

LA INTEGRAL  $J$  Y EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS  
EN LA MECANICA DE FRACTURA LINEAL ELASTICA

Edgardo Taroco

Laboratório Nacional de Computação Científica

LNCC/CNPq

Rua Lauro Müller, 455

22290-160, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

RESUMEN

La mecánica de fractura lineal elástica LEFM permite modelar en muchos casos el comportamiento de componentes mecánicos para diferentes condiciones de trabajo con suficiente grado de aproximación del punto de vista práctico.

Los parámetros más empleados en LEFM son el factor de intensificación de tensiones  $K$ , el decrecimiento de energía potencial  $G$  y la integral de línea  $J$ . En este trabajo la integral  $J$  es introducida como una consecuencia de la aplicación de leyes de conservación a sólidos elástico lineales y la formulación original de Rice es extendida para llevar en cuenta cargas en el dominio y deformaciones residuales.

La presencia de cargas de dominio y deformaciones residuales modifican la expresión de la integral  $J$  y su propiedad de independencia del camino es restablecida con la condición de sumar integrales en el dominio.

Para ilustrar el efecto de las cargas de dominio la integral  $J$  fué determinada mediante la aplicación del método de elementos finitos, conjuntamente con su posterior evaluación numérica.

Finalmente se utilizó esta técnica para calcular el factor de intensificación de tensiones en un disco fisurado que gira a velocidad constante.

ABSTRACT

Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) is sufficiently realistic approach to many working material under working conditions in mechanical components.

The most common parameters in LEFM are the intensity factor  $K$ , the energy release rates  $G$  and the line integral  $J$ . In this work  $J$  integral was introduced as a consequential of the conservation laws in linear elastic solids and the original formulation of Rice was extended to include body forces and residual strains. The presence of body forces and residual strains modifies the integral expression for  $J$  and the path independence was restored by adding domain integral term.

To illustrate the effect of domain load  $J$  integral was determined by post-processing finite element results and was applied to the calculation of stress intensity factors of a rotating cracked disc.

INTRODUCCION

La mecánica de fractura lineal elástica como es entendida hoy día se remonta al célebre trabajo de Griffiths [1] en que mediante la aplicación del principio de conservación de energía se analiza la propagación de fisuras en láminas de vidrio.

Al postular como condición necesaria para la inestabilidad de una fisura, que el decrecimiento de energía potencial relativa al incremento de la misma supere la tenacidad del material, surge el decrecimiento de energía potencial  $G$ , como el primer parámetro de la mecánica de fractura.

Posteriormente Irwin [2] analizando la singularidad que se produce en el vértice de una fisura, introduce los factores de intensificación de tensiones  $K$  que representan la amplitud de la mencionada singularidad.

Más recientemente Rice [3] muestra que en estados planos de deformación o tensión, la posibilidad de propagación de una fisura puede asociarse al valor de la integral  $J$ , conocida en la literatura como integral de Rice.

Los parámetros anteriores son empleados frecuentemente para establecer en que condiciones una fisura dada se propaga o no. Teniendo en cuenta que  $G$ ,  $K$  y  $\mathcal{J}$  están relacionados por expresiones conocidas, la determinación de cualquiera de ellos implica acceder de inmediato al valor de los otros. O sea que del punto de vista práctico más que discutir cual es el fundamental pasa a tener sentido seleccionar en cada caso particular cual es el que puede ser determinado con facilidad y con el grado de precisión adecuada al problema de mecánica de fractura que estamos interesados en resolver.

Dentro de este panorama, con el empleo generalizado de los métodos aproximados, elementos finitos, elementos de contorno, etc, combinados a técnicas de generación automática de mallas, análisis de error y métodos adaptativos, la selección de los parámetros  $G$ ,  $K$  y  $\mathcal{J}$ , para cuando se dispone de medios computacionales, debe ser realizado teniendo en cuenta las facilidades ofrecidas por los programas de cálculo implementados. Vale la pena destacar que alguna de las propiedades de la integral  $\mathcal{J}$ , tales como independencia del camino y que su determinación puede efectuarse con facilidad luego de obtener los valores de los campos que intervienen en su cálculo a lo largo de caminos escogidos arbitrariamente, determina que el análisis de propagación de fisuras en componentes estructurales mediante la integral  $\mathcal{J}$  resulte ventajoso cuando lo comparamos a otros métodos sobre todo del punto de vista numérico, dado que este método no exige el conocimiento de los campos de tensión y deformación en la región próxima al extremo de la fisura.

En ese sentido si se dispone de programas automáticos de cálculo, la aproximación numérica de  $\mathcal{J}$  puede ser obtenida a partir de los resultados del análisis de tensiones realizado previamente complementado con el cálculo numérico de  $\mathcal{J}$  a través de posprocesadores que pueden ser incorporados con facilidad a los programas disponibles. En nuestro caso particular fué utilizado el Sistema Computacional para Desarrollo de Programas (SDP) y aprovechando las facilidades ofrecidas por este sistema como ambiente computacional se desarrollaron posprocesadores para evaluar numericamente la integral  $\mathcal{J}$  en correspondencia con el elemento finito escogido en el análisis de tensiones correspondiente.

Este trabajo tiene por objetivo discutir las ventajas del empleo conjunto de la integral  $\mathcal{J}$  con el método de elementos finitos para lo cual se contribuye con dos puntos de vista del problema.

En primer término aspectos teóricos de como extender la integral  $\mathcal{J}$  a casos en que existen cargas en el dominio o se está en presencia de deformaciones iniciales, alternativas no previstas en la formulación original de Rice. Esta parte se basa en las relaciones entre las leyes de conservación y las integrales independientes del camino Knowles & Sternberg [4], Eehelby [5], particularizadas para traslación constante que es la que da origen a la integral  $\mathcal{J}$ .

En segundo término aspectos relacionados al cálculo numérico de la integral  $\mathcal{J}$  mediante el análisis de un ejemplo donde las cargas en el dominio deben ser llevadas en cuenta. Tratase de un disco fisurado que gira a velocidad constante donde las cargas en el dominio están dadas por las fuerzas de inercia. Los valores de  $K$  son calculados a partir de los valores obtenidos para la integral  $\mathcal{J}$  en diferentes caminos de integración y los resultados son comparados con los presentados en la literatura.

### INTEGRAL DE RICE

Para analizar propagación de fisuras en láminas sometidas a estados planos de deformación o tensión Rice [3], introdujo la integral  $\mathcal{J}$  dada por la expresión:

$$\mathcal{J} = \int_{\Gamma} \phi \, dx_2 - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Gamma \quad (1)$$

donde  $\phi$ ,  $u$ ,  $t$  son campos en equilibrio,  $\phi$  energía de deformación específica,  $u$  vector desplazamiento,  $t$  esfuerzo

sobre el contorno  $\Gamma$  que rodea el vértice de la fisura y  $n$  normal exterior a la curva  $\Gamma$ , figura 1.

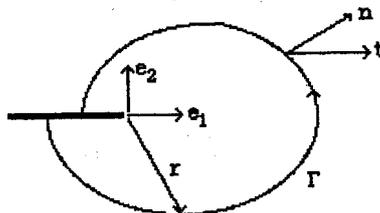


Figura 1

Es posible mostrar que cuando el radio  $r$  de la curva  $\Gamma$  tiende a cero, el límite de la integral  $\mathcal{J}$  es finito y coincide con el decrecimiento de energía potencial de la lámina para un incremento  $\delta\alpha$  de la fisura.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{J} = -\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} = G \quad (2)$$

Uno de los grandes atractivos de emplear la integral  $\mathcal{J}$  como medida del grado de sollicitación que se encuentra el vértice de una fisura deriva de su propiedad de independencia del camino. Lo anterior permite escoger curvas  $\Gamma$  alejadas del vértice de la fisura donde los campos que intervienen en el cálculo de  $\mathcal{J}$  pueden determinarse con mayor precisión.

A efectos de tener presente en que casos la integral  $\mathcal{J}$  resulta independiente del camino vale la pena recordar las hipótesis admitidas por Rice en su deducción:

- (i) El material es hiperelástico o sea que la energía de deformación específica  $\phi$  es un potencial a partir del cual podemos obtener la relación tensión deformación.  $\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$ .
- (ii) No existen deformaciones iniciales, ni cargas en el dominio, solamente hay cargas aplicadas en el contorno y los bordes de la fisura están libres de tensiones.
- (iii) La fisura inicial es recta y se propaga en la misma dirección.
- (iv) La base de referencia  $(e_1, e_2)$  es ortogonal y  $e_1$  coincide con la dirección de la fisura, como se indica en la figura 1.

En primer término mostraremos que la integral  $\mathcal{J}$  puede ser expresada en forma intrínseca o sea independientemente de la base escogida, para ello introducimos en la expresión original de Rice las siguientes relaciones:

$$dx_2 = n \cdot e_1 d\Gamma \quad ; \quad t = \sigma n \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = (\nabla u) e_1 \quad (3)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones y  $\nabla u$  el gradiente del campo de desplazamientos.

Haciendo uso de la definición de tensor transpuesto e introduciendo el tensor identidad en el plano I, la integral  $\mathcal{J}$  puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{\Gamma} \phi n \cdot e_1 d\Gamma - \sigma n \cdot (\nabla u) e_1 d\Gamma = e_1 \cdot \int_{\Gamma} (\phi I - \nabla u^T \sigma) n d\Gamma \\ &= e_1 \cdot \int_{\Gamma} \Sigma n d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\Sigma = \phi I - \nabla u^T \sigma$  es conocido en la literatura como tensor momento energía.

El resultado anterior nos permite dar una definición más general de la integral  $\mathcal{J}$ , o sea que  $\mathcal{J}$  es la proyección sobre la dirección de la fisura del flujo del tensor momento energía a lo largo de una curva  $\Gamma$  que rodea el vértice de la misma.

También es conveniente destacar que la independencia del camino de la integral  $\mathcal{J}$  es consecuencia de la ley de invariancia a una traslación constante del dominio, que particularizada para las hipótesis utilizadas por Rice, conduce a que el tensor momento energía resulte solenoidal o sea que su flujo en un contorno cerrado que no contiene singularidades es nulo:

$$\oint \Sigma n \, d\Gamma = 0 \quad (5)$$

Si alguna de las hipótesis admitidas por Rice no son satisfechas el tensor momento energía deja de ser solenoidal como se muestra en los casos a ser tratados más adelante por ejemplo cuando existen cargas en el dominio o estamos en presencia de deformaciones iniciales.

La ley de invariancia a una traslación constante se mantiene, surgiendo integrales en todo el dominio, por tanto la integral  $\mathcal{J}$  puede ser extendida a las situaciones mencionadas anteriormente con la condición de sumar integrales en el dominio encerrado por la curva  $\Gamma$  escogida para el cálculo de  $\mathcal{J}$ .

### LAMINA PLANA

Consideremos el caso de una lámina plana de espesor uniforme, sometida a estado plano de deformación o tensión representada por el dominio bidimensional  $\Omega$  de contorno  $\partial\Omega$  y normal exterior  $n$ .

Admitamos que no existen cargas en el dominio  $\Omega$  y que las únicas fuerzas externas están aplicadas en el contorno  $\partial\Omega$ . Supondremos además que el material de la lámina es hiperelástico o sea que la energía de deformación específica está dada por:

$$\phi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma \cdot d\varepsilon \quad (6)$$

donde  $\sigma$  es la tensión y  $\varepsilon$  la deformación correspondientes.

El funcional de energía por unidad de espesor de la lámina se reduce en este caso a:

$$\pi(u) = \int_{\Omega} \phi(\varepsilon) d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot u \, d\partial\Omega \quad u \in \text{Kin} \cdot u \quad (7)$$

donde:

$u$  campo de desplazamientos

$t$  fuerza en el contorno  $\partial\Omega$

$\varepsilon$  deformación, dada por la parte simétrica del gradiente del desplazamiento ( $\varepsilon = \nabla u$ )<sup>S</sup>

$\text{Kin} \cdot u$  espacio de funciones admisibles del funcional  $\pi$ .

La condición de estacionaridad del funcional  $\pi$ :

$$\delta\pi = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot \delta u \, d\partial\Omega = 0 \quad (8)$$

nos permitirá determinar los campos  $u$ ,  $\sigma$ ,  $\phi$  en equilibrio con la carga aplicada.

Al efectuar la variación del funcional energía, admitimos que el dominio  $\Omega$  está fijo, lo que posibilita introducir la operación variación dentro del símbolo integral, variando los correspondientes integrandos.

#### Sensibilidad al cambio de forma

A seguir analizaremos como varía la energía potencial de la lámina cuando el dominio  $\Omega$  es modificado una cantidad conocida, Haug [6], Taroco [7].

Designaremos con  $\delta x$  a la función vectorial que describe la mudanza de forma del dominio  $\Omega$ .

Mediante una transformación conocida:

$$\delta x : x \in \Omega \rightarrow x^* \quad (8)$$

la región  $\Omega$  pasa a una nueva posición  $\Omega^*$  como indica la figura 2:

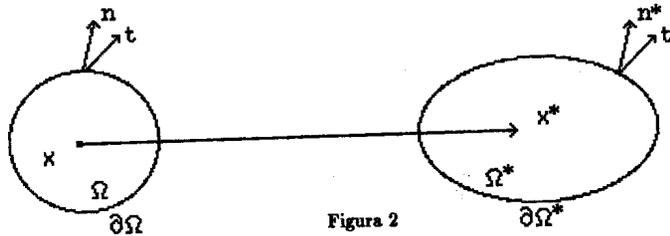


Figura 2

Admitimos también conocida la forma en que las cargas en el contorno se transforman cuando  $\partial\Omega$  pasa a  $\partial\Omega^*$

$$t^* = t + \widehat{\delta}t \quad (9)$$

Funciones escalares y vectoriales en el dominio  $\Omega$ , tales como la energía de deformación específica  $\phi$  e de desplazamientos  $u$ , se transforman cuando pasamos de  $\Omega$  a  $\Omega^*$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\phi &= \phi^* - \phi = \delta\phi + \nabla\phi \cdot \delta x \\ \widehat{\delta}u &= u^* - u = \delta u + (\nabla u)\delta x \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\nabla\phi$ ,  $\nabla u$  representan los correspondientes gradientes.

Los funcionales, energía de deformación  $U$ , definido en la región  $\Omega$  y el trabajo de las cargas externas  $V_{\partial\Omega}$ , definido en el contorno  $\partial\Omega$ , se transforman respectivamente según las relaciones:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}U &= U^* - U = \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi n \cdot \delta x \, d\partial\Omega \\ \widehat{\delta}V &= V_{\partial\Omega}^* - V_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} [\widehat{\delta}t \cdot u + t \cdot \delta u + t \cdot (\nabla u)\delta x + (t \cdot u) \text{div}_{\partial\Omega} \delta x] \, d\partial\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $\text{div}_{\partial\Omega} \delta x$  es la divergencia de  $\delta x$  sobre el contorno  $\partial\Omega$ .

Introduciendo las expresiones anteriores en:

$$\widehat{\delta}\pi = \widehat{\delta}U - \widehat{\delta}V_{\partial\Omega} \quad (12)$$

se sigue que la variación total de la energía potencial esta dada por:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\pi &= \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot \delta u d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi n - (\nabla u)^T t] \cdot \delta x d\partial\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} [\widehat{\delta}t \cdot u + (t \cdot u) \text{div}_{\partial\Omega} \delta x] \, d\partial\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

Si particularizamos la expresión anterior para una traslación  $\delta x = Cte$  y para fuerzas aplicadas en el contorno que acompañan la traslación de  $\Omega$  en forma rígida, se tiene:

$$\text{div}_{\partial\Omega} \delta x = 0 \quad ; \quad \widehat{\delta}t = 0 \quad (14)$$

Introduciendo estos resultados en la expresión de  $\widehat{\delta}\pi$  se sigue que:

$$\widehat{\delta}\pi = \delta\pi + \int_{\partial\Omega} [\phi n - (\nabla u)^T t] \cdot \delta x d\partial\Omega \quad (15)$$

Recordando que la lámina está en equilibrio con las cargas aplicadas ( $\delta\pi = 0$  y  $\sigma n = t$  en el contorno  $\partial\Omega$ ) y que por ser  $\delta x = Cte$ , la variación total  $\delta\pi$  se reduce a:

$$\delta\pi = \delta x \cdot \int_{\partial\Omega} [\phi I - (\nabla u)^T \sigma] n d\partial\Omega = \delta x \cdot \int_{\partial\Omega} \Sigma n d\partial\Omega \quad (16)$$

De la condición de invariancia  $\delta\pi = 0$  y teniendo en cuenta que  $\delta x$  es un vector constante arbitrario, resulta:

$$\int_{\partial\Omega} \Sigma n d\partial\Omega = 0 \quad (17)$$

Como consecuencia de la ley de invariancia a una traslación constante se obtiene que el flujo del tensor momento energía en un contorno cerrado  $\partial\Omega$  es nulo.

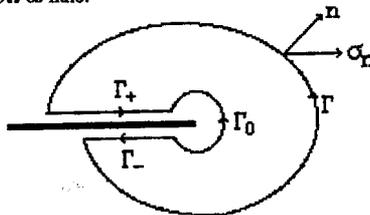


Figura 3

En el caso de lámina con fisura, como se indica en figura 3, para el contorno cerrado  $\partial\Omega = -\Gamma_0 \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma$  de la condición de nulidad del flujo del tensor momento energía se sigue que:

$$e_1 \int_{\partial\Omega} \Sigma n d\partial\Omega = -e_1 \cdot \int_{\Gamma_0} \Sigma n d\Gamma_0 + e_1 \cdot \int_{\Gamma} \Sigma n d\Gamma + e_1 \cdot \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \Sigma n d\Gamma = 0 \quad (18)$$

En las porciones de contorno  $\Gamma_+$  y  $\Gamma_-$ :

$$e_1 \cdot \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \Sigma n d\Gamma = e_1 \cdot \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} [\phi I - (\nabla u)^T \sigma] n d\Gamma = 0 \quad (19)$$

el primer sumando del integrando se anula porque  $e_1 \perp n$  ( $\phi e_1 \cdot n = 0$ ) y el segundo sumando se anula porque la fisura está libre de tensiones o sea  $\sigma n = 0$  ( $e_1 \cdot (\nabla u)^T \sigma n = 0$ ).

Recordando la definición de la integral  $\mathcal{J}$  para el caso particular de láminas sin cargas en el dominio y cuando la fisura está libre de tensiones se tiene:

$$\mathcal{J} = e_1 \cdot \int_{\Gamma_0} \Sigma n d\Gamma_0 = e_1 \cdot \int_{\Gamma} \Sigma n d\Gamma \quad (20)$$

Concluimos por tanto que en el caso analizado por Rice, la integral  $\mathcal{J}$  puede ser calculada en cualquier contorno  $\Gamma$  que rodea el vértice de la fisura o sea resulta independiente del camino  $\Gamma$  escogido.

### LAMINA CON CARGA EN EL DOMINIO

Admitiremos a seguir que la lámina que estamos analizando es sometida a un sistema de cargas  $b$ ,  $t$  que actúan respectivamente en el dominio y en el contorno:

$$b : x \in \Omega \mapsto \vartheta \quad ; \quad t : x \in \partial\Omega \mapsto \vartheta \quad (21)$$

Si comparamos con el caso estudiado en el ítem anterior, al funcional de energía correspondiente, habrá que adicionar el efecto de las cargas en el dominio, resultando:

$$\pi = \int_{\Omega} \phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot u d\partial\Omega - \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega \quad u \in Kin \cdot u \quad (22)$$

Para obtener la variación total del nuevo funcional  $\pi$  a una traslación arbitraria  $\delta x$ , indicada en la figura 2, se hace necesario conocer la variación total de cada uno de los sumandos del segundo miembro de la expresión anterior, Atluri [8], Fancello [9], Cimmini [10].

Los dos primeros sumandos o sea la energía de deformación  $U$  y el trabajo de las cargas en el contorno  $V_{\partial\Omega}$  fueron estudiados en el ítem anterior, por tanto centraremos nuestra atención en el tercer sumando o sea en el trabajo de las cargas en el dominio  $V_{\Omega}$ .

Supondremos que las variaciones totales de las cargas  $b, t$  cuando transformamos el dominio original de  $\Omega$  a  $\Omega^*$  son al igual que  $\delta x$  gobernadas por nosotros

$$x^* - x = \delta x \quad ; \quad b^* - b = \widehat{\delta} b \quad ; \quad t^* - t = \widehat{\delta} t \quad (23)$$

Procediendo en forma similar a cuando analizamos la variación total de la energía de deformación en el ítem anterior, la variación total del trabajo de las cargas en el dominio  $\widehat{\delta}V_{\Omega}$  resulta:

$$\widehat{\delta}V_{\Omega} = \widehat{\delta} \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega = \int_{\Omega} [\widehat{\delta}(b \cdot u) + b \cdot u \operatorname{div} \delta x] d\Omega \quad (24)$$

Recordando que la variación total del desplazamiento puede ser escrita como:

$$\widehat{\delta}u = \delta u + (\nabla u) \delta x \quad (25)$$

Introduciendo esta relación en la expresión de  $\widehat{\delta}V_{\Omega}$ , se sigue que:

$$\widehat{\delta}V_{\Omega} = \widehat{\delta} \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega = \int_{\Omega} [\widehat{\delta}b \cdot u + b \cdot \delta u + b \cdot (\nabla u) \delta x + b \cdot u \operatorname{div} \delta x] d\Omega \quad (26)$$

Si particularizamos nuestro análisis para el caso de traslación constante  $\delta x = Cte$  ( $\operatorname{div} \delta x = 0$ ) y admitimos además que la carga de dominio acompaña en forma rígida a la traslación  $\Omega \rightarrow \Omega^*$  o sea  $\widehat{\delta}b = 0$ , la variación total del trabajo de las cargas en  $\Omega$  se reduce a:

$$\widehat{\delta}V_{\Omega} = \widehat{\delta} \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega = \int_{\Omega} [b \cdot \delta u + b \cdot (\nabla u) \delta x] d\Omega \quad (27)$$

Introduciendo esta relación en la expresión de  $\widehat{\delta}\pi$  y teniendo en cuenta los resultados del ítem anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\pi &= \widehat{\delta}U - \widehat{\delta}V_{\partial\Omega} - \widehat{\delta}V_{\Omega} = \widehat{\delta} \int_{\Omega} \phi d\Omega - \widehat{\delta} \int_{\partial\Omega} t \cdot u d\partial\Omega - \widehat{\delta} \int_{\Omega} b \cdot u d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot \delta u d\partial\Omega - \int_{\Omega} b \cdot \delta u d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi n - \nabla u^T t] \cdot \delta x d\partial\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} b \cdot (\nabla u) \delta x d\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

Admitiendo que la lámina está en equilibrio con las cargas aplicadas:

$$\delta\pi = \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot \delta u d\partial\Omega - \int_{\Omega} b \cdot \delta u d\Omega = 0 \quad (29)$$

la variación total de la energía potencial resulta:

$$\widehat{\delta}\pi = \int_{\partial\Omega} [\phi I - \nabla u^T \sigma] n \cdot \delta x d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla u)^T b \cdot \delta x d\Omega \quad (30)$$

Teniendo en cuenta que  $\delta x$  es un vector constante arbitrario, de la condición de invariancia de  $\pi$  a una traslación rígida se sigue que:

$$\int_{\partial\Omega} [\phi I - \nabla u^T \sigma] n d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla u)^T b d\Omega = 0 \quad (31)$$

O sea que el flujo del tensor momento energía en un contorno cerrado  $\partial\Omega$  resulta:

$$\int_{\partial\Omega} \Sigma n d\Omega = \int_{\Omega} \nabla u^T b d\Omega \quad (32)$$

En una lámina plana que contiene una fisura como se indica en la figura 4, en presencia de cargas en el dominio, el resultado anterior nos permite establecer la expresión de la integral  $\mathcal{J}$  para este caso, o sea:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= e_1 \cdot \int_{\Gamma_0} \Sigma n d\Gamma_0 = e_1 \cdot \int_{\Gamma} \Sigma n d\Gamma - e_1 \cdot \int_{\Omega} (\nabla u)^T b d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \phi dx_2 - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Gamma - \int_{\Omega} b \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Omega \end{aligned} \quad (33)$$

La expresión anterior coincide con la determinada por Baker [11] mediante formulación local.

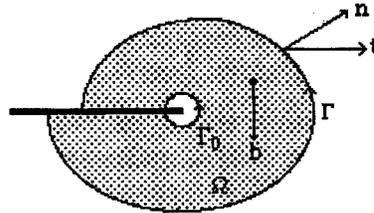


Figura 4

#### LAMINA CON DEFORMACIONES INICIALES

En el análisis siguiente supondremos que en nuestra lámina existen deformaciones iniciales conocidas en la totalidad del dominio  $\Omega$ . Admitiremos que la energía de deformación específica del material  $\phi$  es un potencial que depende de la diferencia entre la deformación total  $\varepsilon$  y la deformación inicial  $\varepsilon_0$ . La deformación  $\varepsilon$  es la parte simétrica del gradiente de  $u$  ( $\varepsilon = \nabla u^s$ ) y la deformación  $\varepsilon_0$  es una función conocida de la posición  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x)$ .

Por simplicidad consideraremos solamente cargas aplicadas en el contorno  $\partial\Omega$  de la lámina.

En este caso la energía potencial  $\pi$  está dada por:

$$\pi = \int_{\Omega} \phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot u d\Omega \quad u \in \text{Kin} \cdot u \quad (34)$$

donde:

$\phi = \phi(\varepsilon - \varepsilon_0)$  es la energía de deformación específica.

Para determinar la variación total de  $\pi$  analizaremos por separado cada uno de los sumandos del funcional energía o sea la energía de deformación  $U$  y el trabajo de las cargas externas  $V_{\partial\Omega}$ .

La variación total del trabajo de las cargas externas  $\widehat{V}_{\partial\Omega}$  coincide con los casos presentados anteriormente, sin embargo no sucede lo mismo con la variación total de la energía de deformación, puesto que ahora la función  $\phi$  depende de la diferencia entre deformación total y deformación inicial:

$$\widehat{\delta}U = \widehat{\delta} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \widehat{\delta}\phi + \phi \text{div} \delta x d\Omega \quad (35)$$

Estudiaremos la variación total de  $\phi(\varepsilon - \varepsilon_0)$  separadamente:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon} \cdot \widehat{\delta}\varepsilon + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta}\varepsilon_0 = \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon} \cdot \delta\varepsilon + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon} \cdot (\nabla\varepsilon)\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta}\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (36)$$

Sumando y restando el término  $\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x$  y teniendo en cuenta la relación tensorial:

$$\nabla \phi \cdot \delta x = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \cdot (\nabla \varepsilon) \delta x + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x \quad (37)$$

la variación total  $\widehat{\delta \phi}$  puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta \phi} &= \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \cdot \delta \varepsilon + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta \varepsilon_0} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x + \nabla \phi \cdot \delta x \\ &= \delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta \varepsilon_0} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x + \nabla \phi \cdot \delta x \end{aligned} \quad (38)$$

Introduciendo este resultado en la variación total de la energía de deformación y aplicando el teorema de la divergencia se sigue que:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta U} &= \int_{\Omega} \left[ \delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta \varepsilon_0} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x + \nabla \phi \cdot \delta x + \phi \operatorname{div} \delta x \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[ \delta \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta \varepsilon_0} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x \right] + \int_{\partial \Omega} \phi \delta x \cdot n d\partial \Omega \end{aligned} \quad (39)$$

Recordando que la variación total del trabajo de las cargas externas cuando  $\delta x = Cte$ , es dado por:

$$\widehat{\delta V}_{\partial \Omega} = \widehat{\delta} \int_{\partial \Omega} t \cdot u d\partial \Omega = \int_{\partial \Omega} [t \cdot \delta u + t \cdot (\nabla u) \delta x] d\partial \Omega \quad (40)$$

la expresión de  $\widehat{\delta \pi}$  resulta:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta \pi} &= \delta \pi + \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta \varepsilon_0} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x \right] d\Omega + \\ &\quad \int_{\partial \Omega} [\phi \delta x \cdot n - t \cdot (\nabla u) \delta x] d\partial \Omega \end{aligned} \quad (41)$$

Admitiendo que el equilibrio de la lámina es satisfecho ( $\delta \pi = 0$  y  $\sigma n = t$  en  $\partial \Omega$ ), se sigue que:

$$\widehat{\delta \pi} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot \widehat{\delta \varepsilon_0} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \cdot (\nabla \varepsilon_0) \delta x \right] d\Omega + \int_{\partial \Omega} (\phi I - \nabla u^T \sigma) n \cdot \delta x d\partial \Omega \quad (42)$$

Si al trasladar el dominio  $\Omega$  un  $\delta x = Cte$  no variamos las cargas aplicadas ni la deformación inicial ( $\widehat{\delta \varepsilon_0} = 0$ ) la energía potencial se conserva, por tanto:

$$\widehat{\delta \pi} = \delta x \cdot \left[ \int_{\partial \Omega} (\phi I - \nabla u^T \sigma) n d\partial \Omega - \int_{\Omega} (\nabla \varepsilon_0)^T \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} d\Omega \right] = 0 \quad (43)$$

Teniendo en cuenta que  $\delta x$  es un vector constante de dirección arbitraria de la invariancia de  $\pi$  se sigue que:

$$\int_{\partial \Omega} (\phi I - \nabla u^T \sigma) n d\partial \Omega - \int_{\Omega} (\nabla \varepsilon_0)^T \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} d\Omega = 0 \quad (44)$$

En forma similar al caso analizado en el ítem anterior en que se tienen cargas en el dominio, el tensor momento energía deja de ser solenoidal.

Recordando que la tensión es derivada a partir del potencial  $\phi$  mediante la relación:

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_0} \quad (45)$$

La invariancia de la energía potencial puede ser expresada en la siguiente forma:

$$\int_{\partial \Omega} (\phi I - \nabla u^T \sigma) n d\partial \Omega + \int_{\Omega} (\nabla \varepsilon_0)^T \sigma d\Omega = 0 \quad (46)$$

Si la lámina contiene una fisura como se muestra en la figura 4 la relación anterior nos permite arribar a la expresión de la integral  $\mathcal{J}$  para cuando existen deformaciones iniciales:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= e_1 \cdot \int_{\Gamma_0} \Sigma n d\Gamma_0 = e_1 \cdot \int_{\Gamma} \Sigma n d\Gamma + e_1 \cdot \int_{\Omega} (\nabla \varepsilon_0)^T \sigma d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \phi dx_2 - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_1} d\Omega \end{aligned} \quad (47)$$

Obsérvese que el problema termo elástico puede ser tratado como un caso particular, para ello introducimos la siguiente relación:

$$\varepsilon_0 = \alpha \theta I \quad (48)$$

donde:

$\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica.

$\theta$  incremento de la temperatura.

$I$  tensor identidad en el plano.

Admitiendo que  $\alpha$  es constante y que  $\theta$  es un escalar función de la posición  $\theta = \theta(x)$  resulta:

$$\sigma \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_1} = \sigma \cdot \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_1} I = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_1} tr \sigma \quad (49)$$

La relación anterior nos permite particularizar la expresión de  $\mathcal{J}$  para llevar en cuenta efectos térmicos:

$$\mathcal{J} = \int_{\Gamma} \phi dx_2 - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} d\Gamma + \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} tr \sigma d\Omega \quad (50)$$

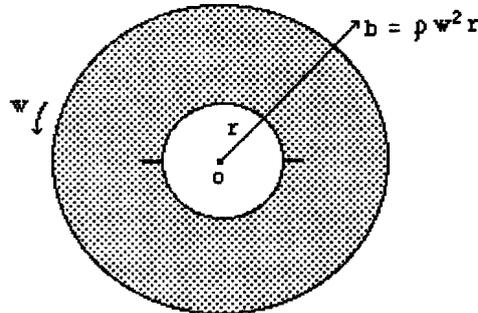


Figura 5

#### EJEMPLO

Como aplicación del procedimiento propuesto se estudia finalmente el caso de un disco hueco que gira a velocidad constante y que tiene dos fisuras radiales opuestas en la parte interior como indica la figura 5

Admitimos que la única fuerza aplicada en el dominio, es la fuerza de inercia, que para velocidad de giro constante, coincide con la dirección del radio y está dada por:

$$b = \rho w^2 r \quad (51)$$

donde  $\rho$  es la masa específica,  $w$  velocidad angular y  $r$  radio del punto considerado.

El análisis de tensiones y deformaciones del disco fué realizado mediante la aplicación del Método de Elementos Finitos y teniendo en cuenta la simetría del problema se estudió una cuarta parte del disco, ver figura 6, donde se muestra la malla empleada.

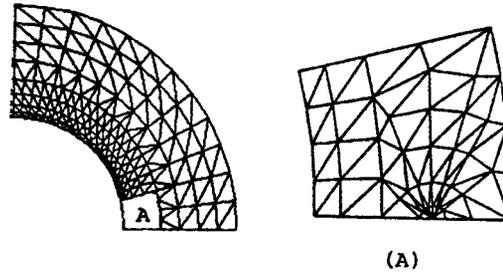


Figura 6

Posteriormente se calculó numericamente la integral  $\mathcal{J}$  para diferentes caminos mediante la utilización de un posprocesador implementado en el Sistema SDP que lleva en cuenta la presencia de cargas en el dominio [10].

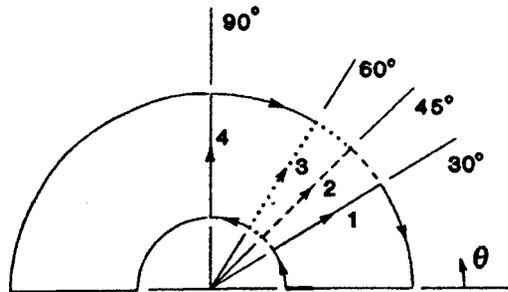


Figura 7

Los valores del factor de intensidad de tensiones  $K$  obtenidos a partir de los valores de  $\mathcal{J}$  calculados para los diferentes caminos indicados en la figura 7, de un disco con las siguientes características

radio interior 45mm

radio exterior 90mm

masa específica  $7.3 \times 10^{-6} \text{ N/mm}^3$

longitud de fisuras 9mm

velocidad angular 30.000 rpm = 3141,6 rd/s.

son comparados con el valor determinado por Murakami [12] en la tabla 1.

CAMINO	Int. Cont.	Int. Dominio	$\mathcal{J}$	$K_I$	Error %
1	33,88	6,78	40,66	2922	-3,01
2	30,62	11,22	41,84	2964	-1,61
3	27,98	14,83	42,81	2998	-0,49
4	27,48	17,67	45,15	3079	2,20
Murakami	-	-	-	3013	-

Tabla 1

### CONCLUSIONES

La ley de invariancia a una traslación rígida del dominio permite extender la integral  $\mathcal{J}$  a casos no previstos en la formulación original de Rice, por ejemplo para cargas en el dominio o cuando existen deformaciones iniciales como se muestra en este trabajo.

La variación de la energía potencial en estados planos de deformación o tensión originada por la variación del dominio puede asociarse al análisis de sensibilidad al cambio de forma utilizado en optimización estructural. De esta manera gran parte de las expresiones desarrolladas en optimización de forma pueden ser aplicadas en mecánica de fractura para modelar el crecimiento de fisuras.

El gran atractivo de emplear la integral  $\mathcal{J}$  conjuntamente con el método de elementos finitos en la determinación de factores de intensidad de tensión radica en la posibilidad de obtener el decrecimiento de energía potencial asociada a la propagación de una fisura mediante un único análisis de tensiones acompañado de un posterior cálculo numérico de la integral  $\mathcal{J}$ .

La utilización de elementos finitos simples tales como el triángulo de tensión constante, usado en el ejemplo presentado, permite obtener factores de intensidad de tensiones con errores perfectamente aceptables del punto de vista práctico sin necesidad de aproximar con precisión los campos que intervienen en el cálculo de  $\mathcal{J}$  en la zona próxima a la singularidad.

### AGRADECIMIENTO

El presente trabajo fué realizado con apoyo del CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, y de FAPERJ, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro.

### BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] Griffiths, A.A. (1921). "The phenomena of rupture and flow in solids", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A.221, pp. 163-198.
- [ 2 ] Irwin, G.R. (1957). "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *J. Appl. Mech.*, vol. 24, pp. 361-364.
- [ 3 ] Rice, J.R. (1968). "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *J. Appl. Mech.*, vol. 35, pp. 379-386.
- [ 4 ] Knowles, J.K. & Sternberg, E. (1972). "On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics", *Arch. rat. Mech. Anal.*, vol. 44, pp. 187-211.
- [ 5 ] Eshelby, J.D. (1974). "The calculation of energy release rates", *Prospects of Fracture Mechanics*, Noordhoff, Delft.
- [ 6 ] Haug, E.J.; Choi, K.K.; Komkov, V. (1986). *Design sensitivity analysis of structural systems*, Mathematics in Science and Engineering Academic Press.

- 
- [7] Taroco, E. (1991). "Leyes de conservación e integrales independientes del camino en mecánica de la fractura", *Anales del 7º. ENIEF*, Mar del Plata, Asociación Argentina de Mecánica Computacional.
- [8] Atluri, S.N. (1991). "Energetic approaches and path-independent integrals in fracture mechanics", Chapter 5, Vol. 2 *Computational Methods in the Mechanics of Fracture*, Atluri, S.N., (ed), Elsevier Science Publishers.
- [9] Fancello, E.A.; Taroco, E.; Feijóo, R. (1992). "Derivation of boundary integrals in fracture mechanics by using sensitivity analysis", *Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento n°. 32/92*, LNCC/CNPq, Rio de Janeiro.
- [10] Cimini Jr., C.A. (1992). "Determinação numérica de fatores de intensidade de tensão na mecânica da fratura elástica linear usando a Integral J e processos adaptativos". *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- [11] Baker, A. (1985). "The J-Concept: Theoretical basis and its use in EPFM", *Elastic-plastic fracture mechanics*, Larsson, L.H. (ed), Brussels and Luxembourg, pp. 13-53.
- [12] Murakami, Y. (1987). "Stress intensity factors handbook", Committee on Fracture Mechanics, *The Society of Materials Science*, Japan, Pergamon Press.
- [13] Taroco, E.; Las Casas, E.; Cimini, C. "Fracture mechanics via sensitivity analysis and numerical evaluation of J Integral in cracked sheets". A ser publicado *Journal of Constructional Steel* (special Brazilian ISSUE).

