ANALISIS DE CONDICIONES DE CONTORNO Y CAMBIO DE REGIMEN EN MODELOS HIDRODINAMICOS CON FONDO MOVIL

Pablo M. Jacovkis

Instituto de Càlculo, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

El flujo hidrodinámico sobre canales rectangulares con fondo móvil se describe, para caudales sólidos pequeños, mediante un sistema hiperbólico casilineal. Dos de los autovalores reales de la matriz del sistema son siempre estrictamente positivos, y uno es siempre estrictamente negativo, por lo cual es necesario siempre dar dos condiciones de contorno en el extremo abierto aguas arriba del tramo y una en el extremo abierto aguas abajo, y se puede tener transición de régimen sin que la matriz se haga singular. Se modeliza numéricamente el flujo mediante un método en diferencias finitas implícito, se analiza la transición de régimen y se estudian diferentes combinaciones de condiciones de contorno.

ABSTRACT

The hydrodynamic flow on rectangular channels with a mobile bed is governed, for small solid discharges, by a quasi-linear hyperbolic system. Two of the real eigenvalues of the matriz of the system are always strictly positive, and the other is always strictly negative, so that two boundary conditions are always necessary at the upstream extreme point, and one at the downstream extreme point, and the matrix of the system does not become singular at a transition of regime. The flow is numerically modeled by an implicit finite-difference method, the transition of regime is analysed, and different combinations of boundary conditions are studied.

INTRODUCCION

El flujo no estacionario unidimensional gradualmente variado de aguas poco profundas sobre superficie libre y con fondo fijo (flujo en canales abiertos, o en ríos, considerando solamente la coordenada espacial en el sentido del eje longitudinal del canal o río) se modeliza mediante el sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas casilineales, llamadas ecuaciones de Saint-Venant de la hidráulica fluvial. Trabajaremos en este artículo con las ecuaciones en su forma simplificada considerando al cauce del río o canal como rectangular prismático, en cuyo caso la ecuaciones (de aguas poco profundas, según la literatura norteamericana) son

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial(h+e)}{\partial x} + c_b\frac{u|u|}{h} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

donde x es la variable espacial, $x_A \le x \le x_B$, t es el tiempo, $u = u(x,t)$ es la velocidad del agua, $h = h(x,t)$ es la altura desde el fondo hasta la superficie libre, $e = e(x)$ es la altura del fondo medida desde un plano fijo de referencia, c_b es un coeficiente relacionado con la resistencia por fricción, y g es la aceleración de la gravedad. La deducción de estas ecuaciones, que representan conservación de cantidad de movimiento y de masa, respectivamente, pueden verse en Stoker [1]. El coeficiente de resistencia c_b , función de la "aspereza" del lecho, está dado, según la fórmula empírica de Strickler, por

$$c_b = A(d_m/h)^{1/3}$$

donde A es una constante empírica, y d_m es el diámetro medio de las partículas del lecho. Con las condiciones iniciales

$$u(x,t_o) = u_o(x) \quad , \; h(x,t_o) = h_o(x) \qquad (3)$$

y convenientes condiciones de contorno en los extremos x_A y x_B, éste es un problema mixto con condiciones iniciales y de contorno. El sistema (1), (2) se puede escribir vectorialmente como

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial x} = f$$

donde $w = (u,\ h)$, $f = (-g\partial e/\partial x - c_b u|u|/h,\ 0)$ y

$$A = \begin{bmatrix} u & g \\ h & u \end{bmatrix}$$

y la hiperbolicidad es equivalente a que los autovalores $\lambda_{1,2}$ de la matriz A sean reales, lo que se cumple en este caso dado que son

$$\lambda_{1,2} = u \mp \sqrt{gh}$$

Si los autovalores tienen distinto signo, se dice que el flujo está en régimen subcrítico, y es necesario dar una condición de contorno en cada extremo abierto del tramo, o sea una aguas arriba (en x_A) y otra aguas abajo (en x_B). Si los valores tienen igual signo, es necesario dar dos condiciones de contorno en el extremo aguas arriba, y se dice que el régimen de flujo es supercrítico. Si uno de los autovalores se anula, o sea la matriz es singular, se tiene régimen crítico.

Dado que las ecuaciones de aguas poco profundas no son resolubles analíticamente, existen numerosos métodos numéricos para resolverlas numéricamente, especialmente en el caso subcrítico; una amplia bibliografía de métodos numéricos en modelización fluvial puede verse en Liggett y Cunge [2].

Puede observarse que si el régimen de un flujo cambia de subcrítico a supercrítico o al revés, se produce un cambio de las condiciones de contorno necesarias en cada extremo: pasan de una a dos o de una a ninguna, o de dos a una, o de ninguna a una. Naturalmente, esto dificulta la modelización concreta de situaciones límites, en las cuales, de acuerdo a las condiciones de contorno, el régimen puede pasar de subcrítico a supercrítico o al revés (régimen transicional), pero no se puede calcular a priori si y cuándo se producirá este fenómeno: no es sencillo tener condiciones de contorno "esperando" para ser utilizadas.

Si se supone que el fondo del lecho rectangular es móvil, es decir, que e depende también de t, debido a que la corriente puede arrastrar partículas del fondo, es necesario agregar una ecuación adicional al modelo (1), (2): una ecuación de conservación de masa sólida, que será

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

donde ahora $G = G(u,h)$ es el caudal sólido por unidad de ancho. Se necesita ahora también la condición inicial adicional

$$e(x,t_o) = e_o(x) \qquad (5)$$

La ecuación de estado para G es empírica, pues el fenómeno de erosión fluvial no es aún totalmente conocido desde el punto de vista de los procesos físicos. Existen diversas formas de plantear esa ecuación; siguiendo a Gradowzyk [3], utilizaremos la fórmula de Meyer-Peter y Müller, en la cual se considera que a partir de un umbral el caudal sólido aumenta monótonamente con la velocidad y decrece monótomamente con la altura desde el fondo:

$$G = \chi\,(|\tau| - \tau_o)^{3/2} \qquad \text{si } |\tau| > \tau_o$$

$$G = 0 \qquad \text{si } |\tau| \le \tau_o$$

donde τ es la tensión de corte dada por la fórmula $\tau = \rho c_b u|u|$, ρ es la densidad del fluido, χ es un coeficiente empírico y τ_o es el umbral de tensión, por debajo del cual no hay movimiento de fondo. Otras fórmulas empíricas introducidas en la literatura pueden verse en Shen [4]; un estudio conceptual detallado del transporte de fondo puede verse en Graf [5]. Escrito en forma vectorial el modelo es ahora

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{d} \qquad (6)$$

donde $\mathbf{w} = (u,\ h,\ e)$, $\mathbf{d} = (-gc_b u|u|/h,\ 0,\ 0)$, y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} u & g & g \\ h & u & 0 \\ G_u & G_h & 0 \end{bmatrix}$$

La hiperbolicidad del sistema equivale a que los autovalores de $\mathbf{B}$ sean reales y distintos.

El modelo (6), (3), (5) no toma en cuenta la posibilidad de partículas de fondo que pasan a estar en suspensión, o estaban en suspensión y decaen; en este caso hace falta un modelo más complejo, como puede verse en Gradowczyk y Jacovkis [6].

ANALISIS DEL MODELO DE FONDO MOVIL

La hiperbolicidad del sistema casilineal (6) se puede verificar (Gradowczyk [3], Jacovkis [7]) en un entorno del umbral de erosión/sedimentación. Es decir, se tiene el siguiente

Teorema 1. Si G es pequeño, el sistema (6) es hiperbólico.

Demostración. Si $P(\lambda,G_1,G_2) = \lambda^3-2u\lambda^2+(u^2-gh-gG_u)\lambda+g(uG_u-hG_h)$ es el polinomio característico de B, donde G_u y G_h son las derivadas de G respecto de u y de h, respectivamente, aplicando el teorema de las funciones implícitas en un entorno de los tres puntos $(\lambda,0,0)$ en que $P(\lambda,0,0)$ se anula, se observa que si $u^2\neq gh$ (o sea si el régimen no es crítico), se tiene solución a la ecuación $P(\lambda(G_1,G_2),G_1,G_2)=0$. Si $u^2=gh$ el argumento no vale, pero, analizando los ceros del polinomio, se puede encontrar una región de satisfacción de la igualdad.

Es decir, hay un entorno de un segmento de curva $u^2=gh$ en el plano (u,h) en que el sistema (6) es hiperbólico. Pero vale más: si el fondo se mueve, uG_u y hG_h son no nulos y de distinto signo (si consideramos que el fluido se desplaza desde la izquierda hacia la derecha, $u > 0$, $G_u > 0$ y $G_h < 0$) o sea que el término de orden cero del polinomio característico no se anula. Como ese término es igual a $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, donde λ_1, λ_2, λ_3 son las raíces del polinomio, tenemos el siguiente teorema adicional:

Teorema 2: En la región de hiperbolicidad, la matriz B no se anula nunca; hay siempre dos autovalores positivos y uno negativo.

Como la región de hiperbolicidad incluye subregiones de régimen subcrítico y supercrítico, eso significa que se puede pasar de régimen subcrítico a supercrítico y de régimen supercrítico a subcrítico manteniendo las mismas condiciones de contorno (al menos, en teoría). No demasiado cerca del régimen crítico, un autovalor positivo y uno negativo son perturbaciones de los autovalores de las ecuaciones hidrodinámicas con fondo fijo, y el tercero indica de hecho la velocidad del transporte de fondo. Más concretamente: considerando los autovalores como perturbaciones de autovalores para fondo fijo se tiene

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh} + \varepsilon_1$$

$$\lambda_2 = u + \sqrt{gh} + \varepsilon_2$$

$$\lambda_3 = \varepsilon_3$$

donde ε_1, ε_2, ε_3 son pequeños y $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. En un entorno del régimen crítico este desarrollo deja de tener sentido, pues $u - \sqrt{gh}$ es del mismo orden que ε_1. En régimen supercrítico lejos de la curva crítica, dado que ningún autovalor cruza el cero, se tendrá que los autovalores se pueden representar por

$$\lambda_1 = \varepsilon_1$$
$$\lambda_2 = u - \sqrt{gh} + \varepsilon_2$$
$$\lambda_3 = u + \sqrt{gh} + \varepsilon_3$$

con λ_1 negativo y λ_2 y λ_3 positivos. Esta representación permite describir el fenómeno de *antiduna*, o sea onda de fondo hacia atrás, que se puede comprobar empíricamente (ver, por ejemplo, Guy *et al* [8]).

LAS CONDICIONES DE CONTORNO

La teoría expuesta en el parágrafo anterior indica cuántas condiciones de contorno son necesarias en cada extremo, y muestra la viabilidad de construcción de un modelo transicional, que sirva bajo régimen subcrítico y bajo régimen supercrítico. No indica *cuáles* condiciones son aceptables físicamente. Es conocido en modelos hidrodinámicos que hay condiciones que pueden provocar situaciones inadmisibles si no se tiene sumo cuidado; un caso obvio es, en modelos hidrodinámicos con fondo fijo, dar como condición de contorno caudal tanto aguas arriba como aguas abajo: si se realiza una simulación durante un intervalo suficientemente prolongado, las condiciones de contorno deben respetar la ley de conservación de masa (la entrada no debe ser demasiado distinta de la salida, para que el cauce no se vacíe o se inunde). En este trabajo se experimentó con algunas combinaciones posibles de condiciones de contorno aguas arriba y aguas abajo. Las condiciones consideradas fueron las siguientes: caudal, velocidad, altura, cota de fondo y cota desde un plano de referencia. Los experimentos numéricos que se detallan más adelante indican cuáles fueron aceptables y cuáles no para el modelo utilizado, que describiremos someramente a continuación.

EL MODELO NUMERICO

Sobre la base del análisis anterior, se preparó un modelo numérico para experimentar en régimen transicional, y estudiar la factibilidad de las condiciones de contorno. Dado que no era el objetivo de la investigación - en esta etapa - llegar a simulaciones con un alto grado de precisión, se utilizó un método de diferencias finitas implícito de primer orden muy difundido en modelización fluvial con lecho fijo: el método de Preissmann (ver descripciones detalladas en Liggett y Cunge [2] o en el trabajo original de Preissmann [9]). Las discretizaciones del método son las siguientes: si $\{x_i, t^n\}$ denota un punto genérico de la discretización en diferencias finitas adoptada, $\Delta x_i = |x_{i+1} - x_i|$, $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$, la aproximación numérica de una función f y de sus derivadas están dadas por

$$f(x,t) \sim \theta(f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1})/2 + (1-\theta)(f_{i+1}^{n} + f_i^{n})/2$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \sim (f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1} - f_{i+1}^{n} - f_i^{n})/(2\Delta t^n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \theta(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1})/\Delta x_i + (1-\theta)(f_{i+1}^{n} - f_i^{n})/\Delta x_i$$

Se puede probar que, si el sistema es hiperbólico lineal con coeficientes constantes, el método de Preissmann es estable según el criterio de von Neumann para coeficiente de "implicitud" $\theta \geq 1/2$, y por extensión se supone que el esquema es estable para sistemas hiperbólicos casilineales. Normalmente la estabilidad se verifica.

Discretizando el sistema (6) mediante el esquema de Preissmann, se llega a que es necesario resolver en cada intervalo temporal de cálculo un sistema lineal de la forma

$$B_1^{n+1} w^{n+1} = B_0^n w^n + p \qquad (7)$$

donde w^{n+1} es el vector de incógnitas $(u_i^{n+1}, h_i^{n+1}, e_i^{n+1})$ en los puntos de discretización, $B_1^{n+1}=B_1^{n+1}(\Delta x,\Delta t)$ y $B_0^n=B_0^n(\Delta x,\Delta t)$ indican operadores lineales en diferencias finitas que reemplazan derivadas, w^n es el vector de valores conocidos en el tiempo actual t^n, y p es un vector conocido obtenido a partir de las condiciones de contorno y del término de resistencia. La resolución del sistema (7) se ve facilitada por el hecho de que la matriz B_1^{n+1} tiene una estructura de bloques diagonales de 6 filas por 3 columnas cada una, con excepción del primer bloque, que es de 4 filas por 3 columnas (debido a que hay dos condiciones de contorno correspondientes a sendas columnas) y del último, que es de 5 filas por 3 columnas (debido a que hay una condición de contorno). Como en los modelos hidrodinámicos con fondo fijo, se usa pivoteo diagonal, sin que esto origine inestabilidades numéricas en la resolución del sistema lineal. Cada bloque i es de la forma siguiente:

$$A_{ki1}u_i^{n+1}+A_{ki2}h_i^{n+1}+A_{ki3}e_i^{n+1}+A_{ki4}u_{i+1}^{n+1}+A_{ki5}h_{i+1}^{n+1}+A_{ki6}e_{i+1}^{n+1}=A_{ki7}$$

donde $k=1,2,3$ indica cuál ecuación ((1), (2) o (4)) se discretiza, i indica que la discretización es en el intervalo entre los puntos x_i y x_{i+1}, y los coeficientes A_{kij} se deben al método numérico usado. El bloque i está conectado con el bloque $i+1$ pues las columnas correspondientes a las incógnitas u_{i+1}^{n+1}, h_{i+1}^{n+1} y e_{i+1}^{n+1} tienen elementos no nulos de ambos bloques. Si el tramo de cauce con fondo móvil está discretizado en los puntos $i=0,1,\dots,N+1$, el primer bloque es de la forma

$$A'_{k03}x+A_{k04}u_1^{n+1}+A_{k05}h_1^{n+1}+A_{k06}e_1^{n+1}=A'_{k07}$$

donde x indica una de las incógnitas en el punto 1 no dada como condición de contorno aguas arriba, y A'_{k03} y A'_{k07} dependen de las condiciones de contorno aguas arriba utilizadas. Análogamente, el último (N+1-simo) bloque es de la forma

$$A_{kN1}u_N^{n+1}+A_{kN2}h_N^{n+1}+A_{kN3}e_N^{n+1}+A'_{kN4}x_1+A'_{kN5}x_2=A'_{kN7}$$

donde x_1 y x_2 indican dos incógnitas no dadas como condición de contorno aguas abajo y A'_{kN4}, A'_{kN5} y A'_{kN7} dependen de la condición de contorno aguas abajo utilizada. El autor desarrolló este modelo para la simulación de la erosión de los canales de derivación de las represas proyectadas por Hidronor en Pichi Picún Leufú y Michihuao, sobre el río Limay (ver EGASAT [10]) y lo amplió posteriormente para tener en cuenta la transición de régimen (Jacovkis [11]). En este último trabajo las ecuaciones están desarrolladas extensamente.

Cabe obervar que como todo esquema en diferencias finitas, el método de Preissmann suaviza las discontinuidades producidas por ondas de choque; por tal motivo, este método no sirve (ni en modelos hidrodinámicos con fondo fijo ni en modelos con fondo móvil) para aproximar con detalle, por ejemplo, rotura brusca de diques, que probablemente es el caso más importante en hidráulica de necesidad de seguimiento preciso de ondas de choque.

EXPERIMENTOS NUMERICOS

Los experimentos numéricos consistieron en llegar de un estado en régimen subcrítico a otro en régimen supercrítico bajo distintas condiciones de contorno. De acuerdo a la teoría anteriormente desarrollada, debería ser factible la transición con condiciones de contorno adecuadas.

El modelo considerado consiste en un tramo de 1100 m, discretizado en 12 puntos a 100 m de distancia cada uno del siguiente; cada sección transversal es rectangular de ancho unitario, y el umbral de tensión de corte es de 0,465 Kg/m^2. El peso específico del material sólido es de 2,65 ton/m^3, la porosidad del material es de 0,6 y el diámetro medio de las partículas del fondo es de 0,6 mm. Se tomó χ = 25,30 y A = 0,0222 siguiendo la bibliografía ya mencionada.

En las corridas en que se partió de régimen subcrítico se tomaron como condiciones iniciales 0,1 m de altura desde el fondo y 0,1 m/s de velocidad para todas las secciones transversales. La cota de fondo corresponde a una pendiente constante de 1 en 10000.

Las posibles combinaciones de las 5 condiciones de contorno analizadas aguas arriba y aguas abajo son 50 (combinaciones de 5 tomadas de a 2 arriba por 5 abajo). De estas se consideraron para las condiciones iniciales antes descriptas, las dadas en la Tabla I siguiente:

Tabla I

Ensayo	Condiciones aguas arriba		Condición aguas abajo	Ensayo	Condiciones aguas arriba		Condición aguas abajo
1	3	1	5	10	5	3	2
2	3	1	1	11	3	2	1
3	3	1	3	12	2	1	1
4	3	1	4	13	5	2	2
5	2	1	2	14	5	2	1
6	3	2	2	15	4	1	3
7	4	1	2	16	4	1	4
8	5	1	2	17	4	2	2
9	3	1	2	18	4	3	2

Los códigos son: 1:cota de fondo; 2:altura desde fondo; 3:velocidad; 4:caudal; 5:cota de superficie libre desde plano fijo.

Cada simulación consistió en llegar primero a una situación estacionaria subcrítica, y a partir de allí modificar las condiciones de contorno de tal modo de llegar finalmente a un régimen supercrítico. Para asegurar el éxito fue necesario considerar un tiempo de simulación prolongado (600 días); como intervalo temporal de cálculo se tomó un día o, en algunos casos, 6 horas.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes: las corridas 1 y 5 se mantienen subcrítica durante toda la simulación; las corridas 2, 4, 12, 14, fracasaron de entrada; las corridas 4, 6, 8, 10, 11, 13, 16, 17 y 18 se inestabilizaron; las demás (3, 7, 9, 15) tienen transición de régimen. La tabla II de la corrida 7 indica evolución de algunas variables en el punto 6.

Tabla II

Transición de régimen subcrítico a supercrítico en el punto 6

Día	Altura (m)	Velocidad (m/s)	Cota de fondo (m)	Caudal sólido (dm3/s)
0	0,10	0,10	9,95	0,00
50	0,23	0,30	9,95	0,00
100	0,37	0,36	9,95	0,00
150	0,22	0,40	9,95	0,00
200	0,22	0,37	9,95	0,00
250	0,25	0,44	9,95	0,00
300	0,18	0,87	9,95	0,00
350	0,12	1,41	8,24	0,13
400	0,11	1,58	6,21	0,30
450	0,11	1,75	4,63	0,54
500	0,11	1,96	3,16	0,89
550	0,10	2,10	1,65	1,23
600	0,10	2,29	0,14	1,76

Es interesante analizar por qué motivos no se tuvo éxito en la transición en diversas corridas. El modelo no aceptó que cota de fondo fuera una condición de contorno tanto aguas arriba como aguas abajo (corridas 2 y 12) pues en algún sentido no se suministra suficiente información distinta al modelo, y por el contrario hay información redundante: dado que hay un desacople entre las ecuaciones hidrodinámicas y la de onda de fondo, debido a los diferentes órdenes de magnitud de las respectivas velocidades, no puede haber más de una condición de contorno con cota de fondo. Indirectamente, eso mismo sucede con las corridas 8 y 14. Por la misma razón debe haber por lo menos una condición de contorno con cota de fondo; por ese motivo fracasaron las corridas 6, 10, 13, 17 y 18. En las corridas 1 y 5 no se puede suministrar al modelo condiciones de contorno que aseguren la transición. Para las demás corridas en que no se produjo transición (4, 11 y 16) es necesario un estudio más detallado, que está en ejecución, para determinar si las condiciones de contorno son inadmisibles en general, y, en tal caso, por qué.

Se incluyó entre los experimentos un caso inverso, es decir, una situación de partida en régimen supercrítico que se lleva en el mismo plazo a un régimen subcrítico. Las condiciones de contorno tomadas fueron caudal y cota de fondo aguas arriba y altura desde fondo aguas abajo. Las condiciones iniciales fueron las finales de la corrida 7. La tabla III ilustra este experimento.

Tabla III

Transición de régimen supercrítico a subcrítico en el punto 6

Día	Altura (m)	Velocidad (m/s)	Cota de fondo (m)	Caudal sólido (dm3/s)
0	0,10	2,29	0,14	1,76
50	0,12	2,03	2,46	0,98
100	0,14	1,73	5,60	0,41
150	0,16	1,54	7,06	0,19
200	0,17	1,43	7,76	0,10
250	0,18	1,36	8,13	0,05
300	0,18	1,31	8,35	0,03
350	0,19	1,28	8,48	0,02
400	0,19	1,26	8,57	0,01
450	0,19	1,25	8,63	0,01
500	0,19	1,24	8,67	0,01
550	0,20	1,23	8,70	0,00
600	0,20	1,22	8,73	0,00

Dado que en las corridas en que se llegó a la transición la cota de fondo del extremo aguas arriba no varía, puede constatarse en las corridas de transición de subcrítico a supercrítico que la erosión aumenta con la velocidad, y por consiguiente la pendiente de fondo aumenta notoriamente (para la corrida 7 la cota de fondo final en el extremo aguas abajo es de -12,96 m, o sea la pendiente final media es de casi 2,1 %). Fenómeno análogo pero inverso se observa en la crecida de transición de régimen supercrítico a subcrítico: la cota de fondo final aguas abajo es de 6,86 m, o sea la disminución de velocidad provoca una paulatina sedimentación que reduce la pendiente media a 0,285 % .

CONCLUSIONES

Se ha probado, y verificado numéricamente, que en el modelo hidrodinámico con fondo móvil, eligiendo razonablemente las condiciones de contorno, se puede modelizar transiciones de régimen sin necesidad de modelos diseñados especialmente. No se ha mencionado los detalles computacionales referidos al tratamiento de las condiciones de contorno, que no son triviales; una descripción completa se está preparando (Jacovkis [11]). También está en desarrollo la introducción de nuevas condiciones de contorno (caudal sólido, relaciones funcionales entre las variables), el análisis de propagación de dunas y antidunas, y los límites de validez del modelo de acuerdo a la posible inestabilidad física, tal como se indica en Gradowczyk [3]. Otra línea de investigación importante es el de análisis de ondas de choque con fondo móvil ("derrumbe" de dunas). Pero para ello es necesario un modelo de seguimiento de ondas de choque, posiblemente de tipo Godunov (ver Harten [12]).

REFERENCIAS

1. Stoker, J. J. "Water waves", Interscience, New York. 1957.

2. Liggett, J. A. y Cunge, J.-A. "Numerical methods of solution of the unsteady flow equations", en: K. Mahmood and V. Yevjevich (eds), "Unsteady flow in open channels", Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 89-112, 1975.

3. Gradowczyk, M. H. "Wave propagation and boundary stability in erodible-bed channels", *J. Fluid Mech.*, 33, 93-112, 1968.

4. Shen, H. W. "Wash bed and bed load", en: H. W. Shen (ed), "River Mechanics", Colorado State University, Fort Collins, CO, 1971, Capítulo 11.

5. Graf, W. H. "Hydraulics of sediment transport", McGraw-Hill, Nueva York, 1971.

6. Gradowczyk, M. H. y Jacovkis, P. M. "Un modelo hidrodinámico impermanente de simulación de escurrimiento sobre fondo móvil, transporte de partículas en suspensión, decantación y resuspensión", *Anales del XI Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, Buenos Aires, 465-476, 1984.

7. Jacovkis, P. M. "One-dimensional hydrodynamical flow in complex networks and some generalizations", *SIAM J. Appl. Math.*, 51, 948-966, 1991.

8. Guy, H. P., Simons, D. B. y Richardson, E. B., "Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-1961", U.S. Geol. Survey, Prof. Paper 462-1, 1966.

9. Preissmann, A., "Propagation des intumescences dans les canaux et rivières", Premier Congrès de l'Assoc. Française de Calcul, Grenoble, 1961.

10. EGASAT (Estudio Gradowczyk y Asociados S.A.T.) "Modelo matemático hidrodinámico de fondo móvil de los canales de restitución de las centrales Pichi Picún Leufú y Michihuao", Informe Final para Hidronor S.A., 1982.

11. Jacovkis, P. M. "One-dimensional hydrodynamic flow with a mobile bed", en preparación.

12. Harten, A., "Recent developments in shock-capturing schemes", ICASE Report 91-8 y Proceedings of the International Congress of Mathematics, Kyoto, 1990.