

**RESOLUCION POR ELEMENTOS FINITOS
DEL PROBLEMA DE CONTACTO SIN FRICCIÓN EN FLUIDOS**

M. Magdalena Blanco

Inst. de Mec. de los Fluidos e Ing. Ambiental,
Fac. de Ingeniería, Univ. de la República,
J.Herrera y Reissig 565, CP 11300, Montevideo, Uruguay

Margarita M. Ruda

CNEA-CONICET, Centro Atómico Bariloche, 8400 Bariloche, Argentina

RESUMEN

Se presenta un programa de Elementos Finitos para resolver el problema de contacto unilateral sin fricción utilizando la formulación de fluidos. Se analiza el paralelismo entre el problema de Stokes y el de sólidos elásticos incompresibles. Se discute el problema de contacto unilateral sin fricción para el caso del problema de Stokes, y se lo resuelve numéricamente utilizando multiplicadores de Lagrange y un algoritmo dual. Se muestran ejemplos de validación del programa así como de su extensión a ciertos casos de fluidos viscoplásticos.

ABSTRACT

A FEM program to solve the unilateral contact problem using the flow formulation is presented. An analysis of the parallelism between the Stokes problem and the incompressible elastic solids problem is performed. The unilateral, frictionless contact problem is treated by Lagrange multipliers and solved numerically by a dual algorithm. Some results that validate the program are shown. The program has been extended to some cases of viscoplastic fluids.

INTRODUCCION

El presente trabajo tuvo su origen en una propuesta recibida en la División de Mecánica Computacional del Centro Atómico Bariloche por parte de la Planta Piloto de Fabricación de Aleaciones Especiales de la C.N.E.A.. La misma se refería a modelar el proceso de extrusión de lingotes de zircaloy utilizados para la fabricación de vainas de elementos combustibles destinados a la Central Atucha, dado que el mismo adolecía de ciertos defectos.

El objetivo era pues lograr una mayor comprensión del proceso de extrusión, para detectar las causas de dichas fallas y proponer posibles soluciones a fin de obtener un producto final de calidad superior y al mismo tiempo reducir costos de fabricación.

Para un primer modelo del proceso se utilizó un programa elementos finitos para sólidos elastoviscoplásticos existente en el C.A.B. [1,2]. Pudo detectarse una alta concentración de tensiones negativas en la zona de la boquilla de salida del extrusor. Esto condujo a pensar que allí debía tener lugar una separación localizada entre vaina y matriz y que la misma tenía como indeseable consecuencia el "arraste" de pequeñas cantidades del material usado como lubricante de la matriz (Cu), lo que explicaba su presencia en el producto final.

El grupo de trabajo se hallaba por entonces dedicado a la generación de un paquete de programas para simular el proceso de extrusión formulando el mismo en términos de fluidos y se propuso plantear el problema de contacto dentro de este marco.

El presente trabajo se desarrolla de la siguiente manera: se fundamenta la equivalencia del problema de contacto unilateral en sólidos en términos de fluidos y se presenta la correspondiente formulación; se describe el método numérico utilizado y finalmente se analizan los resultados obtenidos.

EL PROBLEMA SIN CONTACTO

Consideremos un medio continuo B, el cual ocupa una región $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N=2,3$), de frontera Γ . Sobre el mismo actúa un sistema de fuerzas externas (\vec{f}, \vec{g}) , siendo: \vec{f} un campo de fuerzas de volumen definido sobre Ω y \vec{g} un campo de fuerzas de superficie definido sobre $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$.

El paralelismo existente entre el comportamiento en el equilibrio de sólidos elásticos isotrópicos e incompresibles (para el caso de pequeñas deformaciones) y el de un flujo de Stokes se pone de manifiesto si nos remitimos a las expresiones obtenidas para la formulación variacional de ambos problemas [3]:

$$\text{Hallar } (\vec{u}, p) \in W \times Q \text{ tal que :} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{w}) + c(p, \vec{w}) &= l(\vec{w}) \\ c(q, \vec{u}) &= 0 \quad \forall (w, q) \in W \times Q \end{aligned}$$

siendo :

$$W = \left\{ \vec{w} : \vec{w} \in [L^2(\Omega)]^N ; \omega_{i,j} \in L^2(\Omega) ; \omega_{i,i} = 0 \text{ en } \Gamma_1 \ i=1 \dots N \right\} \quad (2)$$

$$Q = L^2(\Omega) = \left\{ q : \int_{\Omega} q^2 \, dv < \infty \right\} \quad (3)$$

y estableciendo las siguientes correspondencias:

Sólidos elásticos		Flujo de Stokes
campo de desplazamientos \vec{u}	\longleftrightarrow	campo de velocidades \vec{v}
gradiente simétrico de deformaciones E	\longleftrightarrow	gradiente simétrico de velocidades D
coeficiente de Lamé μ_e	\longleftrightarrow	viscosidad dinámica μ
\downarrow		
$a_E(\vec{u}, \vec{w}) = 2 \mu_e \int_{\Omega} E(\vec{u}) : E(\vec{w}) \, dv \longleftrightarrow a_F(\vec{v}, \vec{w}) = 2 \mu \int_{\Omega} D(\vec{v}) : D(\vec{w}) \, dv$		
$c_E(p, \vec{w}) = - \int_{\Omega} p \, \nabla \cdot \vec{w} \, dv \longleftrightarrow c_F(p, \vec{w}) = - \int_{\Omega} p \, \nabla \cdot \vec{w} \, dv$		
$l_E(\vec{w}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f} \cdot \vec{w} \, dv + \int_{\Gamma_2} \vec{g} \cdot \vec{w} \, da \longleftrightarrow l_F(\vec{w}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f} \cdot \vec{w} \, dv + \int_{\Gamma_2} \vec{g} \cdot \vec{w} \, da$		

Esta correspondencia nos inclina a extender la idea de contacto, con la que estamos familiarizados en el campo de los sólidos, al campo de los fluidos viscoplásticos que se utilizan en el modelado de la extrusión de metales.

EL PROBLEMA DE CONTACTO UNILATERAL EN FLUIDOS

Abordamos ahora el problema de contacto unilateral. Para sólidos elásticos se trata del denominado "Problema de Signorini" [4], que se refiere al equilibrio de un cuerpo elástico tridimensional sujeto a condiciones de contorno ambiguas.

Consideremos en la fig. 1 a la frontera Γ de Ω subdividida en tres zonas Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 . Las dos primeras se corresponden con las de Dirichlet y Neumann ; en cuanto la zona restante, el medio está allí "soportado", sin fricción , por un soporte rígido unilateral.

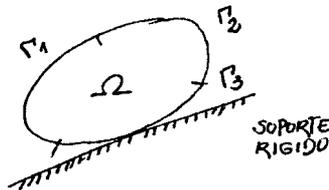


Fig. 1: Problema de Signorini

Esto significa que los puntos de Γ_3 pueden permanecer en contacto o no, y no puede establecerse de antemano la zona de contacto. Sólo podemos predecir que en aquellos puntos de Γ_3 que permanezcan en contacto con el soporte, aparece una reacción \vec{r} en la dirección opuesta a la de la normal exterior al cuerpo, y que en aquellos puntos de Γ_3 donde tiene lugar el apartamiento, el desplazamiento \vec{u} será en la dirección opuesta a la de la normal exterior al cuerpo y no habrá reacción alguna.

Denominando :

$$r_n = \vec{r} \cdot \vec{n} ; \quad u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (4)$$

podemos expresar las alternativas mencionadas de la siguiente forma conjunta :

$$r_n \leq 0 ; \quad u_n \leq 0 ; \quad r_n u_n = 0 \quad (5)$$

lo que se traduce en la Ley Constitutiva del Problema de Contacto unilateral sin fricción.

$$r_n \leq 0 \Rightarrow u_n = 0 , \text{ tiene lugar contacto} \quad (5a)$$

$$u_n \leq 0 \Rightarrow r_n = 0 , \text{ no tiene lugar contacto} \quad (5b)$$

Cabe plantearse cuál es el significado del problema de contacto unilateral en el campo de los fluidos viscoplásticos. Se trata simplemente de una separación ocasional entre la masa metálica y la superficie (a la cual ésta no adhiere), indicada por la dirección del campo de velocidades en el instante en que comienza la separación. Esto no debe confundirse con el fenómeno conocido como cavitación, propio de los fluidos newtonianos.

Basándonos en la correspondencia entre el problema de sólidos elásticos incompresibles con pequeñas deformaciones y el de flujos de Stokes, la formulación del problema de contacto en esos casos equivale al siguiente problema extremal con restricciones:

Hallar $\vec{v} \in W$ tal que : (6)

$$\begin{aligned} J(\vec{v}) &= \min J(\vec{\omega}) && ; \quad \text{con } \vec{\omega} \in W \\ \text{sujeto a } \nabla \cdot \vec{\omega} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \vec{\omega} \cdot \vec{n} &\leq 0 && \text{en } \Gamma_3 \end{aligned}$$

Resolviendo el problema por el método de los multiplicadores de Lagrange, la expresión del Lagrangeano correspondiente resulta:

$$\mathcal{L}(\vec{\omega}, q, \lambda) = J(\vec{\omega}) + c(q, \vec{\omega}) + b(\lambda, \vec{\omega}) \quad (7)$$

donde introducimos:

$$b(r_n, \vec{v}) = - \int_{\Gamma_3} r_n \vec{v} \cdot \vec{n} \, da \quad (7a)$$

El campo de presiones aparece en forma natural como el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$ en Ω ; en cuanto al multiplicador λ , asociado a la restricción $\vec{v} \cdot \vec{n} \leq 0$ en Γ_3 , puede ser interpretado físicamente como la reacción normal en la región de contacto y debe satisfacer la condición de vínculo:

$$\lambda \leq 0 \quad \text{en } \Gamma_3 \quad (7b)$$

Puede probarse que la terna (\vec{v}, p, r_n) solución del problema planteado es un punto de ensilladura del funcional \mathcal{L} propuesto [5].

Es importante señalar que r_n no es una función conocida de antemano ya que la misma depende de \vec{v} y existe sólo en la zona real de contacto. Por lo tanto r_n cumplirá únicamente la función de variable de control durante el proceso iterativo, dándonos información acerca del acierto o desacierto de la zona de contacto elegida y corresponderá al valor de la reacción una vez determina-da la zona de contacto real.

EL PROBLEMA DISCRETO

El procedimiento seguido para la discretización de los campos de velocidades y presiones es el habitual en el M.E.F. [6]. Resta tomar una decisión acerca de la manera de aproximar el multiplicador de Lagrange introducido por la condición de vínculo unilateral.

Una posibilidad es exigir que dicha condición se satisfaga exactamente en N puntos $X_k \in \Gamma_3^h$, con $k = 1, \dots, N$.

$$\vec{v}^h(X_k) \cdot \vec{n}^h(X_k) \leq 0 \quad k = 1, \dots, N \quad (8)$$

siendo \vec{n}^h la aproximación correspondiente a la normal exterior al fluido. Esta relación resulta sumamente sencilla cuando dichos N puntos se eligen coincidentes con nodos de la red. Los λ_k correspondientes pueden interpretarse como multiplicadores de Lagrange concentrados en los nodos pertenecientes a Γ_3^h .

Una segunda posibilidad es definir una aproximación independiente para el multiplicador λ , esto es:

$$\lambda^h \in T^h = \left\{ \lambda^h : \lambda^h = \sum_{a=1}^{NC} L_a^a(x), \lambda^h \leq 0, L_a^a \in R, x \in \Gamma_3^h \right\} \quad (9)$$

donde NC es el número de nodos de la red que pertenecen a la región donde se estudia el problema de contacto, L^a los valores nodales y Λ_a las funciones de base.

Fueron implementadas ambas opciones, no encontrando diferencias significativas en los resultados.

Finalmente la expresión discretizada del problema resulta:

$$\xi^h(w^h, q^h, \lambda^h) = \frac{1}{2} W^T A W - W^T F - W^T C Q - W^T G L \quad (10)$$

donde:

- A = matriz de difusión
- F = vector de fuerzas nodales externas (máscas y de superficie)
- C = matriz de divergencia
- G = matriz de contacto
- W = matriz columna de valores nodales de velocidad
- Q = matriz columna de valores nodales de presión
- L = matriz columna de valores nodales del multiplicador de contacto

La condición de punto de ensilladura en (\vec{v}, p, r) conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A V - C P - G R &= F & (11) \\ C^T V &= 0 \\ G^T V \leq 0, R \leq 0, V^T G R &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones equivalen: al equilibrio del sistema sometido a la acción de fuerzas externas y reacciones de contacto; a la condición de incompresibilidad y a la condición de contacto unilateral (velocidades normales no positivas, reacciones de contacto no positivas y complementariedad entre ausencia de contacto y existencia de reacciones) respectivamente.

Puede probarse que, al igual que para el problema de Stokes [7,8,9], vale la resolución del problema planteado vía resolución del dual correspondiente. Así pues, fijando una zona de posible contacto, en primer lugar obtenemos los P y R que maximizan ξ^h y luego el V correspondiente :

$$(C^T A^{-1} C) P + (G^T A^{-1} G) R = - C^T A^{-1} F - G^T A^{-1} F \quad (12)$$

$$V = A^{-1}(F + C P + G R)$$

En segundo lugar investigamos el signo de los componentes de R y si corresponde, modificamos la zona de contacto propuesta y reiniciamos el cálculo.

ALGORITMO NUMERICO

Se modificó el resolutor dual de Stokes implementado por Buscaglia y Dari en 1989, introduciendo en el mismo las modificaciones necesarias para incluir el contacto:

(i) Consideramos la matriz C que resulta del acoplamiento de la matriz C (cuyos componentes son los mismos que se obtienen para el Problema dual de Stokes), con la matriz G (introducida por el problema de contacto).

(ii) Consecuentemente se amplía la matriz columna P acoplándole la matriz columna R, resultando una nueva matriz columna P.

Las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$(C^{*T}A^{-1}C^*) P^* = -C^{*T}A^{-1}F \quad (13)$$

$$V = A^{-1}(F + C^*P^*)$$

cuya semejanza con las correspondientes al problema de Stokes es manifiesta [8]. El algoritmo de resolución implementado es el siguiente:

Paso 1: Inicialización

$$NC \text{ nodos de contacto} \Rightarrow P_0^* (R_0) \Rightarrow V_0$$

Paso 2: Análisis del signo de los multiplicadores de contacto

(i) Si $R_{0i} \leq 0 \quad \forall i=1, NC \Rightarrow$ contacto.

(i) Si $R_{0i} > 0$ para m_1 valores de i ($m_1 \leq NC$)

$$\begin{array}{l} R_1 / \quad NC1 = NC - m_1 \\ G_1 / \quad G_0 - m_1 \text{ columnas correspondientes} \end{array}$$

Se retorna al Paso 1 hasta que NC no se modifique..

Nota : Cabe señalar que lo anterior implica una modificación parcial de la matriz C^* , dado que esta sólo afecta a los elementos de G; los de la matriz C original no son alterados durante el proceso iterativo correspondiente al problema de contacto.

Paso 3: Iteración de contacto.

Del Paso 1 se obtienen $P_1^* (R_1)$ y V_1 .

Del Paso 2 se obtiene m_2 ($m_2 \leq NC1$).

Inspección del signo de las velocidades normales correspondientes a los m_1 nodos eliminados en el Paso 2.

Si $V_{n1} > 0$ para q_1 valores de i ($q_1 \leq m_1$) \Rightarrow contacto \Rightarrow reincorporación a la lista $\Rightarrow R_2 / NC2 = NC1 - m_2 + q_1$

Si $NC2 \neq NC1$, se eliminan de la matriz G_1 las m_2 columnas y se reincorporan las q_1 columnas correspondientes, obteniéndose G_2 .

Se retorna al Paso 1.

El proceso termina cuando $NC_{J+1} = NC_J$.

Hasta la convergencia del algoritmo los valores de R no pueden interpretarse directamente como los correspondientes a las reacciones normales en los nodos pertenecientes a la zona de contacto, sino más bien como valores de control del cumplimiento de la condición de contacto unilateral. El análisis del signo de los componentes de R en cada iteración nos da información acerca del acierto o desacuerdo de la elección de la zona donde se presupone el contacto.

La extensión a viscoplásticos es inmediata dentro del algoritmo implementado en el CAB [11], basado en una formulación en velocidades, presiones y gradiente simétrico del campo de velocidades. La no linealidad del material estaba restringida a la resolución del gradiente simétrico del campo de velocidades.

DISCUSION DE RESULTADOS

Como parte de la validación de nuestro programa corrimos un ejemplo de una contracción del tipo 3/2 plana. Un caso similar fue resuelto en el Laboratorio Nacional de Computação Científica de Rio de Janeiro (LNNCC), con un programa de elementos finitos para el problema elástico unilateral de Signorini. La comparación cualitativa y cuantitativa de los resultados es razonablemente satisfactoria.

A continuación se discuten los resultados provenientes de la resolución de tres problemas similares que involucran flujos en canales de sección contraída con distintos ángulos, simetría plana y de revolución, situación típica en la extrusión.

Si bien estas simulaciones resultan bastante artificiales por los datos de la red utilizados y por el modelado en términos de fluidos, pretende acercarse a la situación que se presenta en la extrusión de lingotes de zircaloy (TRES). Se busca analizar un comportamiento cualitativo del eventual desprendimiento en las zonas angulosas y a su vez ver cuál es el efecto que tiene sobre éste el ángulo α de la matriz.

En la figura 2 se muestran los campos de velocidades obtenidos para los casos $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$. Las flechas indican la tendencia a la separación, excepto en el caso $\alpha=45^\circ$, debiéndose esto a una inadecuada definición de los parámetros de graficación.

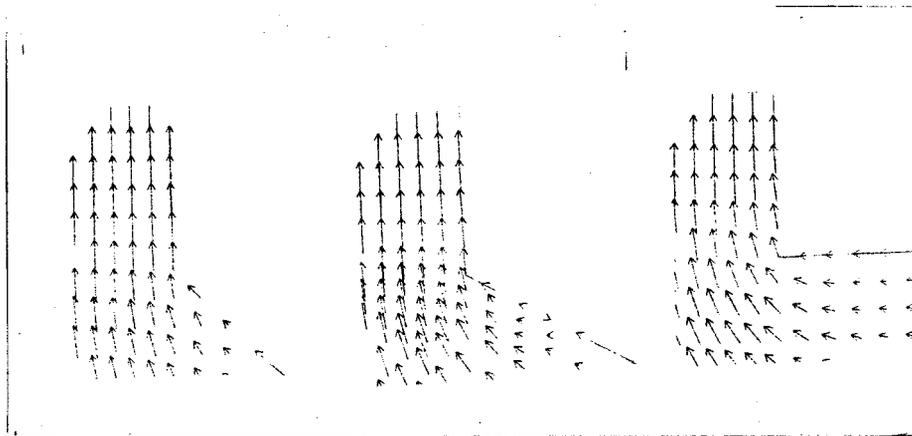


Fig. 2: Campos de velocidades para distintas boquillas

En la Tabla I se muestran los resultados cuantitativos de la longitud de la zona de separación. Para $\alpha = 45^\circ$ aparece ya una pequeña separación con $\delta \cong 0.787$. Al aumentar el ángulo a $\alpha=60^\circ$, la separación crece al valor $\delta \cong 1.05$. Para $\alpha = 90^\circ$, obtenemos un valor $\delta = 1.575$.

Tabla I : Simetría plana

ángulo	long. de despegue	iter. cont.
$\alpha = 45^\circ$	$\delta = 0.787$	2
$\alpha = 60^\circ$	$\delta = 1.05$	3
$\alpha = 90^\circ$	$\delta = 1.575$	3

La Tabla II reproduce los resultados obtenidos para las mismas tres redes, aunque esta vez para simetrías de revolución. Los valores de la longitud de la zona de desprendimiento son iguales, salvo para $\alpha = 60^\circ$: $\delta \cong 0.787$, $\delta \cong 1.575$, $\delta \cong 1.575$. Cabe mencionar que estos valores se obtienen por diferencias de las ordenadas de los nodos extremos de la zona donde se produce la separación, lo que explica la coincidencia en los dígitos y no necesariamente implica la coincidencia en las longitudes reales.

Tabla II : Simetría de Revolución

ángulo	long. de despegue	iter. cont.
$\alpha = 45^\circ$	$\delta = 0.787$	2
$\alpha = 60^\circ$	$\delta = 1.575$	4
$\alpha = 90^\circ$	$\delta = 1.575$	3

Los resultados que acabamos de presentar se refieren a zonas de estudio de contacto pertenecientes a la salida de la contracción; las regiones de la zona del comienzo de la contracción también fueron analizadas, dando como resultados que en las mismas el despegue no tenía lugar.

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado el paquete de programas STOKCON para la simulación de las zonas de separación de flujos de Stokes, a partir de paquetes de programas preexistentes (STOKEF) en la División Mecánica Computacional del C.A.B.. Se ha aprovechado la similitud matemática entre la formulación de este problema y el Problema de Signorini para el contacto unilateral de sólidos elásticos lineales, si bien cabe resaltar que la física de los fluidos corrientes en las zonas de baja presión y eventual separación (cavitación) es bien distinta de la que aquí nos interesa. Abusamos un tanto del significado usual del término fluido para considerar fluidos muy particulares como son los que se utilizan para modelar la extrusión de metales.

Los modelos más realistas para el proceso de extrusión involucran normalmente fluidos rígido-plásticos o viscoplásticos; pero el programa implementado puede usarse de núcleo en el cálculo de dichos fluidos.

Los campos de velocidades que hemos mostrado indican sólo la tendencia en el instante inicial de la deformación del lingote, en pleno estado transitorio. Con esta información y tomando un paso de tiempo razonablemente pequeño, debería poder obtenerse la geometría de la red deformada y sería posible calcular el nuevo campo de velocidades. Prosiguiendo este nuevo esquema iterativo, al alcanzar un estado estacionario, el vector velocidad sería tangente a la frontera libre.

Refiriéndonos ahora a los resultados obtenidos, observamos que la zona de separación se ve fuertemente influenciada por el valor del ángulo de la matriz de extrusión. Las Tablas muestran una rápida convergencia del algoritmo de contacto (4-5 iteraciones).

BIBLIOGRAFIA

- [1] **Urquiza, S.**, *Simulación por E.F. de los primeros instantes de la extrusión de vainas de elementos combustibles en centrales nucleares*, Trabajo Especial de la Carrera de Ingeniería Nuclear, Instituto Balseiro, Argentina, 1988.
- [2] **Urquiza, S. y Basombrio, F.**, *Simulación por E.F. de los primeros instantes de la extrusión de vainas de elementos combustibles en centrales nucleares*, Rev. Int. de Met. Num. para Calc. y Dis. en Ing., vol. 6, 1, 1990, pags. 67-80.
- [3] **Zienkiewicz, O.C.**, en *Numerical Analysis of forming processes* J.Wiley & Sons Ltd., 1984.
- [4] **Barbosa, H.J.C. y Feijoo, R.A.** *Numerical algorithms for contact problems in linear elastostatics*, Pub. del Laboratorio Nacional de Computação Científica (LNCC), Brasil, 1984.
- [5] **Barbosa, H.J.C.**, *Algoritmos numéricos para problemas de contacto en elasticidade*, Tesis para obtención de grado de D.Sc., Programa de Engenharia Civil, COPPE, UFRJ, Brasil, 1986.
- [6] **Zienkiewicz, O.C. y Cheung, Y.K.**, *The FEM method in structural and continuum mechanics*, Mc.Graw-Hill Pub. Co. Ltd., 1967.
- [7] **Glowinski, R.**, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, 1984.
- [8] **Basombrio, F.G.**, *El MEF en mecánica de fluidos*, Apuntes del curso, Instituto Balseiro, Argentina, 1989.
- [9] **Romano G.**, *Duality and variational principles in structural mechanics under bilateral and unilateral constraints*, LNCC, Brasil, 1982.
- [10] **Fletcher, R.** *Practical methods of optimization, vol. 2., Constrained Optimization*, cap. 7 y 9, J. Wiley & Sons, 1981.
- [11] **Ruda, M., Buscaglia, G., Arnica, D. y Felicelli, S.**, *VIPLAS: fluidos viscoplasticos por elementos finitos*, Anales del MECOM 88, 1990.

