

1 APROXIMACION NUMERICA DEL FLUJO POTENCIAL EXTERIOR POR UN METODO DE  
ELEMENTOS DE BORDE EN VARIABLE COMPLEJA

*Jorge D'Elia\*, Mario Storti† y Sergio R. Idelsohn†*

INTEC(CONICET-UNL) Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina

**RESUMEN**

Se describe un algoritmo numérico basado por el Método de Elementos de Borde en Variable Compleja (MEBVC) para resolver problemas potenciales en 2D. El modelo matemático adoptado aquí es una Formulación Integral sobre el Borde, expresada por la integral de Cauchy en el plano complejo. Se adopta una función de ensayo lineal, continua por partes. La integral se evalúa analíticamente, con puntos de colocación en los extremos de los elementos. La gran ventaja del método es disminuir en una unidad la dimensión geométrica del problema considerado. En este trabajo, se aplicó esta formulación en algunos casos de flujo potencial exterior (aerodinámica-hidromecánica).

**SUMMARY**

A numerical algorithm based on the Complex Boundary Element Method (CVBEM) for to solve 2D potential problems, is described. The mathematical model adopted her is an Integral Formulation on the Boundary, expressed by the Cauchy integral in the complex plane. A piecewise lineal trial function is adopted. The integral is analitically evaluted, with collocation points in the extremis of the elements. The great advantage of the method is that, it reduces in a unit the number of the geometric dimensions in the problem considered (like other Boundary Element Methods). In this work, this formulation is applied in some tests of exterior potential problems (aerodynamics/hydromechanics).

**Modelo Físico**

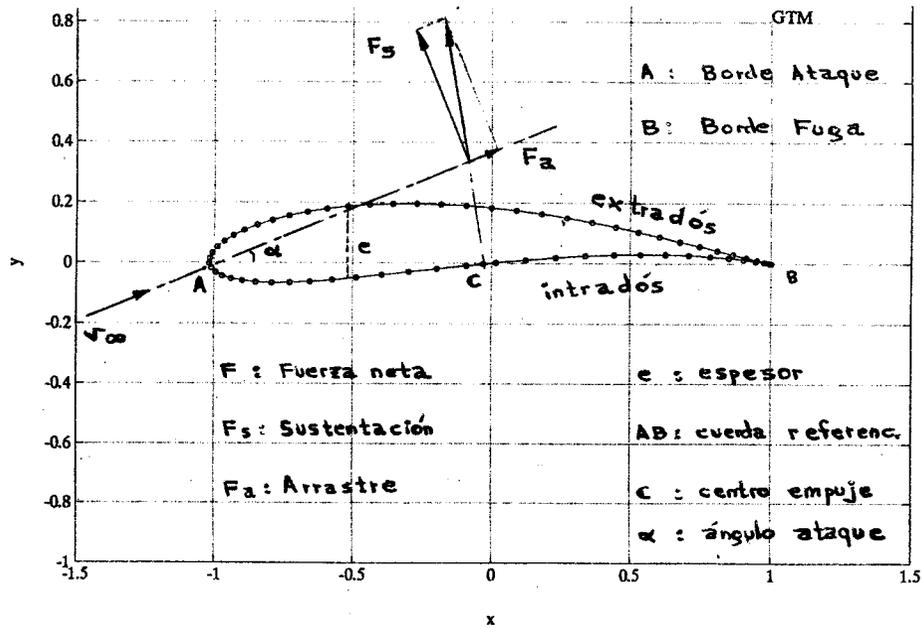
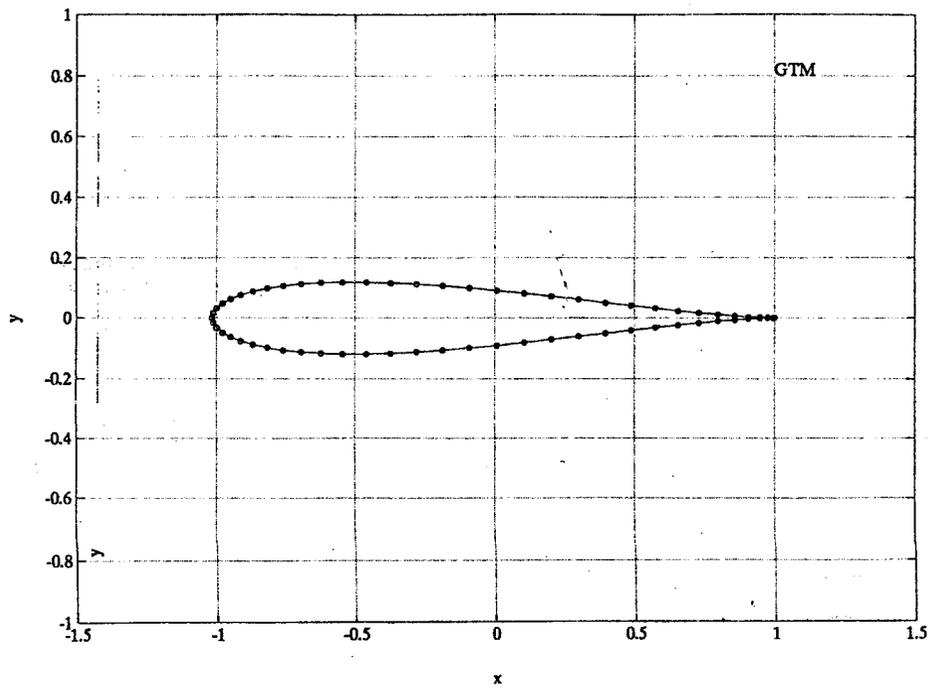
Un problema ingenieril que surge en aerodinámica y en hidromecánica es el cálculo de fuerzas y cuplas resultantes sobre un objeto inmerso en un escurrimiento fluido. Para el cálculo de la fuerza neta se debe integrar las fuerzas diferenciales de presión y viscosas, a lo largo del contorno del objeto. Para el cálculo de la cupla neta se debe integrar el momento de la fuerza diferencial con respecto a algún punto de referencia.

Si la dirección de referencia es la dirección del escurrimiento no perturbado, se tiene que la componente normal de la fuerza neta es la fuerza de sustentación (Lift) y la componente tangencial es la fuerza

---

\* Becario de Iniciación del CONICET

† Miembro de la Carrera del Investigador Científico del CONICET

perfil Joukowski  $c = -0.1 + 0.0i$  64 nodos

de arrastre (Drag). Para el cálculo de las fuerzas de presión y viscosas a lo largo del contorno, se debe conocer la distribución de la velocidad sobre dicho contorno.

Todos los fluidos reales son viscosos. Es conocido que la importancia relativa de las fuerzas viscosas con respecto a las fuerzas de inercia está cuantificado por el número de Reynolds (Fza viscosa/Fza inercia). Debido a la baja viscosidad del aire y del agua, el número de Reynolds para situaciones prácticas usuales es muy alto, esto es, las fuerzas viscosas son muy pequeñas comparadas con las fuerzas de inercia. Para el flujo alrededor de perfiles aero/hidro dinámicos, cuando el flujo no se desprende del perfil, es posible aplicar la hipótesis de Prandtl: suponer que la influencia de la viscosidad está confinada dentro de una muy delgada capa de flujo alrededor de la pared sólida del perfil (capa límite), por lo que la región externa a dicha capa se comporta como si la viscosidad fuera nula. Así al contrastarse con datos experimentales, la teoría de flujo potencial (incompresible, no viscoso), predice extremadamente bien la distribución de presión y la fuerza de sustentación de los perfiles aero/hidro dinámicos [Lift], para ángulos de ataque en que no se produce desprendimiento de la capa límite. Por otra parte, el cálculo potencial puede considerarse previo (input) para un cálculo de la capa límite. Es posible también considerar un esquema interactivo entre la capa límite y la región considerada como potencial.

Un requisito físico adicional a verificar es la condición de Kutta: el flujo debe ser tangente en el borde de fuga. Debido a esto, la circulación alrededor del perfil es no nula, lo cual está directamente relacionado con la fuerza de sustentación (teorema de Joukowski).

Si se produce desprendimiento de la capa límite, se distingue una zona de estancamiento ó de inestabilidad y el resto no perturbado. En tal caso debe determinarse:

1. Predicción de la influencia de la región separada sobre el flujo potencial no perturbado.
2. Predicción de las fuerzas y transferencias de masa entre ambas regiones, a los efectos del análisis de la estabilidad de flujo.
3. Predicción de las pérdidas inducidas por la separación.

Una suposición básica es asumir presión constante dentro de la región de estancamiento. Esto concuerda bien en flujos separados estacionarios. Las suposiciones de presión constante e incompresibilidad dan origen al método de la línea de corriente libre de Helmholtz - Kirchhoff en sus diferentes variantes [1].

En definitiva: un cálculo potencial (incompresible, no viscoso) con circulación no nula y sin desprendimiento de la capa límite, es una razonable primera aproximación para el cálculo de la fuerza neta (sustentadora - arrastre) y de la cupla neta, sobre un perfil (aero/hidro) dinámico o un paso previo al cálculo de la capa límite.

### **Modelo Matemático en 2D**

Suponemos que el campo de velocidades es un campo vectorial finito uniforme y continuo. Suponemos fluido incompresible e irrotacional.

Entonces [2] :

$$\nabla \times \bar{v} = 0 \quad \therefore \quad \bar{v} = \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad \therefore \quad \bar{v} = \nabla \times \bar{\psi} \quad ; \quad \bar{\psi} = (0, 0, \psi)$$

donde:  $\phi$  : potencial escalar ;  $\psi$  : función corriente  
pero:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{x}^0 + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{y}^0 \\ \nabla \cdot \bar{v} &= \frac{\partial}{\partial x} (v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

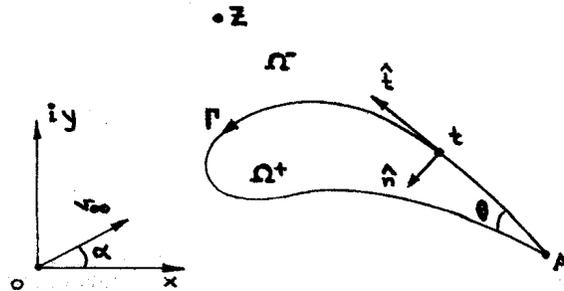
es decir, el potencial verifica la ecuación de diferencial de Laplace  
Análogamente:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \nabla \times \bar{\psi} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \bar{x}^0 + \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \bar{y}^0 \\ \nabla \times \bar{v} &= \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \bar{z}^0 = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

es decir, el vector corriente verifica la ecuación diferencial de Laplace.

Si el dominio  $\Omega$  es simplemente conexo, entonces  $(\phi, \psi)$  son funciones unívocas que se pueden obtener resolviendo la ecuación diferencial de Laplace en el Dominio  $\Omega$ , teniendo en cuenta las condiciones de borde sobre el Borde  $\Gamma$  (Dirichlet y/o Neuman).

Se considera ahora el Dominio Exterior  $\Omega^-$  a un perfil aerodinámico  $\Gamma$ , con frontera al infinito  $\Gamma_\infty$ , en 2D:



Pero ahora el Dominio Exterior es múltiplemente conexo. Las funciones potenciales son ahora multivaluadas [3]. Para dar unicidad a la solución se debe imponer la circulación alrededor del perfil, la cual puede tenerse en cuenta en una forma indirecta, a partir del requisito físico expresado por la condición de Kutta: el flujo debe ser tangente en el borde de fuga. Esto le da un único valor a la circulación alrededor del perfil [4]. Es inmediato verificar que  $(\phi, \psi)$  son funciones armónicas conjugadas, esto es, verifican las condiciones de Cauchy-Riemann en la teoría de variable compleja:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

esto sugiere definir el potencial complejo:

$$\omega(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

$$z = x + i y$$

Para el potencial complejo es posible plantear una ecuación integral de borde, que es la ecuación integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\omega(t)}{t-z} dt$$

En forma equivalente se puede considerar en lugar del potencial complejo la velocidad compleja [5]:

$$w(z) = \omega^{(1)}(z) = \frac{d\omega}{dz}$$

$$w(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$w(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$w(z) = v_x + i(-v_y) = (v_x, -v_y)$$

y considerar la integral de Cauchy para ella:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt$$

Donde el contorno  $\Gamma$  se conviene recorrerlo en sentido antihorario. Según la fórmula de la integral de Cauchy para el Dominio Exterior [6]

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt = w(\infty) - w(z) \quad ; \quad z \in \Omega^-$$

$$\therefore w(z) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{w(t)}{t-z} dt = w(\infty)$$

Donde la velocidad en el infinito es la velocidad de la corriente uniforme. Esta Formulación Integral sobre el Borde  $\Gamma$  es la empleada en la Formulación Numérica.

Entonces, es posible buscar la función solución resolviendo una ecuación integral sobre el borde (esto es posible también en variable real mediante otros métodos). Una nítida ventaja de pasar una Formulación Diferencial en el Dominio, a una una Formulación Integral sobre el Borde, es la de reducir en una unidad la dimensión del problema considerado, confinando la atención sólo en el contorno. Esto es también ventajoso para presente caso, donde parte del dominio se extiende al infinito. Luego de resolver el problema sobre el borde, si se desea se puede calcular con facilidad la solución en todos los puntos de interés del Dominio Exterior.

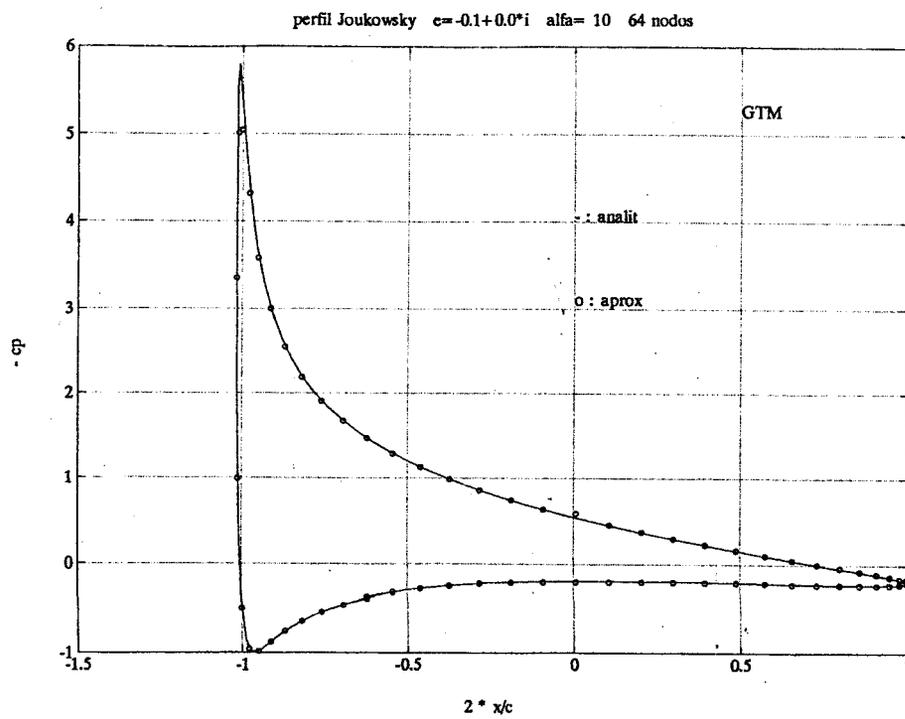
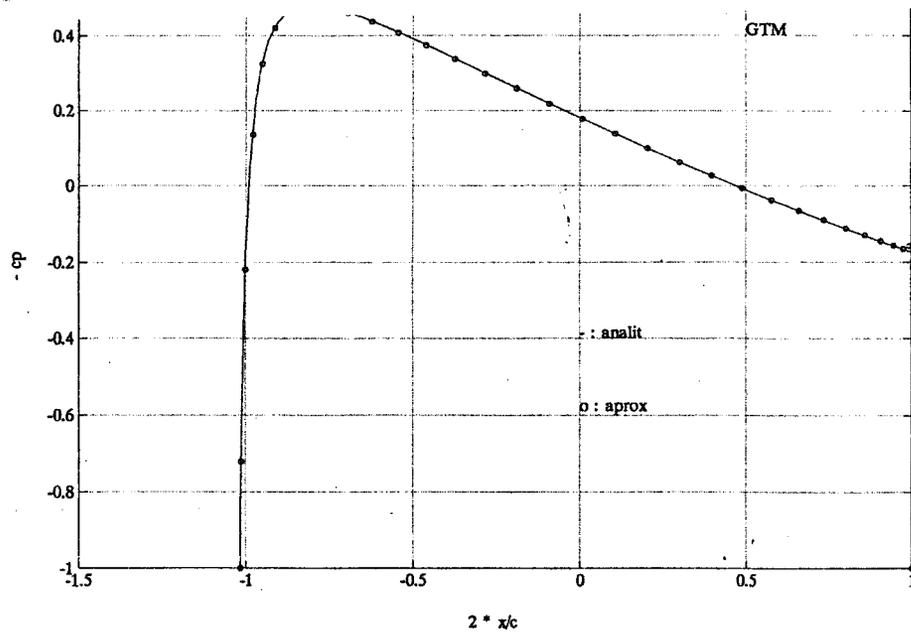
#### Modelo numérico

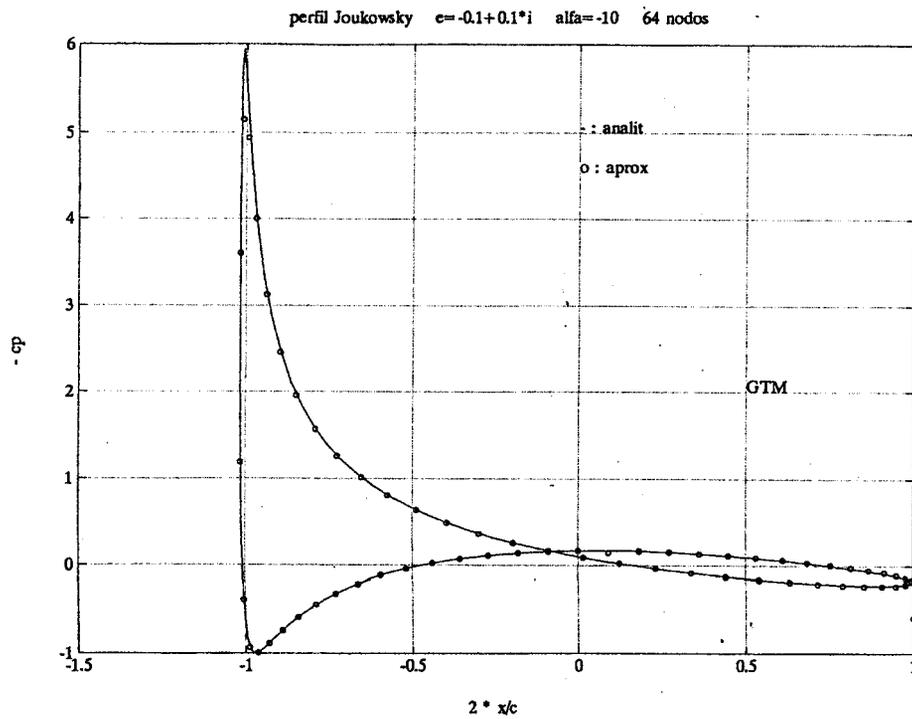
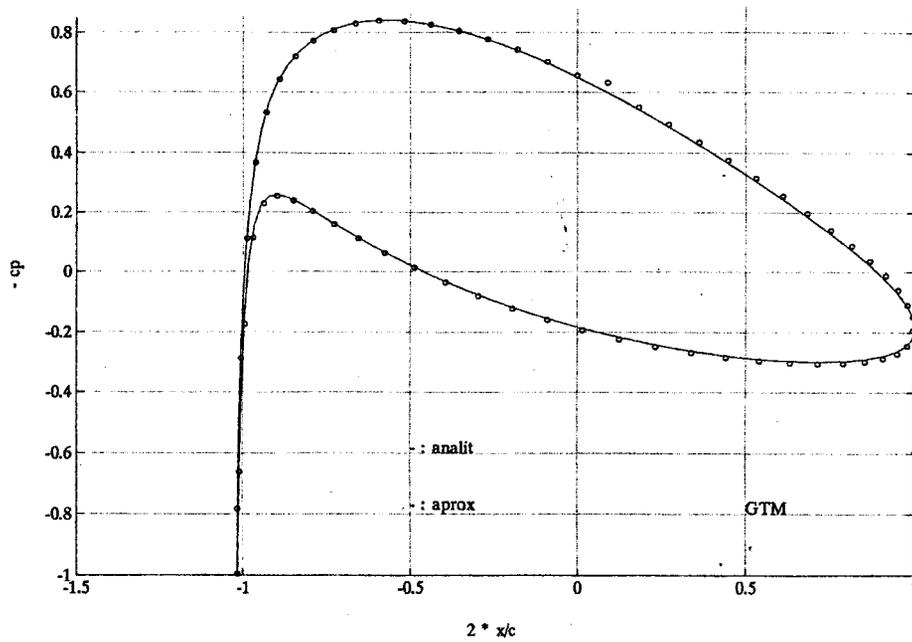
En un modelo numérico por Elementos de Contorno (ya sea en variable real ó en variable compleja), el problema es sólo discretizado sobre el Borde, por ello el error del método se confina sólo sobre él. Otra consecuencia de discretizar sólo el borde es que el número de incógnitas nodales, es mucho menor que una discretización global sobre el Dominio y Borde, para una misma precisión exigida. Como contrapartida la matriz de coeficientes del Sistema de Ecuaciones Algebraicas Lineales (SEAL) resulta llena. Debido a esto, los algoritmos basados con esta formulación, son más eficientes de implementar en computadores vectoriales.

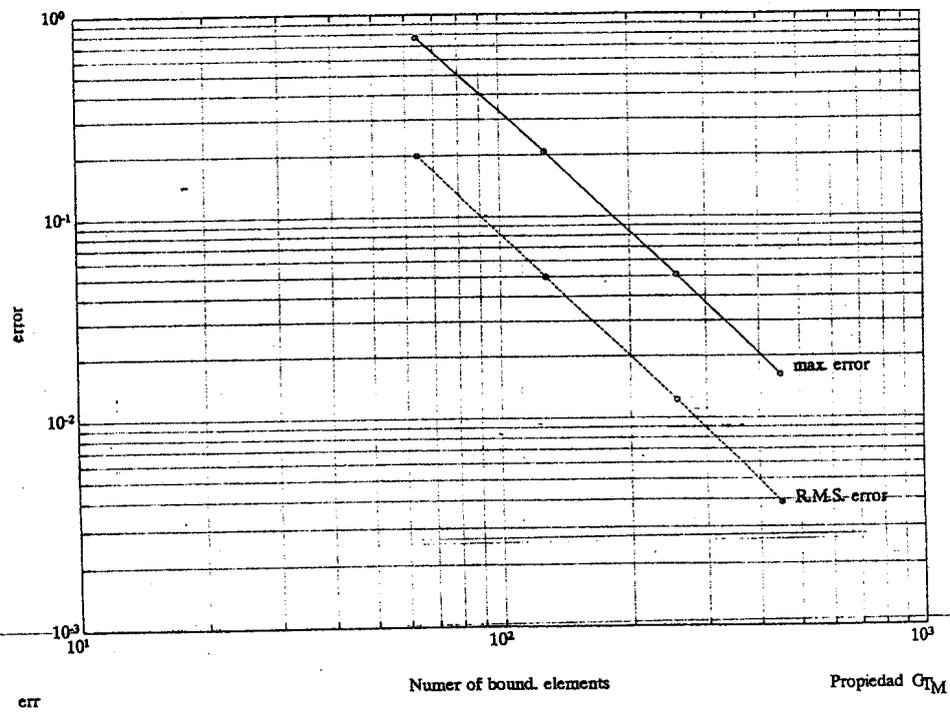
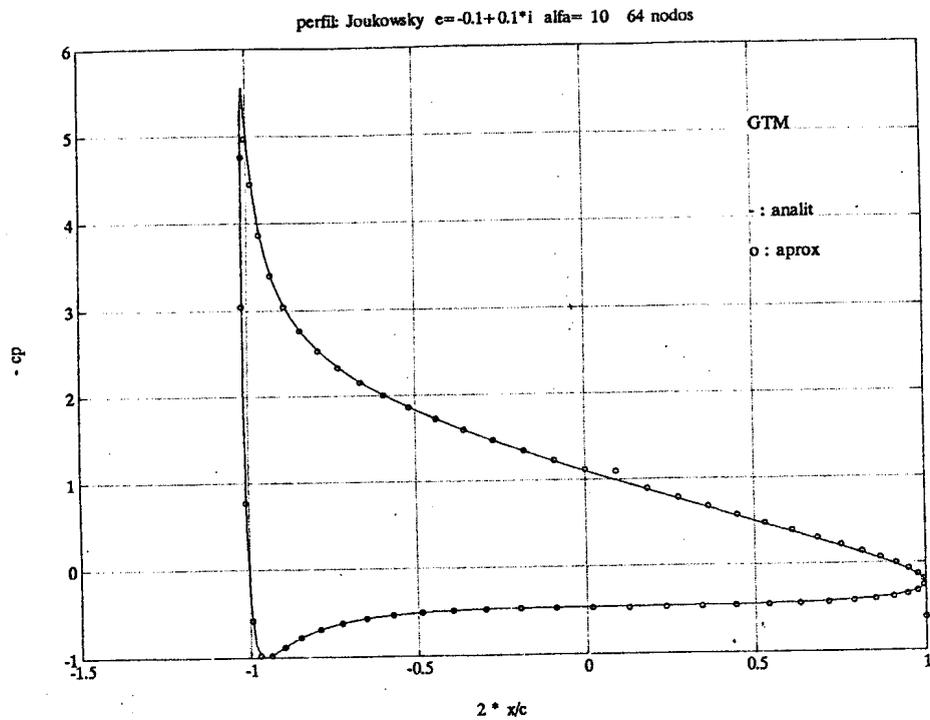
El Método de Elementos de Borde (y su caso particular el Método de Paneles [7]) es uno de los más conocidos por los aerodinamicistas para la resolución de flujos no viscosos alrededor perfiles (aero/hidro) dinámicos (turbomaquinaria, propulsores para barcos, helicópteros) y resulta ser mucho menos costoso que una formulación basada en una resolución directa de las ecuaciones de Euler.

En el presente caso se adoptó una discretización con Elementos de Borde en Variable Compleja [8] de dos nodos, es decir, dentro de un elemento genérico se propuso una función de ensayo lineal. La función de ensayo global es suma de las funciones de ensayo elementales. La integral se evaluó analíticamente, los puntos de colocación se eligió ubicarlos en los extremos de los elementos, lo que originó una singularidad que debió ser salvada. Se obtuvo así un SEAL en variable compleja, donde las incógnitas son las componentes tangenciales y normales de las velocidades en los nodos ubicados sobre el perfil.

Se adjuntan algunos casos de perfiles de Joukowsky, simétricos y no simétricos con condición de Kutta incorporada, donde se comparan los coeficientes de presión dados por las soluciones analíticas con las obtenidas en forma numérica.







**Conclusiones:**

Se ha descrito muy sucintamente un Método de Elementos de Borde en Variable Compleja, aplicado a problemas de flujo potencial exterior (incompresible, no viscoso). Se obtuvo así un SEAL en variable compleja. Se plantearon dos estrategias para su solución: considerando la parte real (método A), considerando la parte imaginaria (método B), por separado.

En las experiencias numéricas realizadas: cilindro, elipse, perfiles de Joukowski simétricos y asimétricos (con condición de Kutta incorporada), para diferentes ángulos de ataque, contrastando con soluciones analíticas disponibles, se observó:

1. En iguales condiciones, con el método A (parte real) condujo a una solución numérica más cercana a la solución analítica, que con el método B (parte imaginaria).
2. Cuando se consideró el método B (parte imaginaria), en ciertos casos se observó en ciertas mallas un comportamiento indeseado de la solución numérica (en particular, en nodos ubicados sobre ejes de simetría).
3. El número de condición de la matriz de coeficientes del método B (parte imaginaria), resultó en algunos casos considerados un orden de magnitud de 1000 mayor que el de la parte real.
4. Se corrieron iguales casos con 64, 128, 256, 512, 1024 nodos, se observó en forma empírica una convergencia tipo  $h$  cuadrado. ( $h$ : tamaño máximo del elemento). Se trazó la curva logarítmica de convergencia a la solución exacta del continuo. Se observó razonables aproximaciones con un número relativamente bajo de nodos considerados (64 nodos).

Por otra parte, la formulación integral en velocidades considerada, permite incorporar lo que sucede en el infinito sin la necesidad de mallar dicha zona alejada y el dilema de decidir dónde colocarla. Una opción de esta formulación es la posibilidad de incorporar un flujo de transpiración (útil en capa límite).

Esta formulación en variable compleja no difiere en esencia de la una equivalente para variable real. Es cómoda su implementación debido a las propiedades de la variable compleja. Para una formulación para 3D puede intentarse formular un esquema equivalente en variable real en velocidades.

**Referencias**

- [1] Townsend, A. A., Turbulence; Handbook of Fluid Dynamics, Edited by Streeter V.L., Mc Graw-Hill (1961), 11.2-11.25.
- [2] Morse and Feshbach, Methods of Theoretical Physics, Part 1, (1953), 152-162.
- [3] Muskhelishvili, N.I., Singular Integral Equations, Noordhoff(1953)
- [4] Bertin J.J. and Smith M.L., Aerodynamics for Engineers, 106-130.
- [5] Mokry M., Complex Variable Boundary Element Method for External Potential Flows, 28 th Aerospace Sciences Meeting, Amer. Inst. Aeron. & Astr. (1990).
- [6] Gakhov F. D., Boundary Value Problems, Noordhoff (1966).
- [7] Wirz H. J. and Smoderen J.J., Numerical Methods in Fluid Dynamics, Mc Graw-Hill (1978), Chapter 4.
- [8] Hromadka T. V., Complex Variable Boundary Elements in Computational Mechanics; Topics in Boundary Element Research Volume 3, Edited by C.A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlín, 1984, págs.191-234.