

DETERMINACION NUMERICA DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE  
TENSIONES EN MECANICA DE FRACTURAS

Graciela M. Dez y Jorge D. Riera

*Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil,  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
Porto Alegre, Brasil*

RESUMEN

El factor de intensidad de tensiones para el modo I de fractura,  $K_I$ , es una función del tamaño de la fisura, geometría del cuerpo y carga aplicada. Si la fisura es pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo, puede suponerse que está contenida en un medio infinito, en cuyo caso existen usualmente soluciones cerradas. En caso contrario, el problema se complica, exigiendo el empleo de métodos experimentales o numéricos.

En este trabajo se propone un algoritmo computacional basado en el método de búsqueda aleatoria, para la determinación, a partir de soluciones del problema discretizado mediante elementos finitos, del factor de intensidad de tensiones. Como ejemplo ilustrativo se aplica este método al ensayo de flexión en tres puntos, "three point bend test".

ABSTRACT

The stress intensity factor for mode I fracture  $K_I$  depends on the size of the crack, the specimen geometry and the applied loading. When the crack dimensions are small compared with the size of the body, it may be assumed that the former is contained in an infinite medium, in which case closed solutions may usually be found. Otherwise, the problems is more complex and numerical or experimental methods must be employed.

A computational procedure based on the random search method is proposed in this paper to evaluate, on the basis of finite element solutions, the stress intensity factor. As an example, the approach is applied to the three point bend test, in which case the proposed method closely agrees with available solutions.

### INTRODUCCION

El factor de intensidad de tensiones para el modo I de fractura,  $K_I$ , es una función del tamaño de la fisura, geometría del cuerpo y carga aplicada.

Cuando la fisura es pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo, puede admitirse que la misma está contenida en un sólido de dimensiones infinitas, sometido a un estado homogéneo de tensiones. En tales casos, existen generalmente soluciones cerradas, algunas de las cuales se presentan a continuación:

- a) Placa de dimensiones infinitas con una fisura central de longitud  $2a$ ; sometida a una tracción  $\sigma$  normal al plano de la fisura.

$$K_I = \sigma (\pi a)^{1/2} \quad (1)$$

- b) Placa de dimensiones infinitas con una fisura lateral que comienza en el borde, de longitud  $a$ ; sometida a una tracción  $\sigma$  normal al plano de la fisura.

$$K_I = 1.12 \sigma (\pi a)^{1/2} \quad (2)$$

- c) Tira de longitud infinita de espesor  $2h$  con una fisura central de longitud  $2a$ ; sometida a una tracción  $\sigma$  normal al plano de la fisura.

$$K_I = \sigma \left( \pi a \sec \left( \frac{\pi a}{2h} \right) \right)^{1/2} \quad (3)$$

- d) Placa de dimensiones infinitas con un agujero de radio  $R$  y dos fisuras simétricas de longitud  $a$ , ubicadas en los bordes del agujero; sometida a una tracción  $\sigma$  normal al plano de las fisuras.

$$K_I = \sigma (\pi a)^{1/2} \left( 1 + 2.365 \left( \frac{R}{R+a} \right) \right) \quad (4)$$

Cuando las dimensiones de la fisura son del mismo orden que las dimensiones del cuerpo, el problema se complica, exigiendo el empleo de métodos numéricos.

Son indicadas a continuación expresiones propuestas para la viga del ensayo de flexión de tres puntos (Fig. 1).

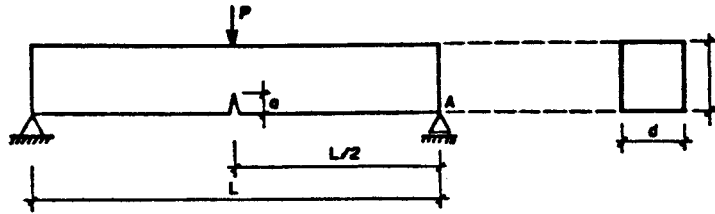


Fig.1: Modelo standard para ensayo "three point bend".

. Reji John y Sundera Shah [5]

$$K_I = \sigma (\pi a)^{1/2} F(\alpha) \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{3 P L}{2 b d^2} \quad (6)$$

$$F(\alpha) = \frac{1.99 - \alpha (1-\alpha) (2.15 - 3.93 \alpha + 2.7 \alpha^2)}{\pi^{1/2} (1 + 2\alpha) (1 - \alpha)^{3/2}} \quad (7)$$

$$\alpha = a / d \quad (8)$$

. J.A Abernson, J.M. Anderson y W.W King [1]

$$K_I = \frac{3 P L a^{1/2}}{2 b d^2} \phi(\alpha) \quad (9)$$

$$\phi(\alpha) = 1.93 - 3.12 \alpha + 14.7 \alpha^2 - 25.3 \alpha^3 + 25.9 \alpha^4 \quad (10)$$

$$\alpha = a / d \quad (11)$$

En este trabajo se propone un algoritmo computacional, basado en el método de búsqueda aleatoria, para la determinación, a partir de soluciones del sistema discretizado mediante elementos finitos o de soluciones experimentales punto a punto, del factor de intensidad de tensiones.

### ALGORITMO COMPUTACIONAL

Considérese un cuerpo infinito con una fisura interior, sometido a un estado dado de cargas (Fig. 2). La distribución de tensiones en el cuerpo puede ser determinada en un número discreto de puntos usando, por ejemplo, el Método de los Elementos Finitos. El procedimiento puede ser aplicado también cuando las tensiones en las inmediaciones del extremo de la fractura son obtenidas experimentalmente en un número discreto de puntos, por ejemplo, mediante extensómetros eléctricos o fotoelasticidad.

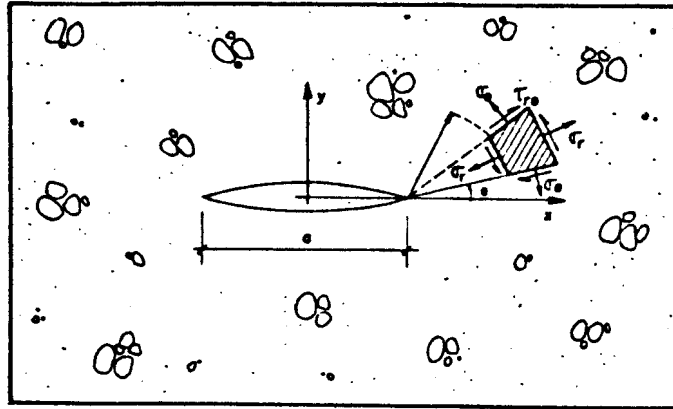


Fig. 2: Sistema de coordenadas, notación y convención de signos.

Por otro lado, se sabe que la distribución de tensiones alrededor del extremo de una fisura puede ser expresada, considerando estado plano de tensiones, en función de los factores de intensidad de tensiones en los modos I y II de fractura, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\alpha \\ \tau_{r\alpha} \end{pmatrix} = \frac{\cos(\alpha/2)}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 + \sin^2(\frac{\alpha}{2}) & \frac{3}{2} \sin \alpha - 2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}) \\ \cos^2 \alpha & -\frac{3}{2} \sin \alpha \\ \sin \alpha & 3 \cos \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix}$$

(12)

donde  $r$  representa la distancia al extremo de la fisura,  $\alpha$  es el ángulo entre  $r$  y el eje  $x$ , y  $K_I$  y  $K_{II}$  son los factores de intensidad de tensiones correspondientes a los modos de fractura I y II, respectivamente.

Si la malla empleada para la evaluación de tensiones presenta alguna regularidad, habrá varios puntos nodales caracterizados por la misma distancia  $r$ . El sistema de ecuaciones (12) debe ser particularizado para cada conjunto de puntos nodales equidistantes del extremo de la fisura ("fracture tip"), esto es, con  $r$  constante, llevando a un sistema de  $3n$  ecuaciones, donde  $n$  indica el número de puntos nodales del conjunto. Como el número de ecuaciones generalmente supera al número de incógnitas, la solución no es única. En este caso, con dos ecuaciones cualquiera del sistema, se puede obtener una primera aproximación de  $K_I$  y  $K_{II}$ . Con ellos se calcula el error  $\Delta \epsilon_j$  correspondiente a cada ecuación  $j$  y el error cuadrático total:

$$L^0 = \sum_{j=1}^{3 \times n} \Delta \epsilon_j \quad (13)$$

Se propone en este trabajo obtener  $K_I$  y  $K_{II}$  de modo que el error total sea mínimo. Para evaluar ese mínimo se utiliza el procedimiento de búsqueda aleatoria. Consecuentemente, se definen incrementos  $\Delta K_I$  y  $\Delta K_{II}$  a través de la generación de un número aleatorio  $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ). Para el paso  $j$ :

$$\beta = 2\pi s$$

$$\Delta K_I^j = \Delta_0 \sin \beta \quad (14)$$

$$\Delta K_{II}^j = \Delta_0 \cos \beta$$

con  $\Delta_0 = \text{constante}$ .

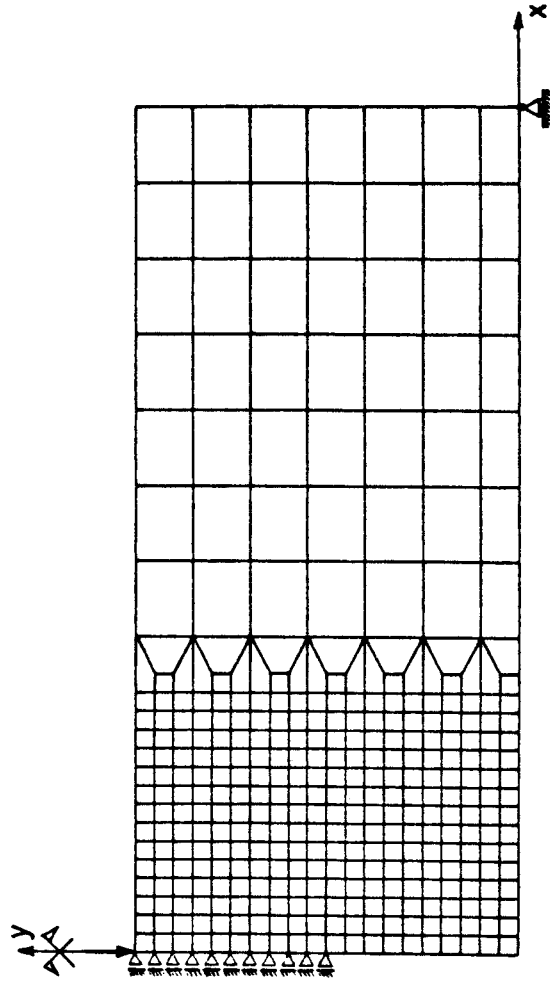


Fig. 3: Malla de elementos finitos empleada en el análisis de tensiones.

Estos incrementos conducen a nuevos  $K_I^o$  y  $K_{II}^o$  :

$$\begin{aligned} K_I^o &= K_I^j + \Delta K_I^j \\ K_{II}^o &= K_{II}^j + \Delta K_{II}^j \end{aligned} \quad (15)$$

resultando en un nuevo error  $L^o$ . Si  $L^o$  es menor que  $L^j$ , entonces  $L^{j+1}$  se toma igual a  $L^o$  y  $K_I^{j+1} = K_I^o$ ,  $K_{II}^{j+1} = K_{II}^o$ . En caso contrario, el procedimiento se repite con la generación de un nuevo número aleatorio  $s$ .

Cuando no se obtiene un valor menor de  $L^o$  después de un número predeterminado de intentos, adoptado igual a ocho en los ejemplos, el paso  $\Delta$  es reducido a la mitad de su valor actual.

Finalmente, cada conjunto de puntos nodales con  $r = \text{constante}$ , conducen a un par de estimadores de  $K_I$  y  $K_{II}$ . Los factores de intensidad de tensiones  $K_I$  y  $K_{II}$  en el extremo de la fisura,  $r = 0$ , se obtienen por regresión. En el ejemplo que se presenta en este trabajo una regresión lineal presentó un ajuste satisfactorio a los datos.

#### EJEMPLO DE APLICACION

Con el fin de verificar la aplicabilidad del modelo propuesto se analizó el siguiente ejemplo:

- Viga sometida al ensayo de flexión en tres puntos ("three point bend test") de dimensiones:

$$L = 0.45 \text{ m}$$

$$h = 0.10 \text{ m}$$

$$d = 0.10 \text{ m}$$

$$a = 0.05 \text{ m}$$

Las tensiones fueron obtenidas empleando un programa de Elementos Finitos con análisis lineal, considerando:

$$E = 2.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho = 2400 \text{ Kg/m}^3$$

donde  $E$  representa el módulo de elasticidad del material y  $\rho$  su densidad. Se utilizaron elementos isoparamétricos de 4 nodos. La malla fue densificada en las proximidades de la fisura, según se indica en Fig. 3.

Los valores de  $K_I$  a diferentes distancias del extremo de la fisura, estimados mediante el proceso de búsqueda aleatoria discutido anteriormente, han sido graficados en la Fig. 4. Para definir el coeficiente de intensidad de tensiones para modo I de fractura es necesario ahora ajustar una función de la distancia  $r$  al extremo de la fisura a los estimadores calculados. El valor correcto corresponde a  $r = 0$ . Así, se encuentra para el ensayo de flexión en tres puntos, con las dimensiones indicadas que una función lineal ajusta satisfactoriamente a los datos, conduciendo a:

$$K_I = 7640 \text{ Nm}^{-3/2}$$

Este valor es practicamente idéntico a los obtenidos con las expresiones (5) y (9).

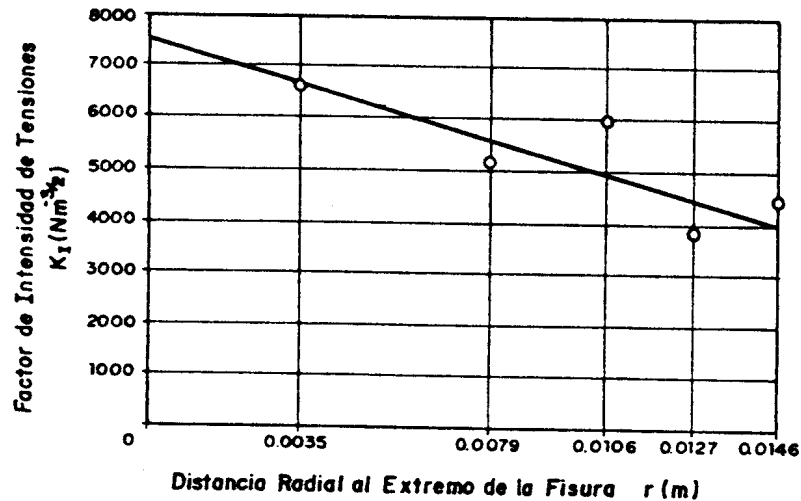


Fig. 4: Valores del coeficiente de intensidad de tensiones para fractura modo I en función de la distancia al extremo de la fisura, obtenidos por extrapolación.



El estudio de convergencia realizado indica la necesidad de limitar la relación  $r/a$  a valores inferiores a 0.4.

#### CONCLUSIONES

La evaluación del factor de intensidad de tensiones para modo I de fractura, fue realizada utilizando un procedimiento numérico simple, basado en los métodos de elementos finitos y búsqueda aleatoria.

La obtención de resultados razonables está condicionada a la elección de una malla adecuada, esto es, que sea lo suficientemente densa alrededor del extremo de la fractura.

#### AGRADECIMIENTOS

Se deja especial constancia del apoyo parcial del CONICET, Argentina, y del CNPq, Brasil.

#### REFERENCIAS

- (1) Aberson, J. A.; Anderson, J. M.; King, W. W.; "A Finite Element Analysis of an Impact Test", Fourth International Conference on Fracture, University of Waterloo, Canadá, Junio 1977.
- (2) Ewalds, H. L.; Wanhill, R. J. H.; "Fracture Mechanics", Edward Arnolds, London, 1984.
- (3) Griffith, A.A.; "The Theory of Rupture", Proceedings of the First International Conference of Applied Mechanics, Delft, 1984.
- (4) Irwin, G. R.; "Fracture Dynamics", Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland, pp. 147-166, 1948.
- (5) John, R.; Shah, S.; "Mixed-Mode Fracture of Concrete Subjected to Impact Loading", Journal of Structural Engineering, V. 116, No 3, pp.585-602, March 1990.
- (6) Kanninen, M. F.; Popelar, C. H.; "Advanced Fracture Mechanics", New York, Oxford University Press, 1985.

