

## ESTUDIOS ANALÍTICOS Y EXPERIMENTALES SOBRE VIBRACIONES DE PLACAS CIRCULARES DELGADAS CON UNA MASA ADOSADA

C. A. Rossit<sup>1,2</sup>, D. V. Bambill<sup>1,2</sup>, S. La Malfa<sup>2</sup>, S. Maíz<sup>1,2</sup> y P. A. A. Laura<sup>1</sup>

<sup>(1)</sup>Departamento de Ingeniería  
Instituto de Mecánica Aplicada  
Universidad Nacional del Sur,  
Av. Alem 1253 (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina

<sup>(2)</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

e-mail: [carossit@criba.edu.ar](mailto:carossit@criba.edu.ar), [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar), [smaiz@uns.edu.ar](mailto:smaiz@uns.edu.ar)

**Key words:** Placa Anular, Masas, Inercia Rotatoria, Frecuencias Naturales, Vibraciones.

**Abstract.** *Como es sabido, en el caso de placas circulares vibrantes con masas adosadas, la solución analítica exacta, mediante funciones de Bessel, ha sido obtenida para el caso de la placa maciza con una masa puntual en el centro. Aproximaciones muy útiles desde el punto de vista aplicado han sido obtenidas mediante métodos variacionales y funciones coordenadas polinómicas.*

*En el presente estudio se analiza analítica y experimentalmente el comportamiento dinámico de una placa circular anular con su contorno exterior empotrado y su borde interior libre, cuando sobre la misma se encuentra adosada una masa en una posición arbitraria.*

*En el caso de contar con información sobre elementos estructurales con masas adosadas comúnmente se trata de masas puntuales.*

*Las placas anulares circulares constituyen un elemento estructural de uso habitual en sistemas mecánicos y obras civiles y la posibilidad de que equipos electromecánicos sean apoyados sobre ella, convierten de interés conocer sus parámetros dinámicos básicos.*

*En este caso, se han obtenido valores de los primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural para distintas posiciones de la masa adosada.*

*Los valores fueron obtenidos mediante una aproximación variacional y a través de la utilización de un código de elementos finitos.*

*También se obtuvieron valores experimentales en un modelo construido al efecto*

*La concordancia entre los valores obtenidos mediante los distintos procedimientos resulta altamente satisfactoria.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Una revisión de la literatura científica indica que no son muy numerosos los estudios sobre vibraciones transversales de placas circulares con masas adosadas.

En la casi totalidad de los casos estudiados la masa se encuentra ubicada en posición central. Para dicha situación, Robertson (1951)<sup>1</sup> encontró la solución exacta en un desarrollo de funciones de Bessel de orden cero.

Más reducido aún es el número de trabajos donde la ubicación de la masa es excéntrica.

Su solución exacta se torna más complicada, en este caso. Posiblemente implicará combinaciones de funciones de Bessel de orden superior y términos trigonométricos en el sentido circunferencial.

En consecuencia se recurre a métodos aproximados, analíticos y numéricos y a mediciones experimentales.

Entre los trabajos realizados sobre el tema merecen citarse el de D.V. Bambill y otros<sup>2</sup>, del cual el presente trabajo puede considerarse a continuación y el de Delaplane y Kerlin (1990)<sup>3</sup>, quienes efectúan mediciones experimentales en placas anulares de aluminio. En ambos casos se obtienen valores de la frecuencia fundamental.

En el presente trabajo se obtienen los valores de los primeros coeficientes de frecuencias naturales de vibración transversal, para una placa circular anular empotrada en su contorno exterior y libre en su borde interno; cuando sobre la misma se halla adosada una masa en una posición arbitraria. Asimismo, se ha realizado un estudio sobre las formas nodales asociadas a las frecuencias obtenidas.

## 2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

El problema fue analizado recurriendo a métodos aproximados (Rayleigh-Ritz); Elementos Finitos) y a su vez se realizaron mediciones experimentales en un modelo construido al efecto, con el objeto de comparar los resultados obtenidos mediante los distintos enfoques.

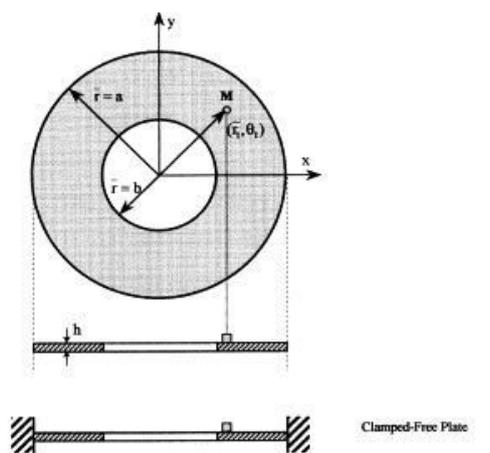


Figura 1: Sistema en estudio

## 2.1 Rayleigh-Ritz

La clásica formulación de Rayleigh-Ritz para el caso de la placa anular circular vibrante con una masa concentrada en una posición arbitraria  $(\bar{r}_1, \theta_1)$  (Figura 1) involucra al siguiente funcional de energía:

$$J(W) = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_b^a \left\{ \left( \frac{\partial^2 W(\bar{r}, \theta)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial W(\bar{r}, \theta)}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 W(\bar{r}, \theta)}{\partial \theta^2} \right) \bar{r} d\bar{r} d\theta - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 W(\bar{r}, \theta)}{\partial \bar{r}^2} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial W(\bar{r}, \theta)}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial W^2(\bar{r}, \theta)}{\partial \theta^2} \right) \right] + 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial W(\bar{r}, \theta)}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \bar{r} d\bar{r} d\theta \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} \omega^2 \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^a W(\bar{r}, \theta) \bar{r} d\bar{r} d\theta - \frac{1}{2} M \omega^2 [W(\bar{r}_1, \theta_1)]^2$$

Donde  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  es la rigidez a la flexión de la placa,  $M$  magnitud de la masa

adosada en la posición  $(\bar{r}_1, \theta_1)$ ,  $h$  es el espesor de la placa cuyo material tiene densidad  $\rho$ , módulo de Young  $E$  y coeficiente de Poisson  $\nu$  y  $\omega$  es la frecuencia natural circular

El último término de la expresión precedente representa el efecto de la inercia traslacional de la masa adosada.

Con el objeto de mejorar la precisión de los resultados puede agregarse el efecto de la inercia rotatoria de la masa.

En ese caso, a la expresión de la funcional (1), deberá adosarse el siguiente término:

$$- \frac{1}{2} I_{rr} \omega^2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (2)$$

Donde  $I_{rr}$  es el momento de inercia de la masa adosada con respecto al eje de rotación.

Se han utilizado parámetros y coeficientes adimensionales para simplificar la formulación:

$$\begin{aligned} r &= \bar{r}/a; \\ r_1 &= \bar{r}_1/a \\ \Omega &= \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} a^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Como expresión que aproxima la amplitud de la deflexión transversal de la placa fue adoptada la siguiente:

$$W(r, b) \cong W_a(r, \theta) = \cos(n\theta) \sum_{j=1}^J A_j [\alpha_j r^4 + \beta_j r^2 + 1] r^{2(j-1)} \quad (4)$$

$J$  indica el número de términos de la aproximación.

Al parámetro  $n$ , se le ha asignado valor 0, 1 ó 2, según las líneas nodales radiales que posean las formas nodales correspondientes a las distintas frecuencias naturales.

Los coeficientes  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  se determinan aplicando las condiciones de borde (esenciales) de la placa en  $r = 1$ ,

$$W(r, \theta) \Big|_{r=1} = \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0 \quad (5)$$

En virtud de utilizarse el método de Rayleigh-Ritz, no es condición necesaria que la aproximación propuesta cumpla con las condiciones del borde interno (condiciones naturales).

Reemplazando la ecuación (4) en el funcional de energía (1) y minimizando con respecto a las constantes  $A_j$ ,

$$\frac{\partial J(W)}{\partial A_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (6)$$

A través de la condición de no-trivialidad se obtiene una ecuación trascendente cuyas raíces son los coeficientes de frecuencia natural  $\Omega$ .

## 2.2 Elementos finitos

Fue utilizado el software Algor<sup>4</sup>, disponible en el Área Estabilidad de la Universidad Nacional del Sur.

La malla se constituyó con elementos placa en total 4800 elementos que configuran 4968 nodos).

Los elementos están circunscriptos por segmentos radiales y circunferencias concéntricas

Las distancias entre circunferencias aumenta, conforme crece su distancia al centro de manera de mantener aproximadamente constante la relación de aspecto de los elementos.

El elemento masa fue adosado en las posiciones correspondientes al modelo experimental asignándole la masa y la inercia rotatoria del acelerómetro.

## 2.3 Determinaciones experimentales

A los efectos de corroborar la aproximación de las metodologías propuestas previamente, fue construido un modelo específico, con una placa anular de acero (Figura 2).



Figura 2: Placa empotrada en el borde exterior

La condición de borde empotrado se materializó a través de dos bridas de fundición abulonadas entre las cuales se inserta la placa.

Dimensiones de la placa:

Radio exterior	$a = 25 \text{ cm.}$
Radio interior	$b = 7.5 \text{ cm}$
Espesor	$h = 1.5 \text{ mm.}$

Los parámetros mecánicos del material de la placa que intervienen en el sistema diferencial que gobierna el problema son:  $\rho$ ,  $\nu$  y  $E$ .

Si se tiene en cuenta que  $c = \sqrt{E/\rho}$ , velocidad de propagación de una onda longitudinal en una barra, permanece prácticamente constante en los distintos tipos de aceros, en aproximadamente 5100 m/s, no resulta imprescindible realizar ensayos específicos para la determinación individual de  $E$  y  $\rho$ . Como coeficiente de Poisson, se adoptó  $\nu = 0.3$ .

Masa adosada:



Figura 3: Acelerómetro

Para modelar la masa adosada a la placa vibrante, se recurrió al acelerómetro (Figura 3) utilizado para medir el comportamiento de la placa.

El peso del acelerómetro empleado es de 0.142 Kg. y su momento de inercia es  $1.295 \cdot 10^{-4}$  Kg. m. con respecto a un eje diametral en el plano de la placa.

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

En primer lugar, se efectuaron mediciones de las frecuencias naturales de la placa sin la masa, utilizando un transductor que no tomara contacto con la placa de manera de no alterar las mediciones.

Se han determinado los siguientes valores de frecuencias naturales:

$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)
62.5	103.14	169.40

Esos valores experimentales de las frecuencias naturales de vibración, fueron utilizados para determinar la magnitud del “radio efectivo”:  $a^*$ ; que será utilizado en las aproximaciones analíticas y numéricas.

Este concepto de “radio efectivo” surge al tratar de materializar la condición de empotramiento perfecto en el modelo.

En este caso, como se dijo, la chapa que modela a la placa queda confinada entre dos robustas bridas de fundición, cuyo diámetro interno es de 50 cm.

Es ése, el diámetro exterior de la porción de chapa “libre”, pero no necesariamente indica la posición donde se materializa el empotramiento.

Debe considerarse la ubicación de los bulones (con eje en una circunferencia de 60 cm de diámetro) y el ajuste que se efectúa a través de los mismos. Es sabido que un ajuste excesivo inducirá tensiones en el plano de la placa que pueden distorsionar las mediciones.

Teniendo en cuenta que los coeficientes de frecuencia de la placa circular anular con empotramiento externo y borde libre, han sido determinadas en forma exacta<sup>5</sup>; por comparación fue obtenido  $a^*$ .

La expresión genérica es:

$$f_i = \frac{(\lambda_i)^2}{2\pi_a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (7)$$

$$\text{con } \lambda_1^2 = 11,4; \lambda_2^2 = 19,5; \lambda_3^2 = 32,5$$

Promediando los valores del radio efectivo que se obtienen en cada caso arrojó:

$$a^* = 26,25 \text{ cm.}$$

Con el valor precedente del radio efectivo se determinaron los valores de las tres primeras frecuencias mediante las aproximaciones inducidas.

Tabla 1. Frecuencias naturales de la placa sin masa.

	$f_1(H_z)$	$f_2(H_z)$	$f_3(H_z)$
<i>EXPERIMENTAL</i>	62,50	103,40	169,40
<i>FEM</i>	60,48	105,99	176,80
<i>RAYLEIGH-RITZ</i>	60,48	105,97	177,25

La segunda y tercera frecuencia corresponden a formas modales con uno y dos diámetros nodales respectivamente.

La concordancia de las dos aproximaciones con los valores experimentales es excelente.

A continuación se vuelcan en la Tabla 2 los valores correspondientes a las frecuencias de vibración de la placa cuando sobre la misma se halla adosada una masa de las características señaladas en tres posiciones distintas:  $r_1 = 10$  cm  $r_2 = 16.5$  cm y  $r_3 = 23$  cm.

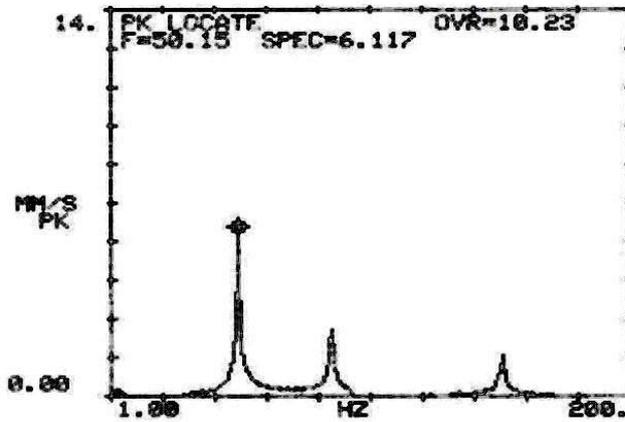
En el caso de los métodos aproximados se ha considerado la influencia de la inercia rotatoria.

Tabla 2. Frecuencias naturales de la placa con masa.

	$r_1 = 10$ cm			$r_2 = 16,5$ cm			$r_3 = 23$ cm		
	<i>Exp.</i>	<i>FEM</i>	<i>R.R.</i>	<i>Exp.</i>	<i>FEM</i>	<i>R.R.</i>	<i>Exp.</i>	<i>FEM</i>	<i>R.R.</i>
$f_1$	50,15	52,49	58,38	57,50	58,35	58,74	59,82	60,36	59,10
$f_2$	85,70	94,07	101,44	90,00	96,85	102,60	98,22	104,98	103,22
$f_3$		103,06	105,63		105,60	105,86		105,99	105,92
$f_4$	151,30	153,48	173,17	145,00	158,01	175,02	152,80	168,10	175,25

Se acompañan copias de los espectros que surgieron de la determinación experimental de las frecuencias naturales de vibración para las posiciones de la masa:  $r = 10$  cm y  $r = 23$  cm.

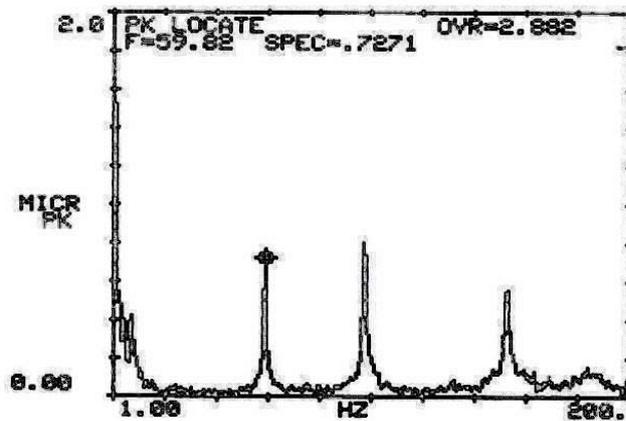
DATA DESCRIPTION=[IS00] MASA 150 BORDE  
 DATE/TIME: 23MAR 04 11:06 AM



FREQ	PEAK	FREQ	PEAK	FREQ	PEAK	FREQ	PEAK
2.000	0.1576	57.00	0.5056	72.25	0.3331	150.0	1.192
3.293	0.2890	60.50	0.3522	75.00	0.2784	151.3	1.648
32.75	0.1539	61.26	0.4118	77.50	0.2926	159.2	0.1892
36.26	0.2327	64.75	0.3748	85.73	2.760	161.8	0.1396
50.15	6.117	68.75	0.3331	134.2	0.1507	165.8	0.1105

Figura 4: Espectro de las frecuencias naturales para  $r_1 = 10$  cm

DATA DESCRIPTION=[IS01] MASA 20 BORDE  
 DATE/TIME: 23MAR 04 11:12 AM



FREQ	PEAK	FREQ	PEAK	FREQ	PEAK	FREQ	PEAK
2.093	1.558	143.8	0.1135	161.0	0.1124	184.2	0.176
3.370	0.4196	147.7	0.1580	163.3	0.1546	186.2	0.144
12.25	0.1404	152.8	0.6431	169.3	0.1166	187.5	0.118
59.82	0.7271	158.2	0.1599	178.7	0.1308	188.8	0.140
98.22	0.9096	159.3	0.1576	182.5	0.1244	192.3	0.102

Figura 5: Espectro de las frecuencias naturales para  $r_1 = 23$  cm

Se observa, del análisis de los resultados que la dispersión de valores de las aproximaciones propuestas con respecto a los valores experimentales crece al considerarse la masa adosada.

Es menor en el caso de elementos finitos (prácticamente no supera el 10 %, siempre en exceso) y ligeramente mayor en el caso del método variacional de Rayleigh-Ritz (promediando el 15 %).

Debe hacerse notar, que las segunda y tercera frecuencias naturales corresponden a modos con líneas nodales no circunferenciales.

En ausencia de la masa, se trata de uno y dos diámetros nodales respectivamente.

La influencia de la masa, distorsiona dichas líneas nodales (Ver Figura 6 y Figura 7).



Figura 6: Experimental

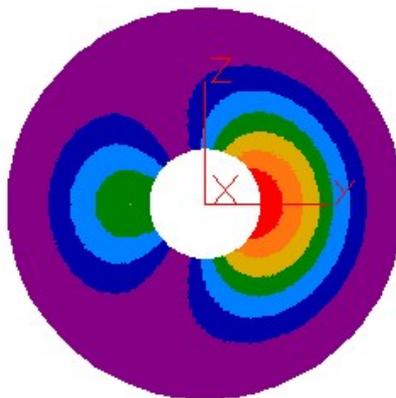


Figura 7: Elementos finitos

Esta desviación de las líneas nodales con respecto a los diámetros, no es adecuadamente representada por la aproximación (4), con poca flexibilidad en el sentido azimutal.

Un detalle a tener en cuenta es el hecho de que algunos valores de frecuencias naturales no han sido detectados en el ensayo experimental.

Ello se debe a la metodología empleada, de utilizar el propio acelerómetro para modelar la masa adosada.

En elementos estructurales con simetría como la placa circular en análisis existen situaciones particulares que hacen que para determinadas frecuencias las formas nodales asociadas no sean únicas. Una situación similar ocurre en placas simplemente apoyadas cuadradas o cuando la relación de lados es un entero.

Como es sabido, la presencia de la masa, hace que la vibración de la placa reoriente las líneas nodales – cuando es posible – de manera que el punto de aplicación de la masa se ubica en una línea nodal o en un antinodo<sup>6,7</sup>.

Obviamente, en el caso en que la línea nodal contiene al punto de aplicación de la masa, la frecuencia varía muy poco con respecto al valor de la placa sin masa, ya que sólo es modificada por la inercia rotatoria de la masa.

Al no sufrir desplazamientos transversal el punto de aplicación de la masa, no es advertido por el acelerómetro, que no detecta la correspondiente frecuencia.

Esta situación debe ser tenida en cuenta en caso de pretender controlar las vibraciones de un sistema de este tipo mediante absorbedores dinámicos.

#### 4 CONCLUSIONES

Se estima que la aproximaciones obtenidas entre los distintos procedimientos es satisfactoria.

Debemos tener en cuenta, las numerosas incertidumbres que se presentan en ensayos de este tipo.

Por ejemplo en las características geométricas del material; es muy difícil que la chapa presente un espesor uniforme, el espesor adoptado representa un promedio de los espesores medidos.

Obviamente la distribución no uniforme del espesor altera el comportamiento dinámico de la placa.

En cuanto a las características mecánicas, el parámetro más afectado es el módulo de Young  $E$ .

En nuestras aproximaciones realizadas, se supuso isotropía del material, aunque es sabido que el proceso de laminado de la chapa le confiere una característica ortótropa, que también afecta su comportamiento.

En cuanto a la metodología de Rayleigh-Ritz, su precisión depende de la aproximación de la deformación propuesta a la real. En este caso, se ha detectado dificultad para representar adecuadamente formas modales no axilsimétricas, pero que además no presentan condiciones de antimetría en el sentido azimutal.

## 5 AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento al Sr. Osvaldo Álvarez, Técnico Principal de la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (C.I.C.), por su valiosa colaboración en la preparación del modelo experimental.

También agradecen al Ing. Raul E. Rossi y a la Mg. Ing. Patricia Belles por sus valiosos consejos al emplear el código de elementos finitos.

El presente estudio ha sido financiado por el CONICET y la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur

## 6 REFERENCIAS

- [1] R. E. Robertson. Vibration of clamped circular plate carrying concentrated mass. *Journal of Applied Mechanics*. 18 (4), pp. 349-352, (1951).
- [2] D. V. Bambill, S. La Malfa, C. A. Rossit and P. A. A. Laura. Analytical and experimental investigation on transverse vibration of solid, circular and annular plates carrying a concentrated mass at an arbitrary position with marine application. *Ocean Engineering*. 31, pp. 127-138, (2004).
- [3] N. C. Delaplane R. L. Kerlin. Driving-point impedance measurements of clamped circular plates driven by a no central force. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 88 (1), pp. 222-230, (1990)
- [4] Algor inc., *Linear stress and Vibration Analysis Processor Reference Manual*. Pittsburgh. (1999).
- [5] R. D. Blevins. *Formulas for the Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand Reinhold Company. New York. (1979).
- [6] Lord Rayleigh. *Theory of Sound*. Dover Publications, New York. (1945).
- [7] B. M. Deutsch, A. R. Robinson, Felce R. J. and T. R. Moore. Nondegenerate normal-mode doublets in vibrating flat circular plates. *American Journal of Phisycs*. 72 (2), pp. 220-225, (2004)