

GENERACION AUTOMATICA DE MALLA Y TEST DE MALLA, PARA APLICACION  
DEL METODO DE LAGRANGE Y VOLUMENES DE CONTROL.

Norberto E. Molina

Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro (PUC RJ)  
Rua Marquês de São Vicente 225, (22459) R. J., Brasil.  
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Universidad Nacional del Sur (UNS)  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Pcia. Ba. Aa. .

RESUMEN

Se genera una grilla no uniforme sobre el campo computacional definido, en el cual son aplicados el método de las *características* y el método de los *volumenes finitos*, utilizando coordenadas generalizadas. El flujo viscoso simulado es resuelto numéricamente.

Distintas configuraciones son analizadas y al evaluarlas, se verifica la independencia de sus resultados.

Los detalles de este análisis están publicados en M.Sc., Molina [1].

ABSTRAC

Non uniform grid is generated on a definite computational field, in which "the characteristics" and "control volume" methods are applied using general orthogonal coordinates. The numerical solution of simulated viscous flow is solved.

Diferent configurations are analyzed and evaluated. Results demonstrated independence among them.

Details of this analysis are published in M.Sc., Molina [1].

**Breve descripción: consideraciones.**

Este trabajo tiene por objeto generar una grilla en el campo computacional definido, sobre el cual es aplicado el método de Lagrange y posteriormente el método de Volúmenes de Control, con el fin de simular un flujo laminar en torno de un cuerpo.

A los efectos de que la malla se adapte a la geometría del cuerpo se adoptó coordenadas curvilíneas, definiendo la grilla a partir de la solución potencial alrededor de un cilindro.

Para permitir detectar gradientes acentuados, el campo computacional se dividió en cuatro regiones en la dirección del flujo principal y una quinta en la dirección transversal superpuesta, variando el espaciamiento por método algébrico de forma tal de evitar que la malla continúe densa en regiones no necesarias.

Se realizaron varias experiencias, tomando precaución de evitar zonas con cambios bruscos de espaciamiento, manteniendo la simplicidad en el contorno, desplazando las mallas entre si en correspondencia con el cálculo de presión y el de las velocidades en cada una de sus direcciones. Se considera la presión aplicada en los nodos y las velocidades sobre las caras del volumen de control, con lo cual se tiene una malla superpuesta. Patankar [2].

Los resultados de las grillas propuestas se comparan entre si para un mismo número de Reynolds y para diferentes valores de este, según la distribución de presión, tensión viscosa y de velocidad en torno del cuerpo. Calculándose a partir de los valores hallados, el coeficiente de resistencia.

#### Hipótesis:

- Continuidad en las regiones establecidas.
- Ortogonalidad entre las direcciones  $\eta$  y  $\xi$ , en cada nodo.
- Cuatro regiones en la dirección del flujo principal (de  $-\infty$  a  $-2U_{\infty}\alpha$ ; de  $-2U_{\infty}\alpha$  a  $\theta$ ; de  $\theta$  a  $+2U_{\infty}\alpha$  y a partir de este punto hasta  $+\infty$ ).
- Una región superpuesta en la dirección perpendicular al flujo desde el eje de simetría (de  $\theta$  a  $+\infty$ ).
- Co incidencia física de estos puntos con el del plano real.

#### Geometría del problema y coordenadas escogidas.

Para el análisis del flujo externo, en torno de un cuerpo cilíndrico para bajos números de Reynolds se seleccionó el dominio de cálculo mostrado en la Figura 1.

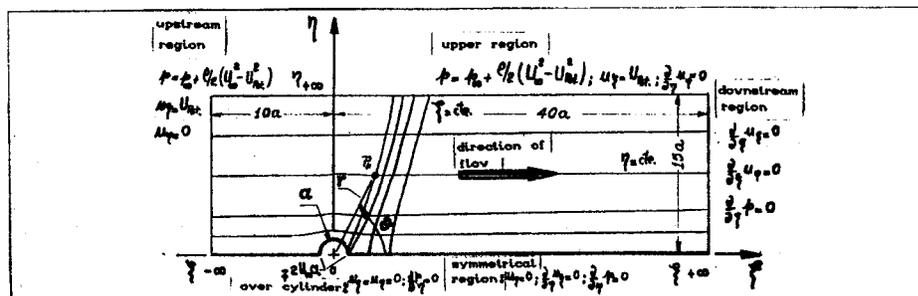


Fig. 1. Geometría del campo computacional.

Donde el cuerpo cilíndrico tiene un radio  $\alpha$  y su longitud es infinita, considerando para el cálculo una configuración bidimensional (2D) y teniendo en cuenta las condiciones del flujo, este presenta una distribución simétrica en torno del cuerpo, por lo cual el estudio se realizó a la mitad del dominio como se indica precedentemente. Encontrándose las fronteras del dominio físico en el infinito, tanto adelante como en la parte posterior del cuerpo, como así también en la región superior.

Con el objeto de obtener soluciones precisas y debido a la geometría analizada se eligieron coordenadas que se adapten a este esquema, coincidiendo éstas con la solución de un flujo potencial.

Las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  son coincidentes con las líneas de potencial de corriente y potencial de velocidad, que expresadas en función de las coordenadas cilíndricas  $r$  y  $\phi$ , presentan la forma:

$$\xi = U_{\infty} \left[ r + \frac{\alpha^2}{r} \right] \cos \phi \quad (1)$$

$$\eta = U_{\infty} \left[ r - \frac{\alpha^2}{r} \right] \sin \phi \quad (2)$$

ortogonalidad entre sí, y ajustándose a los límites del campo computacional, cuando corresponda.

El sistema elegido, simplifica el problema al expresar las ecuaciones de Navier-Stokes en cada una de sus componentes teniendo presente lo indicado por Maliska [3] y Thomson [4], entre otros.

Las dimensiones del dominio de cálculo tienen un valor finito en los contornos, estas son obtenidas a partir de la solución del campo computacional, para la abscisa  $\xi = \xi_{-\infty}$  y la coordenada  $\eta$  variando entre los valores ordenados de  $\emptyset \leq \eta \leq \eta_{+\infty}$  se tiene

$$u_{\xi} = U_{\text{pot}} \left( \xi_{-\infty}, \eta \right) \quad (3)$$

$$u_{\eta} = \emptyset \quad (4)$$

En la frontera superior la difusión es despreciable, esto es, en la dirección perpendicular al flujo principal; la ordenada es  $\eta = \eta_{+\infty}$  y abscisas  $\xi_{-\infty} \leq \xi \leq \xi_{+\infty}$ , para una solución potencial tendremos:

$$u_{\xi} = U_{\text{pot}} \left( \xi, \eta_{+\infty} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u_{\eta} = \emptyset \quad (6)$$

Adoptando para la frontera de salida la ausencia de flujo de difusión para ambas variables, según lo observado por Patankar [2].

#### Cálculo de las coordenadas polares a partir de $\xi$ e $\eta$ .

El método consistió en trabajar con las ecuaciones indicadas en (1) y (2), invertibles, de forma tal de expresar el radio  $r$  en función de las coordenadas conocidas, obteniendo así un polinomio de octavo orden en esta variable, con los coeficientes en función de las coordenadas curvilíneas  $\xi$  y  $\eta$ , como sigue:

$$\begin{aligned} r^8 + \frac{1}{U_{\infty}^2} \left( \xi^2 + \eta^2 \right) r^6 - 2 \alpha^2 \frac{1}{U_{\infty}^2} \left( \xi^2 - \eta^2 - \alpha^2 \right) r^4 + \\ + \alpha^4 \frac{1}{U_{\infty}^2} \left( \xi^2 + \eta^2 \right) r^2 - \alpha^8 = \emptyset \end{aligned} \quad (7)$$

La solución de este polinomio para el conjunto de puntos de interés se encontró desarrollando un algoritmo de cálculo optimizando los resultados para las raíces reales, en especial para las abscisa nula, con una Subrutina IMSL disponible (ZPLRC).

Una vez determinado el radio queda definido el ángulo, para el punto analizado.

Las componentes del vector velocidad en coordenadas polares  $u_r$  y  $u_{\theta}$  son

obtenidas a partir de:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \eta \quad (8)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \eta \quad (9)$$

que en función de sus componentes, resulta:

$$u_r = U_\infty \left[ r - \frac{a^2}{r^2} \right] \cos \theta \quad (10)$$

$$u_\theta = -U_\infty \left[ r + \frac{a^2}{r^2} \right] \sin \theta \quad (11)$$

El módulo del vector velocidad, en el punto considerado, queda determinado por la suma de los cuadrados de sus componentes, siendo este tangente a la línea de corriente pasante por el punto; y los vectores unitarios, tienen la dirección principal y perpendicular a ésta, luego:

$$\bar{V} = |\bar{V}| \bar{e}_s \quad (12)$$

Dado que sobre la línea de corriente es válida la ecuación de Bernoulli la presión queda determinada en el punto, y es calculada mediante:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} \left[ U_\infty^2 - U_{pot}^2 \right] \quad (13)$$

#### Coordenadas curvilíneas:

El vector velocidad puede ser escrito en sus componentes generalizadas, como sigue:

$$\bar{V} = u_\xi \bar{e}_\xi + u_\eta \bar{e}_\eta \quad (14)$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  indican las direcciones,  $\bar{e}_\xi$  y  $\bar{e}_\eta$  son los vectores unitarios. Introduciendo los coeficientes métricos, en sus respectivas direcciones, calculados por medio de:

$$h_\xi^{-2} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \xi \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \xi \right]^2 \quad (15)$$

$$h_\eta^{-2} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \eta \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \eta \right]^2 \quad (16)$$

La derivada de la velocidad, en sus dos componentes, esta dada por:

$$\frac{D}{Dt} \bar{V} = \frac{D}{Dt} \bar{V} \Big|_\xi \bar{e}_\xi + \frac{D}{Dt} \bar{V} \Big|_\eta \bar{e}_\eta \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que los vectores unitarios varían según la posición, la componente en la dirección  $\xi$  es:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \bar{v} \Big|_{\xi} &= \frac{\partial}{\partial t} u_{\xi} + \frac{u_{\xi}}{h_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} u_{\xi} + \frac{u_{\eta}}{h_{\xi}} \frac{\partial}{\partial \eta} u_{\xi} + \\ &+ \frac{1}{h_{\xi}} \frac{u_{\eta}}{h_{\eta}} \left[ u_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} h_{\xi} - u_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} h_{\eta} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

y la componente en la dirección  $\eta$ , es del mismo tipo.

#### Coordenadas del problema presentado:

Las coordenadas de cada uno de los puntos que conforman la malla se hallan por medio las ecuaciones (1) y (2), donde  $\xi$  y  $\eta$  fueron obtenidos en función de sus coordenadas cartesianas.

$$\xi = U_{\infty} \left[ r + \frac{1}{x^2 + y^2} \right] x \quad (19)$$

$$\eta = U_{\infty} \left[ r - \frac{1}{x^2 + y^2} \right] y \quad (20)$$

Calculándose a partir de éstas las métricas indicadas en (15) y (16).

#### **Generación de la grilla:**

De acuerdo con lo sugerido por Patankar [2], en el método B, la grilla dentro del dominio computacional es determinada al especificar las coordenadas de los volúmenes de control finitos  $\xi_w$  y  $\eta_s$  o bién la posición de las componentes de la velocidad  $\xi_{u_i}$  y  $\eta_{v_j}$ . Para la dirección  $\eta$ , con espaciamento no uniforme, se utilizó la siguiente ecuación:

$$\eta_{v_j} = \eta_{\infty} \left[ (j-2) / NCV_j \right]^{\psi_{\eta}} \quad (21)$$

con  $2 \leq j \leq NCV_j + 2$ , donde  $NCV_j$  es el número de volúmenes de control en la dirección  $j$  coincidente con  $\eta$ , y  $\psi$  el exponente en la misma dirección.

De lo expresado precedentemente, el campo computacional en la dirección  $\xi$  fue dividido en cuatro subregiones, empleándose para ello las siguientes ecuaciones:

Región I: delante del cilindro.

$$\xi_{u_i} = \xi_{\infty} - (\xi_{\infty} + 2 U_{\infty} \alpha) \left[ (i-2) / NCV_{\xi_1} \right]^{\psi_{\xi_1}} \quad (22)$$

Región II: sobre el cilindro hasta una perpendicular imaginaria pasante por el centro del semi-cilindro, apartir de la curva determinada por  $-2U_{\infty} \alpha$ :

$$\xi_{u_i} = -2 U_{\infty} \alpha \left[ 1 - \left( i - (NCV_{\xi_1} + 2) \right) / NCV_{\xi_2} \right]^{\psi_{\xi_2}} \quad (23)$$

Región III: sobre el cilindro y posterior a ésta perpendicular

imaginaria, hasta la curva pasante por el punto de estagnación  $+2U_{\infty}\alpha$  :

$$\xi u_i = 2 U_{\infty} \alpha \left[ \left( i - (NCV_{\xi_1} + NCV_{\xi_2} + 2) \right) / NCV_{\xi_3} \right]^{1/2} \xi^3 \quad (24)$$

Región IV: detrás del semi-cilindro, apartir de la curva dada por  $-2U_{\infty}\alpha$  y el eje de simetría.

$$\xi u_i = 2 U_{\infty} \alpha + (\xi_{\infty} - 2 U_{\infty} \alpha) \left[ \left( i - (NCV_{\xi_1} + NCV_{\xi_2} + NCV_{\xi_3} + 2) \right) / NCV_{\xi_4} \right]^{1/2} \xi^4 \quad (25)$$

#### Resumen del algoritmo de cálculo:

Se leen las variables físicas y dimensiones del dominio de cálculo, los parámetros de control de ejecución del programa así como el número de volúmenes finitos deseados en cada región y el grado de no uniformidad.

Se determinan las métricas, tamaño de las celdas, distancias entre nodos, radios y ángulos para cada posición del nodo respectivo, y posiciones de las caras anterior y sur de estos volúmenes.

Se calculan los valores de presión y velocidad de un flujo potencial.

## RESULTADOS

### Grillas obtenidas:

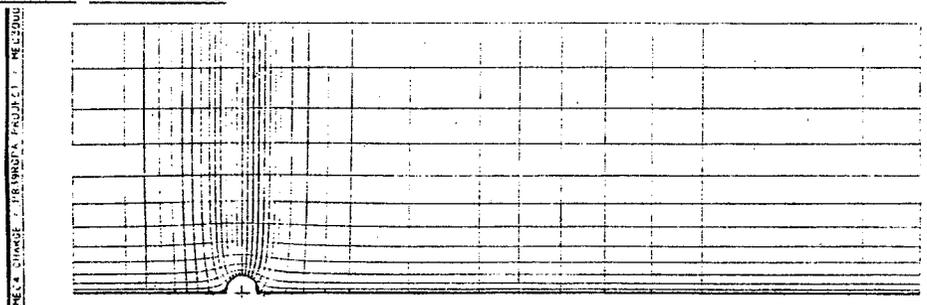


Fig. 2, Malla de 40x15.

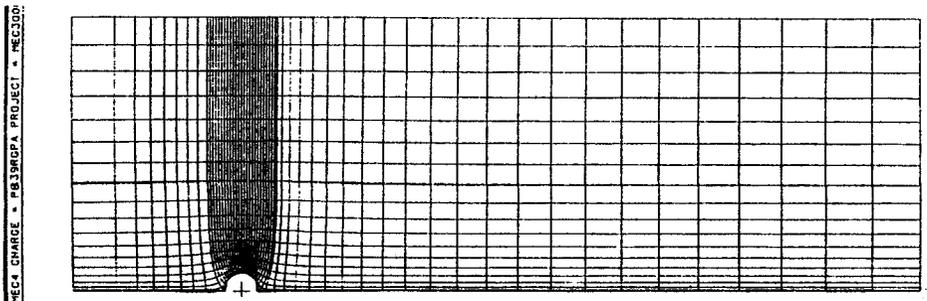


Fig. 3, Malla de 58x20.

A partir del conjunto de nodos hallados uniéndolos en forma conveniente, usando para ello subrutinas de interpolación y el utilitario gráfico NCAR disponible en el sistema Syber 170/800, se lograron las Figuras 2, 3 y 4.

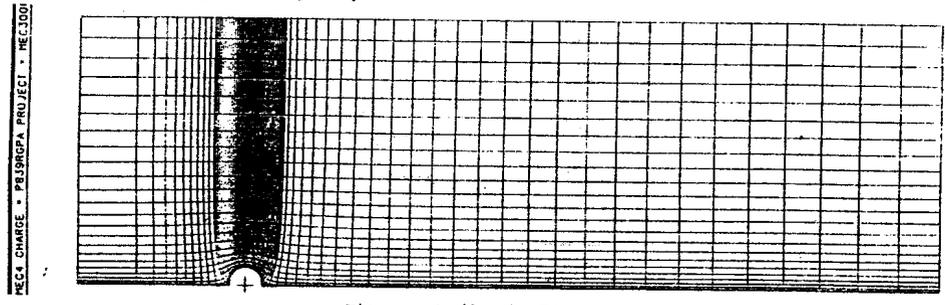


Fig. 4. Malla de 74x25.

Utilizando el mismo algoritmo adaptado al mainframe VAX11/VMS y el utilitario para graficar Template, se logró la Figura 5, siguiente:

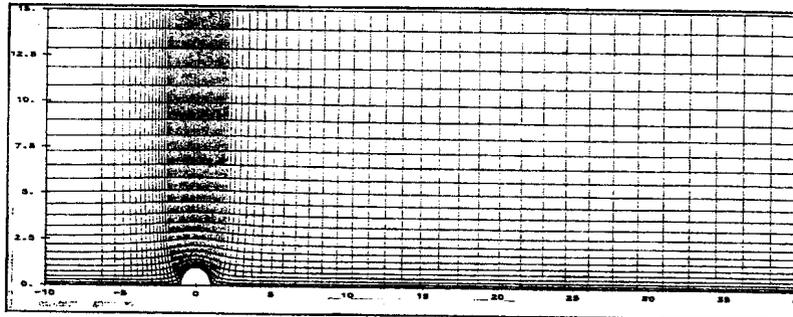


Fig. 5. Malla de 90x27.

#### Cálculo de la tensión y presión. Test de malla

La tensión y presión es calculada en el primer punto intermedio de la grilla en la dirección  $\eta$ , sobre la superficie del cilindro. Teniendo en cuenta la condición de contorno impuesta  $\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$ ; luego:

$$p_s = p_{int} \quad (26)$$

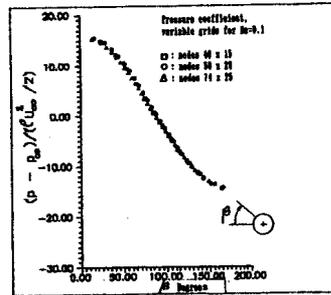
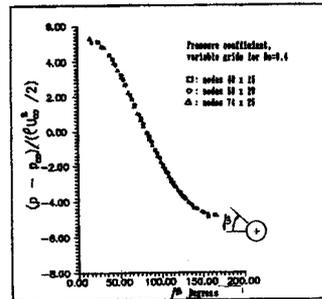
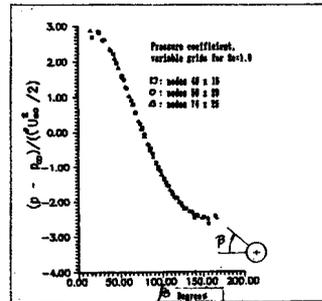
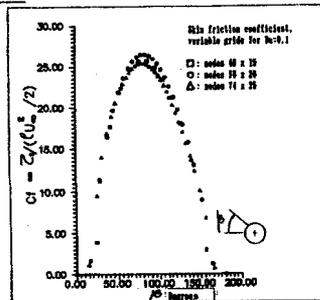
La tensión viscosa  $\tau_s$ , fue obtenida por intermedio de la ecuación:

$$\tau_s = \mu \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} u_\zeta \quad (27)$$

adoptando una variación cuadrática para el perfil de velocidades  $u_\zeta$  en función de la coordenada  $\eta$ , e interpolando a estos, con el objeto de obtener el valor nodal.

#### Distribución de presión:

De la observación de las Figuras 6, 7 y 8, se aprecia que la distribución de presión para el conjunto de pares de puntos simulados presenta una pequeña diferencia porcentual para cada ordenada.

Fig. 6. Distribución de presión sobre el cilindro  $Re=0,1$ .Fig. 7. Distribución de presión sobre el cilindro  $Re=0,4$ .Fig. 8. Distribución de presión sobre el cilindro  $Re=1,0$ .Distribución de tensión:Fig. 9. Distribución de tensión para  $Re=0,1$ .

El cálculo de la tensión viscosa sobre el cilindro se realizó en función del campo de velocidades obtenido en la simulación una vez alcanzado el régimen permanente. Se aprecia gráficamente en la Figuras 9, 10 y 11, que la distribución del coeficiente de fricción local, para el rango de números de Reynolds de 0,1; 0,4 y 1,0; utilizando diferentes pares de puntos para la malla, es aceptable, dada la proximidad de las curvas.

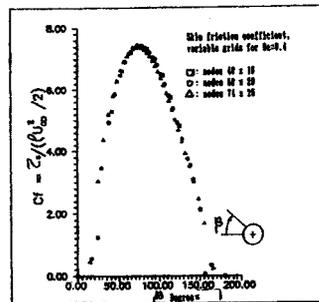


Fig. 10. Distribución de tensión para  $Re=0.4$ .

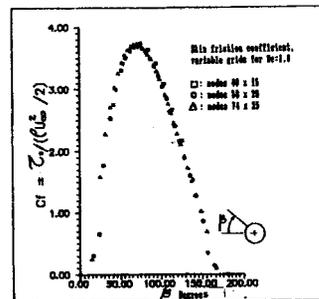


Fig. 11. Distribución de tensión para  $Re=1.0$ .

Como referencia de comparación, se graficó una distribución de presión obtenida en la bibliografía consultada Underwood [5] en torno de un cilindro y sobre la superficie de este, por el método de truncamiento de quinto orden, de una serie. De la observación en la Figura 12, se aprecia que la distribución de presión calculada para el conjunto de pares puntos utilizados es próxima a la de referencia.

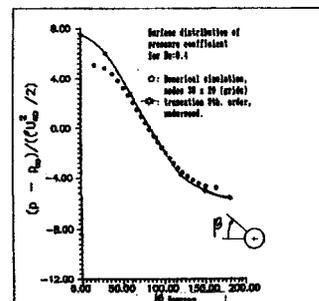


Fig. 12. Distribución del coeficiente de presión, para  $Re=0.4$ .

Obtuvieronse buenos resultados en general para bajos números de Reynolds, verificándose la validés de la ecuación empírica de Ossen, para valores próximos a uno.

Con el objeto de captar el posible inicio de desprendimiento de la vena fluida, se utilizó mallas mucho más apretadas o densas: 80x25 y 90x27 nodos (ver Figura 5), y un número de Reynolds igual a 5,45.

#### Cálculo del coeficiente de resistencia: Cd

El cálculo del coeficiente de resistencia Cd para el rango de números de Reynolds simulados: 0,1; 0,4 y 1,0; fue efectuado mediante la ecuación

$$Cd = Fa / (\rho U_{\infty}^2 (Ap / 2)) \quad (28)$$

donde Fa es la fuerza de arrastre, Ap el área proyectada en la dirección normal al flujo principal.

Los resultados son independientes de la malla computacional escogida, redundando en una mayor exactitud para aquella más densa, a cambio de un mayor tiempo de ejecución y la necesidad de disponer mayor capacidad de memoria, no determinándose el comienzo del vórtice para la configuración simulada.

#### **Conclusiones:**

C1-Se obtuvo buena aproximación con la malla ajustada según la distribución de un potencial.

C2-La independencia de los resultados hallados respecto a las diferentes grillas utilizadas en el rango de números de Reynolds simulados.

C3-Con grillas superpuestas y desplazadas entre sí, resulta más fácil el cálculo de la presión y de las velocidades en cada una de las direcciones.

#### **REFERENCIAS**

[1] Molina, N.E., Aplicação do Método Lagrangeano à solução numérica do escoamento laminar transversal a um cilindro infinito. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil 1970.

[2] Patankar, S.V., Numerical heat transfer and fluid flows. Mc.Graw Hill, N.Y. 1980.

[3] Maliska, C.R., Solução numérica de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos em coordenadas generalizadas. I ENCIT, RJ, Brasil, pp27-38, 1986.

[4] Thompson, J., Grid generation techniques in computational fluid dynamics. AIAA Journal, Vol. 22, n° 11, november 1984.

[5] Underwood, R.L., Calculation of incompressible flow past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers. J. Fluid Mech., Vol. 37, part 1, pp95-114, 1969.