

UN MODELO HIDRODINAMICO  
PARA FLUJO ESTRATIFICADO A SUPERFICIE LIBRE

Pablo A. Tarela - Angel N. Menéndez  
Laboratorio de Hidráulica Aplicada - INCyTH  
Casilla de Correo 21, 1802 Aeropuerto Ezeiza, Argentina

RESUMEN

Se presenta un modelo numérico para la descripción bidimensional en vertical de la hidrodinámica en canales. Mediante una aproximación de capa límite se desacoplan el cálculo de la superficie libre y el del campo de velocidades. La superficie libre se obtiene mediante un cálculo clásico de curvas de remanso. El problema del cálculo de velocidades es de tipo parabólico, y se lleva a cabo mediante el método de los elementos finitos, utilizando un nuevo tipo de elemento. Resulta así un esquema numérico altamente eficiente. El método numérico básico se desarrolla para flujo laminar y luego se lo extiende al caso turbulento. Los resultados obtenidos muestran un buen acuerdo con datos experimentales.

ABSTRACT

A two-dimensional numerical model on a vertical plane for open channel flow is presented. Using a boundary layer approximation the computations of the free surface and the velocity field are decoupled. The free surface is obtained through a classical backwater curve calculation. The velocity calculation is a parabolic problem. It is solved by a finite element method using a new type of element. The resulting numerical scheme is highly efficient. The method is developed for laminar flow and extended to the turbulent case. The results are in agreement with experimental data.

INTRODUCCION

La importancia social del problema de contaminación ambiental en general, y de contaminación hídrica en particular, es ampliamente conocido. Si bien han comenzado a aplicarse políticas de control a nivel mundial, la principal dificultad para regular el fenómeno es la posibilidad de cuantificar a priori los efectos contaminantes producidos por las diversas fuentes de polución.

En la actualidad, es posible combinar el conocimiento de los mecanismos físicos fundamentales que intervienen en el transporte y dilución (TD) de contaminantes en cursos de agua, con los avances que se produjeron en cálculo numérico y computación en las últimas décadas, para generar herramientas de predicción de gran utilidad a nivel ingenieril.

En el LHA-INCyTH se han desarrollado y aplicado con éxito modelos TD para el caso de flujos bien mezclados que pueden ser descriptos por esquemas integrados en vertical [1,2]. Actualmente se ha encarado el desarrollo de un modelo para flujo estratificado. En este trabajo se presenta la primera etapa del desarrollo, consistente en la simulación numérica de los campos de velocidad y presión para flujo estratificado en canales.

DESCRIPCION FISICA DEL FENOMENO

En general, los contaminantes † son arrojados a los cursos de agua como soluciones acuosas. Estas soluciones, según su tipo, pueden mezclarse homogéneamente con la masa del escurrimiento o ser influenciadas de tal manera por el campo gravitatorio que generen una

† Se entiende aquí por contaminante a cualquier solución cuyas propiedades fluidodinámicas (por ejemplo concentración, temperatura, densidad) difieran de las del curso de agua.

estratificación. Para describir esta estratificación es conveniente resolver la distribución vertical de las variables hidrodinámicas. Si bien ello conduce a una formulación tridimensional en el espacio descrita por las ecuaciones de Navier-Stokes, la existencia de una dirección principal de flujo a lo largo del eje del canal permite plantear una integración según la coordenada transversal, lo que lleva a un modelo hidrodinámico bidimensional sobre un plano vertical.

Por otro lado, en problemas de convección forzada, como el presente, el contaminante no ejerce, en general, una acción significativa sobre la hidrodinámica. En consecuencia, el transporte del contaminante puede plantearse como un problema desacoplado y la hidrodinámica resolverse como un modelo separado. En lo que sigue se describen los aspectos principales del modelo hidrodinámico. Para el desarrollo básico se efectuaron las siguientes hipótesis:

- i) El flujo es "viscoso", es decir, el proceso de difusión se parametriza mediante un coeficiente de viscosidad.
- ii) El flujo es incompresible.
- iii) El régimen es permanente.
- iv) La pendiente del canal es lo suficientemente pequeña como para que el flujo sea subcrítico.
- v) Las variaciones del fondo del canal son lo suficientemente suaves como para evitar la aparición de zonas de recirculación.
- vi) La escala de longitud horizontal es mucho mayor que la profundidad (aguas poco profundas), por lo cual la difusión horizontal es despreciable y la presión es esencialmente hidrostática.

#### MODELO MATEMATICO

Debido a las hipótesis v) y vi) el problema es parabólico en las velocidades. Esto corresponde a una aproximación de capa límite. El carácter elíptico del problema determina la forma de la superficie libre. Esta se obtiene mediante la integración de las ecuaciones de Saint Venant [3]. En régimen permanente, ésto es un clásico cálculo de "curvas de remanso". Esta superficie libre es impuesta como *tapa rígida* al cálculo de la evolución espacial de los perfiles de velocidad, resultando una metodología muy eficiente desde el punto de vista del tiempo computacional.

Por simplicidad, para el desarrollo del método de cálculo se consideró que el canal es rectangular y prismático, y se despreciaron las contribuciones de los esfuerzos en las paredes laterales. Además, se tomaron valores constantes de la densidad  $\rho$  y la viscosidad  $\nu$  (flujo laminar).

Introduciendo las escalas:

$$\begin{aligned} L &= \text{distancia longitudinal} \\ H &= \text{profundidad} \\ U &= \text{velocidad longitudinal} \\ UH/L &= \text{velocidad vertical} \\ \rho g H &= \text{presión} \end{aligned} \quad (g = \text{gravedad})$$

las formas adimensionales de las ecuaciones que describen el flujo son, entonces:

$$\alpha \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} \left( \sin\theta - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\alpha \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\alpha Fr^2} \left( \cos\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

donde  $x$  y  $z$  son las coordenadas horizontal y vertical, respectivamente,  $u$  y  $w$  las componentes de la velocidad según  $x$  y  $z$ , respectivamente,  $p$  la presión,  $Re=UH/\nu$  el número de Reynolds,  $Fr=U/(gH)^{1/2}$  el número de Froude,  $\alpha=H/L$  la relación de aspectos y  $\theta$  la pendiente del canal.

Las ecuaciones (1)-(3) expresan la forma parabolizada de las ecuaciones de Navier-Stokes, que se asocian a la teoría de capa límite. Ellas indican un proceso de marcha en la dirección longitudinal  $x$ . En rigor, la aproximación de capa límite requiere simplificar la ecuación (2) despreciando los términos advectivos y de difusión, con lo que resulta una distribución hidrostática de presiones. No obstante, aunque pequeños, se los ha preservado porque permiten imponer condiciones de borde más robustas.

Las condiciones de contorno asociadas al sistema (1)-(3) son:

$$\text{Fondo del canal:} \quad u = w = 0 \quad (\text{no deslizamiento e impenetrabilidad}) \quad (4)$$

$$\text{Superficie libre:} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{ausencia de tracción por viento}) \quad (5)$$

$$u \frac{\partial h}{\partial x} - w = 0 \quad (\text{condición cinemática}) \quad (6)$$

$$p = 0 \quad (\text{presión atmosférica}) \quad (7)$$

donde  $h$  indica el nivel de la superficie libre y  $n$  la normal a la misma. Como condiciones iniciales "aguas arriba" ( $x=0$ ) se prescriben las distribuciones verticales de los campos de velocidad y presión.

#### METODO NUMERICO DE RESOLUCION

Para la resolución del sistema de ecuaciones (1)-(3) y sus condiciones de contorno (4)-(7) se emplea el método de los elementos finitos a partir de una formulación débil.

El carácter parabólico permite la implementación de un proceso de marcha en la dirección longitudinal para su resolución. Esto es, conocidos los campos en una sección perpendicular a la dirección principal de flujo, se calculan los campos incógnita en la sección siguiente, siempre avanzando en el sentido de la corriente. Por ello es conveniente discretizar el dominio de cálculo en elementos agrupados en columnas verticales, con anchos adaptados a los gradientes longitudinales. Estas consideraciones indican que se adapta bien al problema es el cuadrilátero, siendo suficiente una interpolación lineal de las coordenadas.

El esquema numérico queda formalmente cerrado al definir las funciones de forma para las variables  $u, w, p$  y las funciones de peso. Para ello deben tenerse en cuenta las dificultades numéricas provenientes de la condición de incompresibilidad y la naturaleza de los términos convectivos [4]. La condición de incompresibilidad restringe los espacios asociados a las interpolaciones de velocidades y presión, a través de la condición de estabilidad de Babuška-Brezzi (BB), permitiendo sólo la utilización de unos pocos elementos del tipo cuadrangular [5]. Los elementos Q8-C4 y Q9-C4 son los que usualmente generan los mejores resultados para el problema elíptico. Sin embargo, dado el carácter parabólico de la presente formulación, se efectuaron ensayos con tres tipos de elemento (ver figura 1) :

- Tipo A) 4 nodos de velocidad interpolada linealmente; la presión es considerada constante en las caras de cálculo, variando linealmente entre ambas.
- Tipo B) 4 nodos de velocidad y presión, ambas interpoladas linealmente (Q4-C4).
- Tipo C) 6 nodos de velocidad interpolada cuadráticamente en la dirección vertical y linealmente en la dirección longitudinal; 4 nodos de presión interpolada linealmente. (Q6-C4).

Se puede notar que todos los elementos propuestos carecen de nodos intermedios de velocidad en la dirección longitudinal, facilitando el proceso de cálculo. Esto significa que las velocidades y la presión interpolan de igual manera en esa dirección (linealmente), lo cual está justificado por la ausencia del término difusivo en  $x$ , que es el que asocia los roles de

la presión y el gradiente de velocidad. En cambio, los elementos A y C tienen interpolaciones mixtas en la dirección vertical, donde está presente el término de difusión.

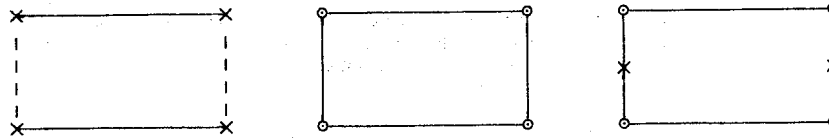


FIGURA 1 - Elementos ensayados: Tipos A (izquierda), B (centro) y C (derecha).  
Simbología: - - Lado de presión constante x Nodo de velocidad o Nodo de velocidad y presión.

En cuanto al tratamiento de los términos de advección, ya es común la utilización de esquemas de Petrov-Galerkin con funciones de peso perturbadas según la intensidad y la dirección del flujo (por ejemplo el método SUPG [6]). Sin embargo, la formulación parabolizada contiene implícitamente un criterio de "upwinding", haciendo innecesaria la modificación de las funciones de peso, que pueden ser elegidas iguales a las de forma. En tal sentido, debido a que sólo son incógnitas las variables de campo pertenecientes a la columna de cálculo aguas abajo, el esquema resultante es equivalente a uno tipo elíptico, pero en el que se prescriben las contribuciones pesadas aguas arriba. El resultado es que las ecuaciones quedan ponderadas sólo en un sentido, el cual coincide con el del flujo principal en la dirección longitudinal, y por lo tanto la información es transmitida siguiendo la corriente. Como las velocidades verticales resultan mucho menores que las longitudinales, un "upwinding" adicional en la dirección vertical carece de importancia desde este punto de vista. La no linealidad de los términos advectivos es considerada a través de un método iterativo de punto fijo, en el cual a los factores  $u$  y  $w$  se le asignan los valores correspondientes a la última iteración.

Para el ensamblado final, las variables de campo han sido asociadas a las ecuaciones que mejor las representan. La velocidad horizontal  $u$  está naturalmente asociada a la ecuación de cantidad de movimiento (CM) según  $x$  (CMx). Como el flujo ocurre esencialmente a régimen hidrostático, la presión está ligada a la ecuación de CM según  $z$  (CMz). Finalmente, la velocidad vertical responde principalmente para mantener continuidad. De esta manera, la ecuación  $j$ -ésima es pesada por la función  $W_j$  según el siguiente esquema *no-convencional* :

$$W_j = \begin{cases} N_j & \text{si } j \text{ corresponde a CMx o continuidad} \\ M_j & \text{si } j \text{ corresponde a CMz} \end{cases} \quad (8)$$

donde  $N_j$  interpola a las velocidades y  $M_j$  a la presión. En realidad, en CMz los términos advectivos han sido pesados de igual forma que en CMx, ya que este upwinding adicional resulta en un esquema más estable, aunque *no-consistente* [6].

Sin embargo, el tratamiento propuesto en (8) mantiene nulos los términos de la diagonal de la matriz del ensamble asociados a la ecuación de continuidad (esquema centrado para  $w$ ), generando el efecto de "tablero de ajedrez" en esta variable. Esto es el resultado de la antisimetría  $\dagger$  del operador ponderado que actúa sobre  $w$  en la ecuación de continuidad. Para romper esta antisimetría se han sesgado las funciones de peso asociadas a dicha ecuación, de tal forma que en las ecuaciones correspondientes a los nodos de las esquinas de los elementos resulte:

$\dagger$  respecto a la contribución nodal del operador cuando se ensamblan dos elementos contiguos.

$$w_j = \begin{cases} N_j & \text{esquina inferior} \\ 0 & \text{esquina superior} \end{cases} \quad (9)$$

Para el caso del elemento tipo C, la función de peso para la ecuación de continuidad correspondiente al nodo intermedio es tomada como la función de forma asociada al nodo de la esquina superior, lo que garantiza la conservación de la masa.

### ENSAYOS NUMERICOS

Se efectuaron ensayos numéricos consistentes en seguir la evolución de perfiles perturbados hasta alcanzar el equilibrio. Para ello se consideró un canal de pendiente uniforme y una superficie libre paralela al fondo. En todos los casos, se tomó una distribución de presión inicial hidrostática y velocidad vertical nula. Como distribución inicial de velocidad longitudinal se impuso la suma del perfil de equilibrio (parabólico para el caso laminar) y una perturbación de caudal nulo. La perturbación cumple la condición de no deslizamiento en el fondo. Su intensidad se mide en términos de la velocidad en la superficie libre respecto del valor de equilibrio.

De particular relevancia resulta la determinación de la relación de aspectos de los elementos, debido a que las escalas de longitud vertical ( $L_z$ ) y horizontal ( $L_x$ ) resultan disímiles. En base a la comparación de tiempos de convección y difusión resulta

$$\frac{L_x}{L_z} \propto Re \quad (10)$$

la cual ha sido adoptada en la elección del tamaño de los elementos.

De los ensayos surgieron las siguientes conclusiones acerca de los elementos:

Tipo A) Resulta inadecuado, ya que el cálculo se torna inestable si el elemento no es rectangular. Esto se debe a la aparición de un gradiente de presión longitudinal no físico que no es compensado por alguno de cantidad de movimiento. Un comportamiento similar ha sido informado por King [7] para el caso estratificado.

Tipo B) Genera oscilaciones espúrias, tal como se muestra en la figura 2. Si bien las oscilaciones llegan a atenuarse aguas abajo, el comportamiento no es aceptable. Aunque este comportamiento es conocido, el elemento Q4-C4 ha sido ensayado debido a que el problema tratado no es del tipo elíptico, para el cual su utilización está prácticamente prescrita en la literatura [5,8], a menos que se tomen previsiones especiales [9,10,11].

Tipo C) Este elemento funciona satisfactoriamente, como se ilustra en la figura 2.

En estos ensayos el valor del número de Reynolds fue  $Re=181$ , utilizándose un paso horizontal  $\Delta x=2h$  y 50 elementos verticales de altura uniforme.

El elemento tipo C también pasa satisfactoriamente las "pruebas de la parcela" para elementos mixtos [12]. La convergencia de la solución se ilustra en la figura 3, que muestra la superposición de resultados obtenidos con mallas de cálculo con diferentes densificaciones. Una propiedad importante es que el elemento conserva masa.

Se observa que la tendencia hacia el equilibrio es de tipo exponencial. Esto permite definir una longitud de adaptación, como la distancia a la cual la perturbación inicial disminuye hasta un valor considerado despreciable. Se verificó que esta longitud no depende de la intensidad de la perturbación inicial (comportamiento lineal) hasta intensidades del 30%. En cambio, la longitud de adaptación depende del número de Reynolds, tal como se observa en la figura 4. En la figura 5 se presenta la evolución del perfil de la perturbación.

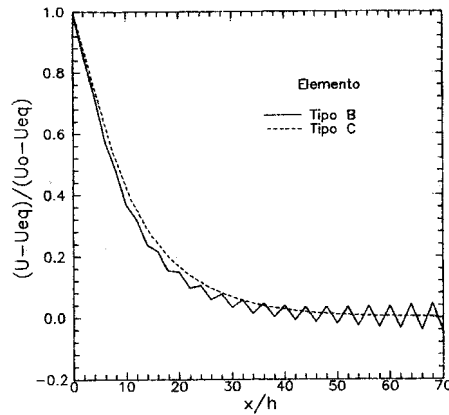


FIGURA 2 - Evolución de la velocidad longitudinal para distintos tipos de elementos y para  $z=h/2$ . ( $U_{eq}$  = valor de equilibrio,  $U_0$  = valor inicial).

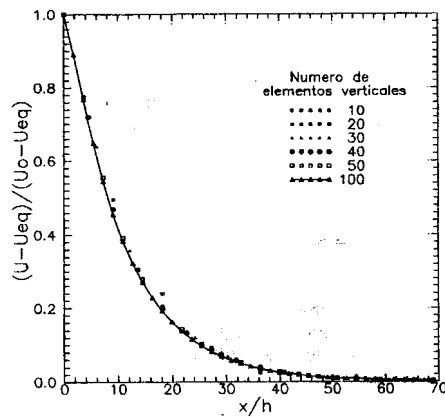


FIGURA 3 - Evolución de la velocidad longitudinal para distintas densificaciones verticales y para  $z=h/2$ .

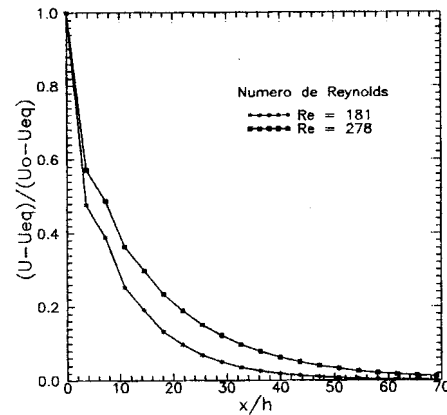


FIGURA 4 - Evolución de la velocidad longitudinal para distintos números de Reynolds y para  $z=h/2$ .

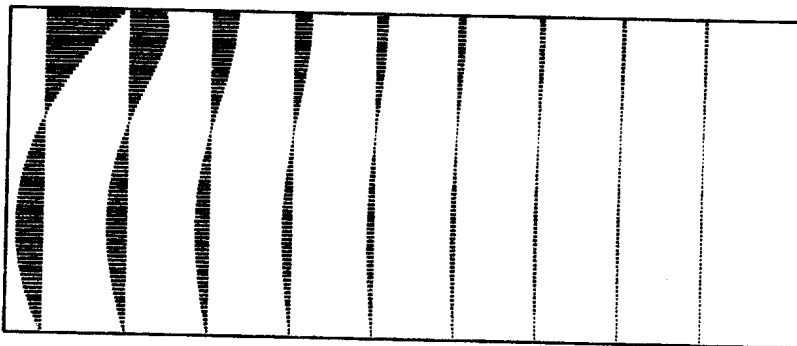


FIGURA 5 - Evolución del perfil de la perturbación de la velocidad horizontal. Cada perfil está separado por una distancia de  $4.5h$ .

#### FLUJO TURBULENTO

En los ensayos numéricos descritos previamente se supuso, por simplicidad, viscosidad constante, es decir, se simularon condiciones de régimen laminar. En régimen turbulento, el flujo presenta una doble estructura con escalas disímiles: por un lado, una delgada capa interna, lindante con el fondo, donde los efectos viscosos son significativos; por el otro, una capa externa prácticamente sin influencia de la viscosidad. En los problemas de interés, la capa interna, dado su relativamente corta longitud de adaptación, puede considerarse en equilibrio local. En consecuencia, resulta conveniente resolver solo el movimiento en la capa externa.

Una primera aproximación al problema consiste en utilizar una expresión analítica para la viscosidad de torbellino en la capa externa [13]:

$$\nu = \nu_0 \begin{cases} 1 - (1 - \frac{2z}{h})^2 & z < h/2 \\ 1 & z \geq h/2 \end{cases} \quad (11)$$

con

$$\nu_0 = \frac{1}{4} kfQ \quad (12)$$

donde  $k=0.4$  es la constante de Von Karmán,  $Q$  el caudal por unidad de ancho y  $f=u_*/\bar{u}$  el factor de fricción, con  $u_*$ =velocidad de corte y  $\bar{u}$ =velocidad media vertical.

La intersección de las capas interna y externa genera una zona de solape donde el perfil de velocidad horizontal es logarítmico (salvo en el caso extremo cercano a la separación de la capa límite, que no es de interés al presente). Esta zona se ubica en el rango  $30 \leq z^+ \leq z_m^+$ , donde  $z^+ = z/z_0$ , con

$$z_0 = \frac{h}{2} \exp\left\{-\left(\frac{1}{3} + \frac{k}{f}\right)\right\} \quad (13)$$

y  $z_m^+ \cong 300$  para situaciones cercanas al equilibrio local, disminuyendo gradualmente cuando aumenta el apartamiento respecto de esas condiciones de equilibrio. En consecuencia, las condiciones de borde correspondientes al fondo se reemplazan por

$$u(z^+=30) = u_L(z^+=30) \quad (14)$$

$$w(z^+=30) = 0 \quad (15)$$

donde  $u_L$  es la ley logarítmica [14].

Se efectuaron ensayos numéricos similares a los ejecutados para el caso laminar, de modo de determinar la longitud de adaptación. En este caso, sin embargo, la malla de cálculo ha sido densificada en el fondo debido a la existencia de fuertes gradientes de velocidad en esa región.

En la Figura 6 se muestran resultados correspondientes a dos factores de fricción distintos, donde se observa la sensibilidad de los resultados a ese parámetro. La longitud de adaptación calculada para  $f=0.072$  acuerda bien con los valores observados, de acuerdo a lo informado por van Rijn [13].

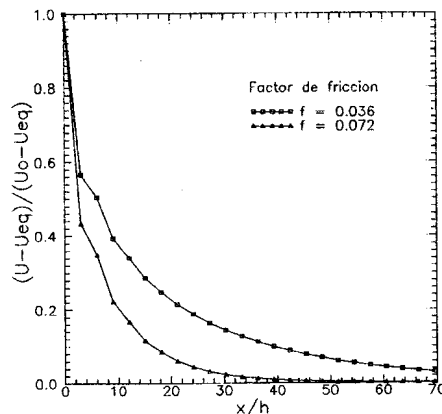


FIGURA 6 - Evolución de la velocidad longitudinal en flujo turbulento para distintos factores de fricción y para  $z=h/2$ .

#### CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método numérico altamente eficiente para el cálculo de flujos bidimensionales en el plano vertical y a superficie libre.

Para el cálculo de las velocidades se ha implementado un nuevo elemento, cuyo comportamiento resulta satisfactorio desde el punto de vista numérico.

Si bien los ensayos presentados corresponden a un flujo homogéneo, este método se ha de aplicar al caso estratificado, que es el que generó el presente desarrollo.



## REFERENCIAS

- [1] Carreras, P. E. - Menéndez, A. N., *Mathematical simulation of pollutant dispersion*, Ecological Modelling, vol. 52, p. 29-40, 1990.
- [2] Menéndez, A. N., *Métodos numéricos para problemas de transporte de contaminantes*, MECOM'91, Santa Fe-Paraná, 1991.
- [3] Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, MacMillan Pub. Co., 1966.
- [4] Tarella, P. A., *Simulación Numérica de la Evolución del Perfil de Corrientes en Flujo a Superficie Libre*, Informe LHA-INCyTH 115-01-92, mayo 1992.
- [5] Zienkiewicz, O. C. - Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, vol. 1, Mc. Graw-Hill, 1989.
- [6] Brooks, A. N. - Hughes, T. J. R., *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 32, p. 199-259, 1982.
- [7] King, I., *Finite Element modelling of stratified Flow in Estuaries and Reservoirs*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 5, p. 943-955, 1985.
- [8] Jackson, C. P. - Cliffe, K. A., *Mixed Interpolation in Primitive Variable Finite Element Formulations for Incompressible Flow*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 17, p. 1659-1688, 1981.
- [9] Hughes, T. J. R. - Franca, L. P. - Ballestra, M., *A New Finite Element Formulation For Computational Fluid Dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi Condition: A Stable Petrov-Galerkin Formulation of the Stokes Problem Accomodating Equal-Order Interpolations*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 59, p. 85-99, 1986.
- [10] De Sampaio, P. A. B., *A Petrov-Galerkin Formulation for the Incompressible Navier-Stokes Equations Using Equal Order Interpolation for Velocity and Pressure*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 31, p. 1135-1149, 1991.
- [11] Karam Filho, J. - Loula, A. F. D., *On Stable Equal-Order Finite Element Formulations for Incompressible Flow Problems*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 34, p. 655-665, 1992.
- [12] Zienkiewicz, O. C. - Qu, S. - Taylor, R. L. - Nakazawa, S., *The Patch Test for Mixed Formulations*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 23, p. 1873-1883, 1986.
- [13] van Rijn, L. C., *Mathematical Modelling of Morphological Processes in the Case of Suspended Sediment Transport*, Delft Hydraulics Communication No. 382, June 1987.
- [14] Menéndez, A. N. - Ramaprian, B. R., *Wall Functions for Unsteady Turbulent Boundary Layers*, Proc. Fourth Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flows, Swansea, U.K., 1985.

