{sig}\left(\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) \right)$$

Es inmediato ver que esta condición implica la existencia de estrategias optimales finitas y la continuidad de la función valor.

2.6 Caracterización del conjunto de discontinuidades de V

Supongamos que las trayectorias que finalizan en $\partial\Omega$; es decir, las soluciones de (1) con $\theta(x) < \infty$ verifican (4). Definamos entonces:

$\tau(x) = \bar{\tau}_1 \wedge \bar{\tau}_2 \wedge \theta$ si existen estrategias óptimas finitas

$\tau(x) = +\infty$ si no existen estrategias óptimas.

$$A = \left\{ x \in \Omega : V(x) \text{ es discontinua} \right\}$$

$$\Omega_\tau = \left\{ x \in \Omega : \tau(x) \leq \tau \right\}$$

entonces es fácil probar (ver [14]) que:

$$A \subseteq \complement \left(\bigcup_{\tau > 0} \Omega_\tau \right)$$

Más aún si

$$J^\tau(x, \tau_1, \tau_2) = \int_0^{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau \wedge \theta} f(y(s))ds + \psi_1(y(\tau_1))\, \chi_{\tau_1 < \tau_2} + \psi_2(y(\tau_2))\, \chi_{\tau_2 < \tau_1} + \psi_0(y(\theta))\chi_{\theta < \tau_1 \wedge \tau_2}$$

$V^\tau(x) = \sup_{\tau_1} \inf_{\tau_2} J^\tau(x, \tau_1, \tau_2)$ entonces $V^\tau|_{\Omega_\tau} = V$

3. DISCRETIZACION TEMPORAL Y ESPACIAL DEL PROBLEMA

Para obtener numericamente la solución del problema (2) discretizamos en la variable temporal y luego en la espacial utilizando el método de los elementos finitos. Ver [2], [7], [8], [9], [12] y [13].

3.1 La discretización en tiempo

Para la discretización temporal, (ver [2]), consideramos $h > 0$ y una partición homogénea del intervalo

$[0, +\infty)$ en intervalos de igual longitud h. La ecuación de Isaacs para la discretización en tiempo; V^h; es:

$$V^h(x) = P_I\Big(h\ f(x) + V^h(x+hg(x))\Big) \tag{5}$$

donde P_I denota la proyección sobre el intervalo $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$

3.2 La discretización en espacio

- 3.2.1 ***Elementos del Problema*** Discreto

Para definir el problema discreto es necesario discretizar el conjunto Ω, el espacio $C(\Omega)$ y el operador (5).

Aproximamos Ω con $\Omega_k = \bigcup_j S_j^k$, donde $\{S_j^k\}$ es un conjunto finito de simples y por lo tanto, Ω_k es un poliedro de $\Re^n$, $\max_j(\text{diám}\ S_j^k) = k$. Notaremos con $X = \{x^i, i=1,\dots,N\}$ el conjunto de vértices de Ω_k (nodos), siendo N el cardinal de X. Llamaremos $\partial\Omega_k^+$ a $\left\{x^i \in X \ / \ x^i + h\,g(x^i) \notin \Omega_k\right\}$.

Consideramos como aproximación del espacio $C(\Omega)$ al conjunto W_k de funciones $w: \Omega_k \to \Re$, w continuas en Ω_k, con $\frac{\partial w}{\partial x}$ constante en el interior de cada simplex de Ω_k (es decir, w es un elemento finito lineal).

- **3.2.2. *El problema totalmente discreto***

Utilizando la misma metodología que la utilizada en [9] obtenemos una formulación del problema totalmente discreto; problema P_k^h; consistente en hallar un punto fijo del operador $M: \Re^N \to \Re^N$ asociado a la transformación: $V(x) \to P_I\Big(hf(x)+V(x+hg(x))\Big)$ a través del isomorfismo natural $W_k \to \Re^N$

$$Mw(x_i) = P_I\Big(Pw + F\Big)(x_i)$$

es decir:

$$V_k^h(i) = P_I\Big(P\ V_k^h + F\Big)(i) \tag{6}$$

donde P_I denota la proyección sobre el intervalo $[\psi_1(i), \psi_2(i)]$; P es una matriz de componentes $P_{i,j}$ dadas por: $x^i+hg(x^i) = \sum_{j=1}^{N} P_{i,j}x^j$, cuando $x^i \notin \partial\Omega_k^+$, $P_{i,j}=0\ \forall j$ si $x^i \in \partial\Omega_k^+$. $F(x^i)=h\,f(x^i)$, cuando $x^i \notin \partial\Omega_k^+$, $F(x^i)=\psi_0(x^i)$ si $x^i \in \partial\Omega_k^+$. Dado que $\|P\|=1$ el operador M no es contractivo y en el caso general no podemos garantizar una única solución de (6).

- **3.2.3 *Cadena de Markov asociada al proceso***

Consideramos un proceso aleatorio de estados finitos $y_i^{(\nu)}$, donde ν es la variable discreta de tiempo, i el estado inicial y la evolución de la probabilidad del estado $y_i^{(\nu)}$ está dada por la matriz de transición P. $P_{i,j}$ es la probabilidad de que estando en el nodo i se pase, en el instante siguiente al nodo j.

Sobre este sistema markoviano podemos definir un problema de juegos diferenciales estocástico con tiempos de detención donde la función de costo tiene la forma:

$J(i,\tau_1,\tau_2)=$

$$=\overline{\lim_{M}}\, E\left(\sum_{\nu=1}^{\tau_1\wedge\tau_2\wedge M\wedge\theta} f(y_i^{(\nu)})+\psi_1(y(\tau_1))\chi_{\tau_1<\tau_2}+\psi_2(y(\tau_2))\chi_{\tau_2<\tau_1}+\psi_0(y(\theta))\chi_{\theta<\tau_1\wedge\tau_2}\right)$$

y donde la función valor es: $$V_k^h(i)=\inf_{\tau_2}\sup_{\tau_1} J(i,\tau_1,\tau_2) \qquad (7)$$

Teorema 1: La ecuación (6) tiene al menos una solución. V_k^h, dada por (7) es una de las soluciones.

• **3.2.4 *Caracterización de las soluciones discretas***

La ecuación (6) tiene en general multiplicidad de soluciones. Llamaremos S al conjunto de soluciones. Caracterizaremos el conjunto S teniendo en cuenta fundamentalmente la estructura del grafo asociado a la cadena de Markov interviniente en el problema discreto. Identificaremos dentro de este conjunto de soluciones la que representa la formulación probabilística del problema original.

• **3.2.5 *Clasificación de la cadena en elementos transitorios y finales.***

Diremos que un conjunto de nodos $C=\{x^i\}$ es una clase final si $P_{i,j}=0\ \forall(i,j)\ /\ x^i\in C,\ x^j\notin C$ y que C es una clase final minimal si dentro de todas las clases finales es un elemento minimal bajo la relación de inclusión. Designaremos con A al conjunto de elementos incluidos en clases finales minimales. Todo elemento que no pertenezca a una clase final minimal se dice transitorio. Designaremos con H el conjunto de elementos transitorios. Llamemos C_p a una clase final minimal genérica, $p=1,\ldots,n_c$. Sin pérdida de generalidad ordenaremos las clases colocando en primera posición las clases correspondientes a puntos $x^j\in\ \partial\Omega_k^+$ $(\#\partial\Omega_k^+=n_c^1)$.

Teorema 2 (de seudo-unicidad): Sean v, w soluciones de (6), si $v(x^i)=w(x^i)\ \forall\ x^i\ \in\ A$ entonces $v=w$.

Nota 4: Es inmediato que el análisis de (6) puede restringirse al análisis aislado de (6) en cada clase final minimal C y utilizar esto para determinar la variedad de soluciones teniendo en cuenta que los valores de la solución en la clase transitoria H es una función de los valores que toma en los elementos de A.

Teorema 3: Existe $Q: [0,1]^{n_c}\rightarrow\Re^N$ tal que $S=\{\,Q(b)\ /\ b\in[0,1]^{n_c}\}$

• **3.2.6 *Estudio de la ecuación en las clases minimales***

1) El caso $x^j\in\partial\Omega_k^+$

$\forall$ j=1,..., n_c^1 la solución es: $V_k^h(x^j)=\min\left(\psi_2(x^j),\ \max(\psi_1(x^j),\ \psi_0(x^j))\right)$

2) El caso $x^j \notin \partial\Omega_k^+$.

Consideramos la restricción de la matriz P a la clase final minimal C_p. Por claridad de notación seguiremos llamando P a esta matriz; que en virtud de la definición de clase final minimal es una matriz estocástica irreducible. Llamemos con d al máximo común divisor de las longitudes de los circuitos (caminos cerrados) determinados por P. Definimos la siguiente relación de equivalencia:

i relacionado con j $\Leftrightarrow$ $\exists$ un camino que une i con j cuya longitud es múltiplo de d

Notaremos con c_i, las d subclases de equivalencia. P tiene la siguiente estructura:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & P_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{d-1,d} \\ P_{d,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

donde $P^{i,j} = P^{c_i,c_j}$; P^d define una cadena de markov ergódica en cada subclase c_i y por lo tanto (ver [10]) existe una única medida invariante μ^{c_i} de $(P^d)^{c_i,c_i}$, es decir:

$$\mu^{c_i}\,(P^d)^{i,i} = \mu^{c_i} \quad \forall\ i=1,\ldots,d$$

estando estas medidas invariantes además relacionadas por:

$$\mu^{c_i}\,P^{i,i+1} = \mu^{c_{i+1}} \quad \forall\ i=1,\ldots,d \tag{9}$$

Entonces $\mu= \frac{1}{d}(\mu^1,\ldots,\mu^d)$ es la única medida invariante del proceso de Markov definido por P; es decir:

$$\mu= \mu P$$

La medida μ determina en gran parte la caracterización de las soluciones de (6). En especial es válido el siguiente teorema:

Teorema 4: Si $<\mu,\ f> \neq 0$ entonces la solución de (6) es única y está dada por el punto límite de la siguiente iteración convergente:

$$v^{\nu+1}= M\, v^{\nu}; \quad \forall\ v^0 \text{ inicial} \tag{10}$$

Nota 5: Para hallar numericamente la solución de (10) se puede utilizar los algoritmos acelerados presentados en [3], convenientemente adaptados para tratar el caso de este operador no contractivo.

Nota 6: Para estudiar la multiplicidad de soluciones, en virtud del teorema 4, es necesario restringir el análisis al caso $<\mu, f> = 0$, hecho que supondremos válido en el resto de este párrafo.

Para probar la existencia de solución de (6) (restringida a una clase minimal de cardinalidad β) estudiamos la solución del sistema lineal: $w(x_i) = \left(P\,w + F\right)(x_i)$.
Para ello sean $F=((f^1)', \ldots, (f^d)')'$; $f^i = f^{0_i}$ y analicemos el comportamiento asintótico de las funciones:

$$\phi_n(i) = E\left(\sum_{j=1}^{n} f(y_{x_i}(j)) \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(P^{j-1} f\right)(i) \right) \tag{11}$$

y veamos que $\phi_{md+j}(i) \rightarrow \eta_j(i)$ cuando $m \rightarrow +\infty$. Para ello basta demostrar que:

$$\phi_{md}(i) \rightarrow \eta_0(i) \quad \forall i \text{ si } m \rightarrow +\infty \tag{12}$$

ya que en virtud de la relación:

$$\phi_{md+j} = f + P\,\phi_{md+j-1}.$$

esta última será también convergente. Para probar (12) tenemos que

$$\phi_{md} = \sum_{q=1}^{d} P^q f + P^d\,\phi_{(m-1)d} = \hat{f} + P^d\,\phi_{(m-1)d} \tag{13}$$

Como P^d es diagonal en bloques y cada bloque define una cadena de markov finita ergódica se tiene que (13) converge geometricamente a un valor finito. Además se verifica que: $\bar{\phi}(i) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \eta_j(i)$ es solución de: $\phi = P\phi + f$ y que toda otra solución es de la forma: $\phi = \bar{\phi} + ce$ con $c \in \Re$ y $e=(1,1\ldots,1) \in \Re^\beta$.
Interesa calcular el $\overline{\lim}_{n\rightarrow\infty} \phi_n$, que obviamente será $\bar{\eta}(i) = \max_j \eta_j(i)$.

Procedimiento para calcular $\bar{\eta}$

1) Considerar c_p y calcular $n_p = \# c_p$ y determinar $\hat{p}$ / $n_{\hat{p}} = \min n_p$
2) Calcular la probabilidad asintótica $\mu^{\hat{p}}$ y recursivamente μ^p $\forall$ p en función de $\mu^{\hat{p}}$
3) Calcular $w_\rho = \mu^\rho f^\rho$ y determinar $\bar{\rho}$ / $\sum_{r=1}^{\bar{\rho}} w_r = \max_\rho \sum_{r=1}^{\rho} w_r$

4) Calcular $\eta_0^{\bar{\rho}}$ a través de la ecuación: $\eta_0^{\bar{\rho}} = (P^d)^{\bar{\rho},\bar{\rho}}\,\eta_0^{\bar{\rho}} + \hat{f}^{\bar{\rho}}$

donde $\hat{f}^{\bar{\rho}} = \sum_{j=0}^{\bar{\rho}-1} P^j f$ con condición adicional $\mu^{\bar{\rho}}\,\hat{f}^{\bar{\rho}} = 0$

5) Calcular $\bar{\eta}^s = \eta_0^s + \sum_{r=s}^{\bar{\rho}} w_r$

3.2.7 *Estructura posible de las soluciones*

Determinaremos la estructura de las posibles soluciones de la restricción de la ecuación (6) a C_p. Tenemos los siguientes casos:

a) $\bar{\eta}$ es tal que $\psi_1 \leq \bar{\eta} \leq \psi_2$, en este caso $w=\bar{\eta}+c\,e$ es también solución $\forall c \in [cmin,cmax]$. b) Si la función $\bar{\eta}$ no satisface la condición del punto a) entonces el algoritmo iterativo

$$v^{\nu+1} = M\, v^{\nu}; \qquad v^0 = \bar{\eta} \tag{14}$$

es convergente hacia la solución del problema (6). Sea $\bar{\bar{\eta}}$ la solución de (14).

Pueden darse dos casos:

- $\bar{\bar{\eta}}$ es solución del sistema lineal, con lo cual existe $a > 0$ / $\bar{\bar{\eta}}+\zeta e$ es solución $\forall \zeta \in [0,a]$ ó bien $\forall \zeta \in [-a,0]$.
- $\bar{\bar{\eta}}$ no es solución del sistema lineal, entonces es la única solución de (6).

5- CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN DISCRETA A LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

En el caso en que $\theta(x) < +\infty\ \forall x$ (es decir cuando se puede considerar el problema con tiempo finito) y en los casos que f tenga promedio no nulo con respecto a la única medida invariante μ (es decir $<\mu, f> \neq 0$, y entonces existen puntos en donde el sistema se detiene) se demuestra, con las técnicas usuales, la convergencia de la solución discreta a la solución real del problema. Las demostraciones de estos resultados están contenidas en [14].

CONCLUSIÓN

Se ha estudiado el problema de juegos diferenciales de suma nula con tiempos de detención sin descuento y se ha visto la dificultad de su resolución, ya que en este caso se pierden las propiedades de regularidad de la función valor pudiendo ésta ser discontinua, hecho que se traduce en que el problema discretizado pueda tener multiplicidad de soluciones y no ser convergente.

Se ha caracterizado totalmente el conjunto de soluciones del problema discreto y aislado la solución que representa la formulación probabilística equivalente del problema original.

El estudio en sí de la inecuación bilátera de Isaacs en el espacio de las funciones acotadas en Ω, será tratado en [14].

REFERENCIAS

[1] Barles G., Perthame B.: Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method. *Siam J. Control and Optimization*, Vol 26, No 5 1988.

[2] Capuzzo Dolcetta I., Ishii H.: Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 11, pp. 161-181, 1984.

[3] Di Marco S. "Técnicas de descomposición-agregación en el tratamiento de la inecuación bilátera de Isaacs". Mecánica computacional Vol 12, pp 509-518, 1991.

[4] Friedman A. : *Differential Games* (Wiley-Interscience, New York, 1971).

[5] González R.: Sur la resolution de l'équation de Hamilton-Jacobi du côntrole deterministe, *Cahiers de Mathématiques de la Decisión* N° 8029 y 8029 bis. Ceremade-Université de Paris-Dauphine, 1980.

[6] González R.: Solución numérica de problemas de juegos diferenciales de suma nula con tiempo de detención. *Anales del 1er Congreso Nacional de Informática y Teleinformática -USUARIA'83/13 JAIIO*, pp. 4.1-4.17, (Buenos Aires, 1983).

[7] González R., Rofman E.: On deterministic control problems: an approximation procedure for the

optimal cost. Part I and II. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23, pp. 242-285, 1985.

[8] González R., Tidball M.: On a Discrete Time Approximation of the Hamilton-Jacobi Equation of Dynamic Programming, *Rapport de Recherche* N°1375, INRIA, 1990.

[9] González R., Tidball M.: On the rate of convergence of fully discrete solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Rapport de Recherche* , N° 1376, INRIA, 1991.

[10] Ross S. M.: *Applied Probability Models with Optimization Applications* (Holden-Day, San Francisco, 1970).

[11] Stettner L.: Zero-sum Markov games with stopping and impulsive strategies. *Appl. Math. Optim.*, Vol. 9, pp. 1-24, 1982.

[12] Strang G., Fix G.: *An Analysis of the Finite Element Method* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973).

[13] Tidball M. "Sobre la resolución numérica de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman". Tesis, Universidad Nacional de Rosario. 1991

[14] Tidball M. "Juegos diferenciales de suma nula con tiempos de detención sin descuento". En preparación.

[15] Tidball M.M, González R.L.V.: Zero sum differential games with stopping times. Some results about its numerical solution *Proceedings of Fith International Symposium on Dynamic Games and Applications, (Grimentz, Suiza, 15-18 July 1992).*