

UN SOFTWARE PARA LA DETERMINACION DE COEFICIENTES
TERMICOS A TRAVES DE UN CAMBIO DE FASE

Germán R. Martínez

Depto. Física, Fac. Cs. Ex., Ing. y Agr. (UNR)
Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.

Domingo A. Tarnia

Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral
Moreno 1056, (2000) Rosario, Argentina;

PROMAR (CONICET-UNR), Inst. Matemática "B. Levi"

Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.

RESUMEN

Se presenta un software para computadoras PC, escrito en lenguaje Pascal, para la determinación de coeficientes térmicos de un material semi-infinito a través de un proceso de cambio de fase (proceso de solidificación o de fusión).

Se utilizan los resultados analíticos obtenidos en los trabajos (D.A. Tarnia : Adv. Appl. Math., 3 (1982), 74-82; Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151-1158; Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 8 (1984), 227-235; M.B. Stampella-D.A. Tarnia : Int. J. Eng. Science, 27(1989), 1407-1419) en los cuales se explicitan fórmulas para los coeficientes térmicos desconocidos. Dichas fórmulas dependen, en general, del cero de una cierta función real que resulta necesario calcularse numéricamente. El software permite obtener los valores numéricos de las incógnitas del caso en cuestión, o bien las gráficas de estas incógnitas en función de un parámetro.

ABSTRACT

We present a software for PC computers, written in Pascal, for the determination of thermal coefficients of a semi-infinite material through a phase-change process (freezing or melting process).

We use the analytical results obtained by the papers (D.A. Tarnia : Adv. Appl. Math., 3 (1982), 74-82; Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151-1158; Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 8 (1984), 227-235; M.B. Stampella-D.A. Tarnia: Int. J. Eng. Science, 27(1989), 1407-1419) where formulas for the unknown thermal coefficients are given. These formulas depend, in general, of the zero of a certain real function which must be numerically computed. This software allows to obtain the numerical values of the corresponding unknowns or the graphic representation of these unknowns as a function of a parameter.

I. INTRODUCCION

El objetivo del presente trabajo es presentar un software interactivo, escrito en Pascal, para la determinación de coeficientes térmicos de un material semi-infinito a través de un proceso de cambio de fase a una y dos fases con una sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$ del material de cambio de fase (más detalles sobre el procedimiento físico-matemático y su resolución matemática pueden verse en [Ta5]). Más aún, dicha sobre-condición viene dada de la forma (caso fusión) [Ta1] :

$$(1) \quad k_2 \theta_{2x}(\theta, t) = -\frac{h_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0 \quad (h_0 > 0).$$

o de la forma [Ta6]

$$(2) \quad \theta_{2x}(\theta, t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}}, \quad t > 0, \quad (H_0 > 0).$$

Las condiciones (1) y (2) representan respectivamente el flujo de calor y la pendiente de la temperatura sobre el borde fijo $x=0$ (θ_2 representa la temperatura de la fase líquida del material de cambio de fase). Los coeficientes h_0 y H_0 deben ser determinados experimentalmente. Dichas dos condiciones no son las mismas cuando el coeficiente k_2 (conductividad térmica de la fase líquida) es desconocido. Por otra parte, la condición (2) se adapta mejor a la experimentación [ArLaTa]. Para el desarrollo del software se utilizaron los siguientes cuatro trabajos, en los cuales se explicitan fórmulas para la :

(i) determinación de un coeficiente térmico de una fase del material a través de un proceso de cambio de fase (problema de frontera libre de Stefan a una fase) con una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$ definida por la constante h_0 . Se presentan 4 casos [Ta2] ;

(ii) determinación de dos coeficientes térmicos de una fase del material a través de un proceso de cambio de fase (problema de frontera móvil de Stefan a una fase) con una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$ definida por la constante h_0 . Se presentan 6 casos [Ta3] ;

(iii) determinación de dos coeficientes térmicos de una fase del material a través de un proceso de cambio de fase (problema de frontera móvil de Stefan a una fase) con una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$ definida por la constante H_0 con la condición de que la conductividad térmica sea uno de los coeficientes desconocidos. Se presentan 3 casos [Ta4] ;

(iv) determinación de uno o dos coeficientes térmicos de las dos fases (sólida y líquida) del material a través de un proceso de cambio de fase (problema de frontera libre o móvil de Stefan a dos fases) con una sobre-condición en el borde fijo $x = 0$ definida por la constante h_0 . Se presentan 21 casos [Ta4] .

Observación 1. - En el software, se presentan otros casos que surgen de la solución directa del problema de Stefan a una y dos fases [St] (con coeficientes térmicos y temperaturas inicial y en el borde fijo constantes)

en los cuales, por ejemplo, se calculan explícitamente las constantes h_0 y H_0 que se deducen a través de la solución exacta de Lamé-Clapeyron [LaCl] y de Neumann [CaJa, We].

La metodología general, para la aplicación de las fórmulas que explicitan a los coeficientes térmicos desconocidos, para materiales semi-infinitos, es la siguiente:

(i) Determinar experimentalmente los coeficientes H_0 (ó h_0) (coeficiente que caracteriza la pendiente de la temperatura o el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$), B (temperatura en el borde fijo $x = 0$) y en algunos casos el coeficiente σ (coeficiente que caracteriza la frontera de cambio de fase)

(ii) Verificar las restricciones con los datos experimentales y demás coeficientes térmicos conocidos, para que una cierta ecuación tenga una única solución.

(iii) Resolver numéricamente dicha ecuación que determinará un único parámetro ξ .

(iv) Aplicar las fórmulas que explicitan los coeficientes térmicos desconocidos en función de los datos experimentales, coeficientes térmicos conocidos, parámetro numérico obtenido en (iii) y de funciones reales elementales (por ejemplo: funciones de error y de error complementario, potenciales, exponenciales, logarítmicas, etc.).

II. DESCRIPCION DEL SOFTWARE

Se comienza con un mensaje (ver más adelante), en el cual se incluye una nomenclatura de los parámetros utilizados más importantes.

A continuación se ingresa en el menú principal, en el cual, en forma interactiva y pulsando determinadas teclas se pasa de un caso al otro, pudiendo las operaciones repetirse en forma indefinida.

Observación 2.— El proceso de cambio de fase puede ser de fundición (F) o de solidificación (S), dependiendo si la temperatura en borde fijo es mayor o menor que la temperatura de cambio de fase del material. Por defecto, se presenta el caso F. Por otra parte, si se pulsa la letra S, estando en modo F, se pasa a modo S y así reciprocamente.

Observación 3.— El software trabaja en modo valores numéricos (V) o en modo gráficos (G). En modo V permite obtener el resultado correspondiente a la determinación de los coeficientes térmicos del problema en cuestión; en cambio, en modo G permite obtener la gráfica de una incógnita en función de un parámetro, a elección, que pertenece a un determinado intervalo de números reales cuyos extremos se deben suministrar. Por defecto, se presenta el modo V. Por otra parte, si se pulsa la letra G, estando en modo V, se pasa a modo G y así reciprocamente.

Observación 4.— La precisión en los cálculos puede ser de 2 a 7 cifras significativas. En modo G se trabaja con 2 cifras significativas. Por defecto, se utilizan 4 cifras significativas.

Observación 5.— Con los resultados experimentales (h_0 , H_0 , θ_0 , σ) y coeficientes térmicos conocidos del material que se introducen como datos, el software verifica la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución de una determinada ecuación (indica un mensaje de error cuando dicha condición no se satisface) y en caso afirmativo calcula la solución (parámetro ξ) a través del método dicotómico que se inicializa en forma automática.

III. MENSAJE DEL SOFTWARE

Al inicio de la utilización del software se obtiene el siguiente mensaje :
"Este software ha sido desarrollado con el fin de facilitar la determinación de coeficientes desconocidos de un material semi-infinito a través del problema de Stefan a una y dos fases con una sobre-condición en el borde fijo del material de cambio de fase.

Para usarlo sólo pulse la/s opción/es deseada/s e ingrese los datos correspondientes cuando le sean requeridos. La precisión asegurada es de 7 cifras significativas.

Nomenclatura :

k :	conductividad térmica	c :	calor específico
l :	calor latente de fusión	s :	posición del cambio de fase
x :	variable espacial	ρ :	densidad de masa
t :	tiempo	θ_f :	temperatura de fusión
θ :	temperatura	θ_0 :	temperatura en el borde fijo $x = 0$
h_0 :	coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x=0$ (ver (1))		
H_0 :	coeficiente que caracteriza la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x=0$ (ver (2))		
σ :	coeficiente que caracteriza la frontera libre $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$		
$\alpha = \frac{k}{\rho c}$:	coeficiente de difusión,	$\xi = \frac{\sigma}{k}$:	parámetro adimensional,

Sub-índices (sólo para el caso de dos fases): $i=1$: fase sólida , $i=2$: fase líquida.

Nota importante : Se deben usar las mismas unidades físicas para todos los coeficientes o parámetros, específicamente k , l , c , y h_0 deben ser dados en el sistema elegido y no en calorías. Se usa la convección de que el calor entregado es positivo. De esto y de sus definiciones los datos h_0 y H_0 deben ser positivos en el caso de fusión y negativos en el de solidificación.

Pulse una tecla para volver al programa.*

IV. MENU PRINCIPAL INTERACTIVO

A continuación del mensaje del software (Instrucciones) se pasa a un menú interactivo que, a través de un sistema tipo árbol, presenta todos los casos, a saber :

Menú Principal
Fusión
Modo Valores Numéricos

I. Instrucciones

P. Precisión (actual : 4 cifras significativas)

G. Modo Gráficos

S. Solidificación

1. Problema de Stefan a una fase

Menú del Problema de Stefan a Una Fase :

1. Determinación de los parámetros de la solución σ y h_0 (Es un problema de frontera libre) [LaCl].

2. Determinación de un coeficiente con sobre-condición de flujo h_0 (Es un problema de frontera libre, siendo las incógnitas σ y un coeficiente térmico)[Ta2]. Elija Opción :

1. Incógnita k
2. Incógnita l
3. Incógnita c
4. Incógnita ρ
0. Volver

3. Determinación de un coeficiente con sobre-condición de σ (Es un problema de frontera móvil, siendo las incógnitas h_0 y un coeficiente térmico)[Ta3]. Elija Opción :

1. Incógnita k
2. Incógnita l
3. Incógnita c
4. Incógnita ρ
0. Volver

4. Determinación de dos coeficientes con sobre-condición de σ y h_0 (Es un problema de frontera móvil, siendo las incógnitas dos coeficientes térmicos)[Ta3]. Elija Opción :

1. Incógnitas k y l
2. Incógnitas k y c
3. Incógnitas k y ρ
4. Incógnitas l y c
5. Incógnitas l y ρ
6. Incógnitas c y ρ
0. Volver

5. Determinación de coeficientes con sobre-condición de gradiente H_0 (Es un problema de frontera móvil o libre, siendo las incógnitas k y un coeficiente elegido entre σ y un coeficiente térmico entre ρ , c , l) [Ta4]. Elija opción :

1. Incógnitas k y σ
2. Incógnitas k y l

3. Incógnitas k y c
4. Incógnitas k y α
8. Volver

8. Volver al menú principal

2. Problema de Stefan a dos fases

Menú del Problema de Stefan a Dos Fases :

1. Problema con densidades iguales

Menú del Problema de Stefan a Dos Fases (Densidades Iguales y Sin Zona Pastosa) :

1. Determinación de los parámetros de la solución σ y h_0 (Es un problema de frontera libre) [CaJa, TaI, We]

2. Determinación de un coeficiente con sobre-condición de flujo h_0 (Es un problema de frontera libre, siendo las incógnitas σ y un coeficiente térmico)[StTa]. Elija Opción :

1. Incógnita l
2. Incógnita ρ
3. Incógnita k_1
4. Incógnita k_2
5. Incógnita c_1
6. Incógnita c_2
0. Volver

3. Determinación de dos coeficientes con sobre-condición de σ y h_0 (Es un problema de frontera móvil, siendo las incógnitas dos de los coeficientes térmicos) [StTa]. Elija Opción :

1. Incógnitas l y ρ
2. Incógnitas k_1 y ρ
3. Incógnitas k_2 y ρ
4. Incógnitas c_1 y ρ
5. Incógnitas c_2 y ρ
6. Incógnitas l y k_2
7. Incógnitas l y c_2
8. Incógnitas k_1 y k_2
9. Incógnitas k_1 y c_2
10. Incógnitas c_1 y k_2
11. Incógnitas c_1 y c_2
12. Incógnitas k_2 y c_2
0. Volver

0. Volver

2. Problema con densidades distintas (vacío, en la actualidad)

8. Volver al menú principal

R. Retornar al Sistema Operativo

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado a través de los Proyectos de Investigación y Desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática" y "Análisis Numérico de Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales" del CONICET, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

1. [ArLaTa] J.C. ARDERIUS—M. LARA—D.A. TARZIA, "Determinación experimental-numérica de coeficientes térmicos a través de problemas tipo Stefan a una fase", *Mecánica Computacional*, Vol.8, MECOM'88, L.A. Godoy—F. Flores—C.A. Prato (Eds.), AMCA, Santa Fe (1990), 66—86. "Experimental-numerical determination of thermal coefficient through a phase-change process", To appear.
2. [CaJa] H.S. CARSLAW—J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).
3. [LaCl] G. LAMÉ—B.P. CLAPEYRON, "Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", *Annales Chimie Physique*, 47(1831), 250—256.
4. [StTa] M.B. STAMPELLA—D.A. TARZIA, "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", *Int. J. Eng. Science*, 27(1989), 1407—1419.
5. [St] J. STEFAN, "Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere", *Sitzungsberichte Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Math. Classe*, 98(1889), 965—963.
6. [Ta1] D.A. TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", *Quart. Appl. Math.*, 39 (1981—1982), 491—497.
7. [Ta2] D.A. TARZIA, "Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)", *Adv. Appl. Math.*, 3 (1982), 74—82.
8. [Ta3] D.A. TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26 (1983), 1151—1158.
9. [Ta4] D.A. TARZIA, "A new variant for the simultaneous calculation of some thermal coefficients of a semi-infinite material through a phase-change problem with an over-condition on the fixed face", *Latin Amer. J. Heat Mass Transfer*, 8 (1984), 227—235.
10. [Ta5] D.A. TARZIA, "Método experimental-numérico-analítico para la determinación de coeficientes térmicos de materiales semi-infinitos a través de un cambio de fase", *Actas MECOM'91, Santa Fe—Paraná*, 23—25/9/1991.
11. [We] H. WEBER, "Die partiellen Differential-gleichungen der Mathematischen Physik, nach Riemanns Vorlesungen", t. II, Braunschweig (1901), 118—122.

