

CONJUGAÇÃO DE MÉTODO MULTIMALHA E PROCESSO ADAPTATIVO
PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE PLANA
VIA ELEMENTOS FINITOS

Ana M. G. Figueiredo , Estevam B. Las Casas
Departamento de Engenharia de Estruturas
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Contorno 842, Belo Horizonte, MG, Brasil
CEP 30110

RESUMO

Neste trabalho propõe-se um algoritmo adaptativo misto r - h global para solução de problemas de elasticidade plana pelo Método dos Elementos Finitos, e uma implementação com a utilização do Método Multimalha para solução do sistema de equações resultante. Discute-se a estrutura de dados e o acoplamento das duas técnicas. Exemplos numéricos são apresentados.

ABSTRACT

In this work a global mixed r - h adaptive algorithm for the solution of plane elasticity problems using the Finite Element Method is proposed, as well as its implementation using Multigrid Method for the solution of the resulting linear system. The data structure and the coupling of the two techniques is discussed. Example problems are presented.

INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido um dos procedimentos mais utilizados na solução de problemas de mecânica estrutural e dos sólidos, principalmente após a disseminação do uso de computadores digitais. A maioria dos programas que utilizam o MEF não fornecem informações acerca do erro cometido ao se representar o problema matemático contínuo por um problema discreto. Este erro, chamado erro de discretização, pode ser responsável por resultados que em nada representam o comportamento físico real.

A formulação de critérios para se fazer uma estimativa do erro de discretização de malhas de elementos finitos e de processos de melhoria automática da malha inicial a partir do conhecimento desse erro têm sido objeto de muitos estudos recentes [1].

Há dois grandes grupos de estimativas de erro: as estimativas "a priori" e as estimativas "a posteriori". As estimativas "a priori"

foram inicialmente propostas e envolvem o conhecimento prévio de algumas características da solução exata. Como são difíceis de formular e válidas apenas para problemas específicos, estas estimativas têm sido substituídas com sucesso por estimativas "a posteriori", isto é, feitas utilizando resultados obtidos na própria solução do problema. Estas medidas de erro são feitas através dos chamados estimadores ou indicadores de erro, calculados a partir de normas do erro medido em alguma grandeza, tal como energia de deformação, deslocamentos ou tensões.

Uma vez obtida uma medida do erro de discretização, a malha pode então ser modificada no sentido de diminuir esse erro. A aplicação repetida desse procedimento é chamada processo adaptativo e, quando feito automaticamente, processo auto-adaptativo. Todas as menções que se fará neste trabalho a processos adaptativos se referem a processos auto-adaptativos.

Vários procedimentos adaptativos têm sido propostos, dos quais três se destacam: processo r , processo h e processo p . Combinações destes processos também têm sido empregadas com frequência.

Um aspecto importante a ser considerado na implantação de procedimentos adaptativos para o MEF é o do algoritmo empregado para a solução dos sistemas de equações oriundos da análise das sucessivas malhas geradas durante o processo. Têm sido empregados com mais frequência métodos iterativos de solução de sistemas de equações -Jacobi, Gauss-Seidel, etc.- pelo fato de possibilitarem a utilização de resultados da malha anterior como primeira aproximação na malha melhorada.

Um método iterativo de solução de sistemas recentemente desenvolvido -Método Multimalha- tem se mostrado muito eficiente. O Método Multimalha combina procedimentos há muito conhecidos como a correção pela malha grossa, a iteração encaixada e a correção pelo resíduo, de forma a constituir um processo que minimiza o erro algébrico (diferença entre a solução exata e a solução aproximada do sistema) bem mais eficaz e eficientemente que os processos iterativos comuns. A estrutura de dados e armazenamento que o método utiliza o torna especialmente adequado aos processos adaptativos, principalmente quando do emprego dos processos h e p globais (refinamento em todo o domínio).

O presente trabalho descreve a implantação de um processo adaptativo misto r - h global, utilizando o Método Multimalha na solução dos sistemas de equações, em um ambiente computacional de desenvolvimento de softwares para o MEF.

PROCESSOS ADAPTATIVOS

Dentre as técnicas propostas para a minimização do erro de discretização, três se destacam:

a) Processo h :

Consiste no aumento do número de graus de liberdade da discretização através da subdivisão dos elementos originais -refinamento da malha- mantendo-se constante o grau do polinômio de interpolação. O refinamento é geralmente feito de forma seletiva nas regiões onde o erro for maior.

b) Processo p :

Consiste no aumento do número de graus de liberdade da discretização através do aumento do grau do polinômio de interpolação, mantendo-se

constante o número de elementos da malha. Busca-se também regiões onde o erro é maior.

c) Processo r:

Consiste em se alterar as posições dos nós na malha, mudando com isto a distribuição espacial dos elementos, sem alterar o número de graus de liberdade.

Combinações dos processos acima, dois a dois, têm sido utilizadas com resultados melhores que os dos processos simples. Estudos comparativos entre os processos e suas combinações no que se refere à convergência foram mencionados por Noor & Babuska [1], Ewing [2] e Las Casas [3].

No presente trabalho foi implantado um processo misto r-h global para elementos triangulares de três nós nos estados planos de tensão e deformação.

Na primeira etapa, fase R, o erro de discretização é avaliado por um estimador "a posteriori", no nível do elemento, proposto por Zienkiewicz e Zhu [4].

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^h - \hat{\sigma})^T D (\sigma^h - \hat{\sigma}) d\Omega \right] \quad (1)$$

onde $\hat{\sigma}$ é a média das tensões nodais em cada nó e $\sigma^h = D \epsilon^h$ são as tensões nodais em cada elemento obtidas na solução em MEF.

A malha é melhorada através da relocação dos nós no domínio no sentido de se conseguir erros semelhantes em todos os elementos, fato que garante a obtenção de uma malha quase-ótima [5].

A mudança na posição dos nós é feita comparando-se, para cada nó, os estimadores de erro dos elementos que contenham este nó e atraindo-o para o centro de gravidade dos elementos com uma força proporcional ao erro [6]. O procedimento é repetido até que se consiga uma distribuição equitativa do erro no domínio.

A segunda etapa, fase H, pode agora ser feita eficientemente de forma global, supondo-se que o erro já foi equidistribuído na fase R. Cada triângulo será então dividido em quatro pela inserção de nós no ponto médio dos lados. O procedimento é repetido mais duas vezes de modo a se ter quatro níveis de refinamento (níveis 0,1,2,3) - FIG. 1.

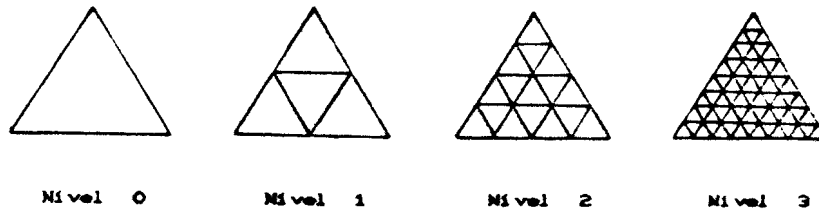


FIG 1 - Refinamentos Globais H

Todos os elementos "filhos" assim gerados de um elemento original são semelhantes entre si e entre os elementos dos outros níveis. Esta relação entre os elementos é importante uma vez que, construídos dessa forma, todos eles possuem a mesma matriz de rigidez elementar. Isto significa que para cada grupo de 64 elementos no nível 3 é suficiente calcular e armazenar apenas uma matriz elementar, fato que melhora drasticamente o desempenho do refinamento h global, cuja utilização tem sido muitas vezes evitada devido a dificuldades no armazenamento do grande número de dados que produz.

O refinamento h global executado da forma descrita gera um banco de dados que é em tudo semelhante ao requerido pelo Método Multimalha de solução de sistemas de equações. A utilização simultânea dos dois procedimentos leva a um processo eficiente e de custo computacional reduzido.

O MÉTODO MULTIMALHA

Ao se representar o erro algébrico cometido em uma aproximação inicial dos processos iterativos comuns (relaxação) de solução de sistemas de equações por uma série de Fourier em senos, mostra-se que esse erro pode ser decomposto em componentes de frequências diferentes. A relaxação é eficiente em eliminar somente as componentes de alta frequência (oscilatórias) do erro, permanecendo na solução as componentes de baixa frequência (suaves) [7].

O Método Multimalha, sistematizado por Archi Brandt na década de 70, é um processo iterativo que acelera a convergência dos processos comuns através da eliminação das componentes suaves do erro. Considerando que o sistema de equações se refere a uma determinada malha, o método basicamente consiste na combinação adequada de três idéias há muito conhecidas e empregadas:

1- Correção pela malha grossa: Após eliminar, por relaxação, as componentes de alta frequência, interpola-se a solução para uma malha mais grossa (mais espaçada) contida na primeira, na qual as componentes suaves remanescentes se tornam oscilatórias e podem ser agora eliminadas por relaxação nesta segunda malha.

2- Correção pelo resíduo: A relaxação em $K_u = f$ leva à obtenção de uma aproximação \underline{y} de \underline{u} , que ao ser aplicada na equação original fornece o resíduo $\underline{r} = f - K\underline{y}$. A equação $K_e = \underline{r}$ é chamada equação residual e, sendo \underline{e} o erro algébrico (incógnita), é equivalente à equação anterior. A relaxação na equação residual fornece um valor para o erro \underline{e} que somado com \underline{y} aproxima a solução do valor exato ($\underline{u} = \underline{y} + \underline{e}$).

3- Iteração encaixada (nested): Com o objetivo de obter uma boa aproximação inicial para a solução, resolve-se o sistema referente a uma malha mais grossa, contida na primeira, e interpola-se o resultado. O procedimento pode ser feito recursivamente e dá bons resultados quando o erro na malha grossa for suave; caso contrário a interpolação poderá levar a resultados muito ruins. Observa-se que o procedimento não muda a taxa de convergência assintótica.

Existem várias versões para o Método Multimalha [8]. Foi aqui utilizada uma variação do algoritmo usado por Zhu e Craig [9], isto é, o CICLO N com o método Gauss-Seidel de relaxação, interpolação linear $I_{(j)}^{(p+1)}$ na fase ascendente, injeção $I_{(j)}^{(j-1)}$ na fase descendente e relaxação

feita na equação residual. Foram construídos três novos níveis de malha (FIG. 2).

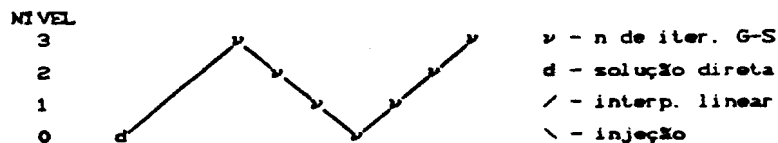


FIG. 2 - Algoritmo esquemático do ciclo N

Para ν iterações por nível (5 para todos os níveis com excesso do nível 0 onde é usado um critério de parada baseado na verificação da convergência), com \wedge indicando os valores iniciais para a relaxação em um nível, o algoritmo pode ser descrito como:

$$\hat{v}^{(3)} = I_{(3)}^{(3)} v^{(3)}$$

$$K_{-}^{(3)} v^{(3)} = f^{(3)}$$

$$r^{(3)} = f^{(3)} - K_{-}^{(3)} v^{(3)}$$

$$\hat{r}^{(3)} = I_{(3)}^{(3)} r^{(3)}$$

$$\text{para } j=2,1 \left[\begin{array}{l} K_{-}^{(j)} \hat{e}^{(j)} = \hat{r}^{(j)} \quad (C_{\hat{e}}^{(j)} = 0) \\ \hat{r}^{(j)} = \hat{r}^{(j)} - K_{-}^{(j)} \hat{e}^{(j)} \\ \hat{r}^{(j-1)} = I_{(j)}^{(j-1)} \hat{r}^{(j)} \end{array} \right.$$

$$\text{para } j=0,1 \left[\begin{array}{l} K_{-}^{(j)} \hat{e}^{(j)} = \hat{r}^{(j)} \quad (C_{\hat{e}}^{(j)} = 0) \\ \hat{e}^{(j+1)} = I_{(j)}^{(j+1)} \hat{e}^{(j)} \\ \hat{e}^{(j+2)} = \hat{e}^{(j+1)} + \hat{e}^{(j+1)} \end{array} \right.$$

$$K_{-}^{(2)} \hat{e}^{(2)} = \hat{r}^{(2)}$$

$$\hat{e}^{(2)} = I_{(2)}^{(2)} \hat{e}^{(2)}$$

$$\hat{v}^{(2)} = v^{(2)} + \hat{e}^{(2)}$$

$$K_{-}^{(2)} v^{(2)} = f^{(2)}$$

$$r^{(2)} = f^{(2)} - K_{-}^{(2)} v^{(2)}$$

Foi utilizado o critério para a verificação de convergência proposto por Parsons e Hall-1990 [10], isto é, a convergência é considerada

$$\text{atingida quando } R = \frac{\|r^{(2)}\|_2}{\|f^{(2)}\|_2} \leq \epsilon \text{ onde } \|\cdot\|_2 \text{ é a norma euclidiana do}$$

vetor e ϵ a tolerância para a convergência, aqui tomado como 10^{-6} .

Se $\epsilon \cdot 1.01 > R > \epsilon$, a relaxação continua no nível 3 até que $R \leq \epsilon$; se

Quando o novo ciclo é iniciado; de $R_{i,c}$ a solução $u_{i,c}$ é considerada alcançada.

O SISTEMA SDP

O "Sistema de Desenvolvimento de Programas Baseado no Método dos Elementos Finitos - SDP" desenvolvido no LNCC (Laboratório Nacional de Computação Científica - Rio de Janeiro) a partir de 1977 por Feijó e Gouveia [11], fornece um conjunto de rotinas, uma metodologia de programação e normas de organização e documentação para o desenvolvimento de códigos de programação para o MEF. Baseia-se em técnicas de programação estruturada e se constitui, em sua versão básica, de quatro módulos independentes:

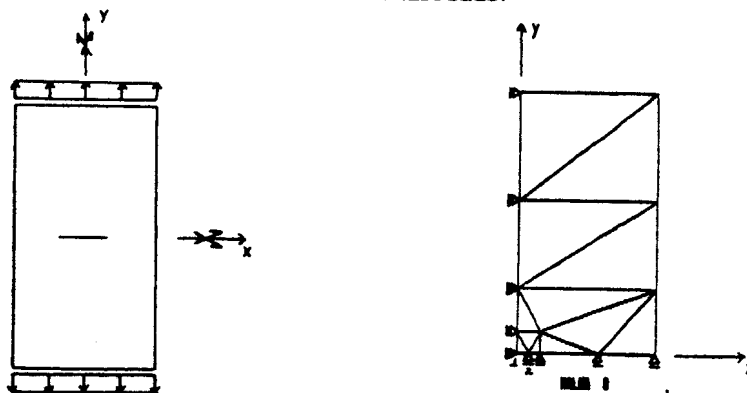
- 1) PRE - pré-processador que manipula os dados de entrada;
- 2) PRO - monta as matrizes de rigidez elementares;
- 3) SOL - resolve o sistema de equações;
- 4) POS - pós-processador que calcula as tensões.

Foram implantados sete novos módulos:

- 5) ADA - calcula o erro nos elementos e reloca os nós;
- 6) GERA - gera os três novos níveis de malha;
- 7) PREMG - monta matrizes de rigidez globais;
- 8-a) ELIGA - resolve o sistema do nível 3 por Elim. de Gauss;
- b) GAUSSOL - resolve o sistema do nível 3 por Gauss-Seidel;
- c) MULGR - resolve o sistema do nível 3 por Multimalha;
- 9) POSMG - calcula tensões nos nós do nível 3.
- *) desenvolvidos para possibilitar o estudo comparativo com o método Multimalha.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Foi processada uma membrana com trinca em sua região central (FIG. 3a), com dois eixos de simetria. A discretização é mostrada na FIG. 3b. Os nós 1 e 2 delimitam a trinca no modelo analisado.



a) Membrana com trinca na região central

b) Modelo analisado

FIG. 3

Na fase R a relocação dos nós foi executada cinco vezes consecutivas. As malhas sucessivas desta fase são mostradas na FIG. 4. Na MALHA 5 o erro de discretização foi considerado satisfatoriamente equidistribuído no domínio.

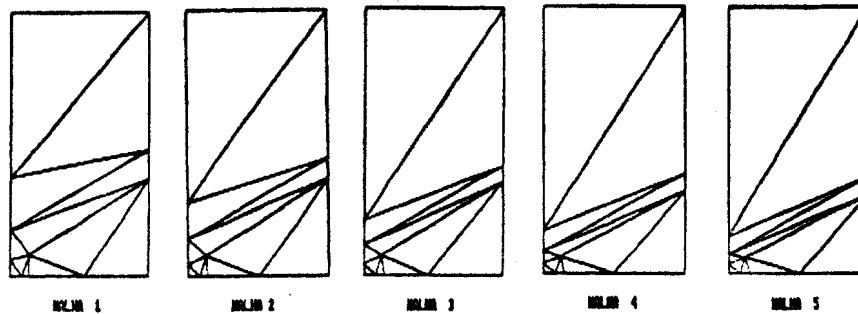


FIG. 4 - Evolução da melhora da malha (FASE R).

Na fase H cada elemento da MALHA 5 - nível 0 da fase H/Multimalha - foi subdividido em 64 elementos conforme descrito em item anterior e a discretização resultante (Malha 6/Nível 3) foi novamente processada pelo MEF. O sistema de equações foi resolvido pelo Método Multimalha (MM) cujo algoritmo foi apresentado anteriormente. Para efeito de comparação, o sistema foi também resolvido pelo Método de Gauss-Seidel (GS).

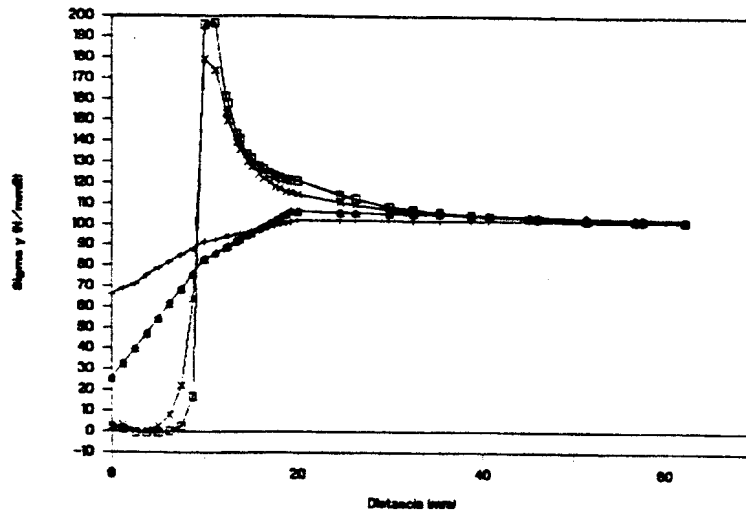
A relação entre os tempos de CPU gastos pelos dois procedimentos,

$$\frac{MM}{GS} = 0.21.$$

mostra que o Método Multimalha diminuiu em 80% o tempo de CPU gasto pelo Método Gauss-Seidel. Portanto, o Método Multimalha se mostrou, neste problema, bastante eficaz em acelerar a convergência de um processo iterativo comum.

O gráfico da FIG. 5 mostra as tensões nos nós da linha inferior do modelo (linha da trinca - coord. $y = 0$) obtidas ao se processar as malhas 0,5, 6 e a malha 0 após refinamento H sem o pré-processamento R (MALHA 7).

A primeira discretização (MALHA 0) corresponde ao modelo original, que se mostra uma representação muito ruim do problema. Após 5 refinamentos r (MALHA 5), a curva se aproxima um pouco mais do resultado procurado, mas ainda apresenta um número insuficiente de pontos para descrever o contínuo. As duas últimas curvas (MALHA 6 e MALHA 7) mostram os resultados obtidos para malhas já bastante refinadas e ao se comparar as duas pode-se constatar a melhora na representação de tensões devida à utilização do processo misto.



+ MALHA 0 ◇ MALHA 5 □ MALHA 6 x MALHA 7

Fig. 5 - Tensão σ_y x eixo da trinca

REFERENCIAS

1. Noor, A. K. e Babuska, I., "Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions", Finite Elements in Analysis and Design, vol 3 1987, pags. 1-26, North Holland.
2. Ewing, R. E., "A Posteriori Error Estimation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 82, 1990, pags. 59-72, North Holland.
3. Las Casas, E. B., "R-H Mesh Improvement Algorithms for Finite Element Method". Tese de Doutorado, Purdue University, EUA, maio 1988.
4. Zienkiewicz, O. C. e Zhu, Z., "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", Int. J. Numerical Methods in Engineering, vol 24, 1987, pags. 337-357.
5. Babuska, I. e Rheinboldt, W. C., "Analysis of Optimal Finite Element Meshes in R¹", Mathematics of Computation, vol 33, 1979, pags. 435-463.
6. Diaz, A. R.; Kikuchi, M. e Taylor, J. E., "A Method of Grid Optimization for Finite Element Method", Comp. Meth. Appl. Eng., vol 41, 1983, pags. 20-45.
7. Briggs, W. L. e McCormick, S., "Multigrid Methods", Chapter 1, Frontiers in Appl. Math., Society for Ind. and Appl. Math., Philadelphia, Pennsylvania, 1987.

8. Briggs, W. L., "A Multigrid Tutorial", Soc. for Ind. and Appl. Math., 1987.
9. Zhu, J. Z. e Craig, A. W., "Finite Element Multigrid Algorithms and their Application to Engineering Problems", NUMETA 86, Swansea, January 1986.
10. Parsons, J.D. e Hall, J. F., "The Multigrid Method in Solid Mechanics: Part 1 - Algorithms Description and Behaviour", IJNME, vol.29, 1990, pags.719-737.
11. Gouveia, J. P., "SDP - Um Sistema para Desenvolvimento de Programas Baseado no Método dos Elementos Finitos", Tese de D. Sc., Depart. de Engenharia Mecânica, PUC/RJ, 1986.

