METODO EXPERIMENTAL-NUMERICO-ANALITICO PARA LA DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS DE MATERIALES SEMI-INFINITOS A TRAVES DE UN CAMBIO DE FASE

Domingo A. Tarzia

Depto. Matemática, FCE, Univ. Austral

Moreno 1056, (2000) Rosario, Argentina.

PROMAR (CONICET-UNR), Inst. Matemática "B. Levi"

Avda. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.

RESUMEN

Se da una revisión de diferentes métodos utilizados para la determinación de coeficientes térmicos de un material semi-infinito ($x > 0$) a través de un proceso de cambio de fase (problema de Stefan a una y dos fases) con una sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$.

ABSTRACT

We give a revision of different methods used for the determination of thermal coefficients of a semi-infinite material ($x > 0$) through a phase-change process (one-phase and two-phase Stefan problems) with an overspecified condition on the fixed face $x = 0$.

I. INTRODUCCION

Los problemas de transferencia de calor con cambio de fase, tales como los procesos de solidificación y fusión de materiales, tienen en la actualidad numerosas aplicaciones científicas y tecnológicas. Por ejemplo, una revisión de una extensa bibliografía sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor o de la difusión, en particular sobre trabajos concernientes al problema de Stefan y sus aplicaciones, fue presentada en [Ta1, Ta6]. Esta bibliografía es analizada y clasificada en trabajos teóricos, numéricos y experimentales, como así también en las posibles aplicaciones. Más recientemente, (año 1988), se presentó una actualización de la bibliografía, a través de la cual se pueden obtener mayores informaciones y referencias. Por ejemplo, contiene 2528 referencias que han aparecido en 263 revistas científicas, 66 libros, 29 coloquios (que tienen al menos 3 trabajos sobre el tema), 24 colecciones y 24 informes técnicos diferentes. Se han realizado diferentes clasificaciones según el período, idioma, revistas científicas (de matemática y de física-ingeniería), colecciones, informes técnicos y editores (de libros y coloquios) de las publicaciones. Las

2528 referencias se han clasificado por :

1) Libros exclusivamente en el tema (con 8 referencias);

2) Tesis sobre el tema (con 17 referencias);

3) Libros que tienen capítulos o secciones sobre el tema (con 60 referencias);

4) Compiladores de coloquios exclusivamente sobre el tema (con 11 referencias);

5) Artículos publicados en coloquios exclusivamente sobre el tema (con 192 referencias);

6) Compiladores de coloquios (no exclusivamente sobre el tema) que tienen al menos tres artículos sobre el tema (con 18 referencias);

7) Artículos publicados en coloquios no exclusivamente sobre el tema pero que tienen al menos tres artículos sobre el tema (con 108 referencias);

8) Artículos sobre el tema publicados en coloquios que no han sido considerados anteriormente (con 170 referencias);

9) Artículos sobre el tema publicados en revistas científicas o numerosas colecciones (con 1821 referencias);

10) Artículos sobre el tema a aparecer en revistas científicas (con 12 referencias);

11) Informes técnicos sobre el tema (con 111 referencias).

Se pueden citar los siguientes libros y trabajos de revisión sobre el tema :

(i) Libros : [BaCa, Ca3, CaJa, Cr1, Cr2, Di, ElOc, Fa, Pr, KiSt, LSU, Li, Lu, Me, PrGi, Ro, Ru, Tay, We];

(ii) Coloquios : [ACH, BDF, FaPr, HoSp, Ma, NiPa, OcHo, WSB];

(iii) Trabajos de revisión : [Ba, Br, Da, Du, Fre, HoNi, Pr].

El objetivo de la presente charla es presentar una corta revisión de los métodos utilizados para la determinación de coeficientes térmicos (ver nomenclatura, al final) de materiales semi-infinitos a través de un proceso de cambio de fase con una sobre-condición sobre el borde fijo $x = 0$. La teoría matemática de imponer una sobre-condición sobre una porción de frontera fue utilizada en numerosos problemas de conducción de calor, como ser [Ca1, Ca2, Jo1, Jo2].

En primer lugar, se analizará un resultado básico sobre una variante de la solución de Neumann [Ta2] que será de gran interés para el futuro desarrollo del tema.

II. SOBRE LA SOLUCION DE NEUMANN

La solución de Neumann para el problema de Stefan a dos fases (caso <u>fusión</u>) para un material semi-infinito es la solución del problema siguiente : Hallar las funciones $x=s(t)>0$ (frontera libre), definida para $t>0$ con $s(0)=0$, y la temperatura

$$(1) \qquad \theta(x,t) = \begin{cases} \theta_2(x,t) > 0 & \text{si} \quad 0 < x < s(t)\ ,\ t > 0\ , \\ 0 & \text{si} \quad x = s(t)\ ,\ t > 0\ , \\ \theta_1(x,t) < 0 & \text{si} \quad x > s(t)\ ,\ t > 0\ . \end{cases}$$

definida para $x>0$ y $t>0$, de manera que satisfagan las condiciones siguientes:

(2)
(i) $\rho c_2 \theta_{2_t} - k_2 \theta_{2_{xx}} = 0 \,,\, 0 < x < s(t) \,,\; t > 0$,
(ii) $\rho c_1 \theta_{1_t} - k_1 \theta_{1_{xx}} = 0 \,,\; x > s(t) \,,\; t > 0$,
(iii) $s(0) = 0$,
(iv) $\theta_1(s(t),t) = \theta_2(s(t),t) = 0 \,, \quad t > 0$,
(v) $k_1 \theta_{1_x}(s(t),t) - k_2 \theta_{2_x}(s(t),t) = \rho\, l\, \dot{s}(t) \,, \quad t > 0$,
(vi) $\theta_1(x,0) = \theta_1(+\infty,t) = -C < 0 \,,\; x > 0 \,,\; t > 0$,
(vii) $\theta_2(0,t) = B > 0 \,, \quad t > 0$.

La solución está dada por [Br, CaJa, Ru, We]

$$\theta_1(x,t) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right) \,,\; a_1^2 = \alpha_1 = \frac{k_1}{\rho c_1} \,,$$

$$\theta_2(x,t) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \,,\; a_2^2 = \alpha_2 = \frac{k_2}{\rho c_2} \,, \tag{3}$$

$$s(t) = 2\,\sigma \sqrt{t}$$

donde $\alpha_1 = \alpha_1(\sigma)$, $\alpha_2 = \alpha_2(\sigma)$, $\beta_1 = \beta_1(\sigma)$, $\beta_2 = \beta_2(\sigma)$ y $\sigma>0$ es la única solución de una cierta ecuación.

Se considerará como problema (2bis) el dado por las condiciones (2i)−(2vi) y (2viibis) donde

(2viibis) $\quad k_2\, \theta_{2_x}(0,t) = -\dfrac{h_0}{\sqrt{t}} \,,\; t > 0 \quad (\text{con } h_0 > 0)$.

<u>Propiedad</u> <u>1</u>.− (i) Existe una solución de tipo Neumann para el problema (2bis) si y solamente si h_0 verifica la desigualdad siguiente :

$$h_0 > \frac{C\, k_1}{\sqrt{\pi}\, a_1} \,. \tag{4}$$

(ii) Si $h_0 \le C\, k_1/\sqrt{\pi}a_1$, entonces el problema (2bis) es un problema de conducción de calor para la fase sólida inicial. Si $h_0 = C\, k_1/\sqrt{\pi}a_1$, entonces el problema (2bis) es el límite cuando $l \to +\infty$ en el problema (2).

(iii) El coeficiente σ de la solución de Neumann (3) satisface la desigualdad

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{a_2}\right) < \frac{B}{C}\sqrt{\frac{k_2\, c_2}{k_1\, c_1}} \,. \tag{5}$$

(iv) Con la condición (4), los problemas (2) y (2bis) son equivalentes.

<u>Observación</u> <u>1</u>.− La condición (2viibis) se tendrá en cuenta en el problema de la determinación de coeficientes térmicos .

<u>Observación</u> <u>2</u> .− El resultado precedente puede generalizarse al caso $\rho_1 \neq \rho_2$ [BaTa].

<u>Observación</u> <u>3</u>.− En [Ta9], se generaliza la solución de Neumann para el problema de Stefan a dos fases con

un simple modelo de zona pastosa [SWA] a dos parámetros que tiene dos fronteras libres. Se obtiene también una desigualdad que generaliza a (4), en función de los coeficientes térmicos del material, de los dos parámetros del modelo y de las temperaturas inicial y en el borde fijo constantes.

III. DETERMINACION DE COEFICIENTES TERMICOS

Se hará una aplicación de las soluciones de Lamé-Clapeyron y de Neumann a la determinación de coeficientes térmicos a través de un proceso de cambio de fase de un material semi-infinito con una sobre-condición sobre el borde fijo x=0 del tipo (2viibis) [Ta2, StaTa] o del tipo [Ta5, Ta8] :

$$\text{(2viitris)} \qquad \theta_{2x}(0,t) = -\frac{H_0}{\sqrt{t}} \quad , t > 0 \ , \ (H_0 > 0) \ .$$

Las condiciones (2viibis) y (2viitris) representan respectivamente el flujo de calor y la pendiente de la temperatura sobre el borde fijo x=0. Los coeficientes h_0 y H_0 deben ser determinados experimentalmente. Dichas dos condiciones no son las mismas cuando el coeficiente k_2 es desconocido. Por otra parte, la condición (2viitris) se adapta mejor a la experimentación [ArLaTa].

Con el presente método de imponer una sobre-condición sobre el borde fijo, se pueden obtenir fórmulas para la determinación de uno o dos coeficientes térmicos desconocidos. El método puede ser aplicado a través de un problema de Stefan a una fase, a saber :

[Ta3] : determinación de un coeficciente térmico y de la frontera libre que separa las fases con variante h_0 ;

[Ta4] : determinación de dos coeficientes térmicos siendo la frontera que separa las fases una frontera móvil con variante h_0 ;

[Ta5] : determinación de dos coeficientes térmicos con variante H_0 cuando la conductividad térmica es una de las incógnitas;

[GaSaTa] : determinación de uno y dos coeficientes térmicos con variante h_0 a través de métodos aproximados (método cuasi-estacionario, método del balance integral calórico, método variacional);

[CaTa] : determinación de uno y dos coeficientes térmicos con variante H_0 a través de métodos aproximados (método cuasi-estacionario, método del balance integral calórico, método variacional) que se diferencia del trabajo anterior por incluir una combinación lineal convexa (con un parámetro $0 < \lambda < 1$, a determinar) de soluciones aproximadas de primer y segundo orden en la variable espacial x;

[DeErTaVi] : determinación del coeficiente de difusión en un sistema gas-sólido;

[Ta7] : determinación de uno y dos coeficientes con variante h_0 a través de un modelo simple de zona pastosa dado en [SWA];

o a través de un problema de Stefan a dos fases, a saber :

[StaTa] : determinación de uno y dos coeficientes con variante h_0 ;

[StoTa] : determinación de uno y dos coeficientes con variante h_0 y densidades desiguales $\rho_1 \neq \rho_2$;

[Ta8] : determinación de uno y dos coeficientes con variante H_0 ;

[GoTa] : determinación de uno y dos coeficientes con variante h_0 a través de un modelo simple de zona pastosa [Ta9].

Por otra parte, se destaca que algunos de los resultados teóricos que se obtuvieron en los trabajos, anteriormente citados, han sido verificados experimentalmente en [ArLaTo]. Un software científico, escrito en lenguaje Pascal, y con un menú de interacción es presentado en [MaTa].

A título de ejemplo, se presentarán las propiedades siguientes:

<u>Propiedad</u> 2.– Sean k_1, k_2, c_1, c_2, ρ, $l > 0$ los coeficientes térmicos del material de cambio de fase, $-C < 0$ la temperatura inicial, $B > 0$ la temperatura del borde fijo $x = 0$ y $h_0 > 0$ el coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde $x = 0$.

(i) La condición necesaria y suficiente para la determinación de los coeficientes σ y k_1 es que los coeficientes k_2, c_1, c_2, ρ, l, B, C, $h_0 > 0$ verifiquen la condición siguiente:

$$(6) \qquad \frac{B\, k_2}{h_0\, a_2 \sqrt{\pi}} < \operatorname{erf}(x_1) \ , \ a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho\, c_2}}$$

donde $x_1 > 0$ es el único cero positivo de la función real

$$(7) \qquad T_1(x) = \frac{h_0}{\rho\,(l + C\, c_1)} \exp(-x^2) - a_2\, x \ , \ x > 0 \, .$$

Además, en este caso, se tiene :

$$(8) \qquad k_1 = \rho\, c_1\, a_2{}^2 \left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \right)^2 , \qquad\qquad \sigma = a_1\, \xi_1 \ ,$$

donde

$$(9) \qquad \xi_2 = \operatorname{erf}^{-1} \left(\frac{B\, k_2}{h_0\, a_2 \sqrt{\pi}} \right)$$

y $\xi_1 > 0$ es la única solución de la ecuación :

$$(10) \qquad T_2(x) = \beta \ , \ x > 0$$

con

$$(11) \qquad T_2(x) = \sqrt{\pi}\, x \exp(x^2)\,(1 - \operatorname{erf}(x)) \ , \ x > 0$$

$$(12) \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{C\, c_1\, a_2\, \xi_2} \left(\frac{h_0}{\rho l} \exp(-\xi_2{}^2) - a_2\, \xi_2 \right).$$

(ii) La condición necesaria y suficiente para la determinación de los coeficientes k_2 y c_2 es que los coeficientes k_1, c_1, ρ, l, B, C, σ, $h_0 > 0$ verifiquen la condición

$$(13) \qquad \frac{\rho\, l\, \sigma}{h_0} + \frac{C\, k_1}{h_0\, a_1 \sqrt{\pi}} \, \frac{\exp(-\sigma^2/a^2{}_1)}{1 - \operatorname{erf}(\frac{\sigma}{a_1})} < 1 \ , \ a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho c_1}} \ .$$

Además, en este caso, se obtiene :

$$(14) \qquad k_2 = \frac{\sigma\, h_0 \sqrt{\pi}}{B} \, \frac{\operatorname{erf}(\xi_2)}{\xi_2} \ , \ c_2 = \frac{h_0 \sqrt{\pi}}{\rho\, \sigma\, B} \, \xi_2 \operatorname{erf}(\xi_2) \ ,$$

donde $\xi_2 > 0$ está dado por la expresión siguiente :

$$(15) \qquad \xi_2 = T_3 \left(\left(\frac{\rho\, l\, \sigma}{h_0} + \frac{C\, k_1}{h_0\, a_1 \sqrt{\pi}} \, \frac{\exp(-\sigma^2/a^2{}_1)}{1 - \operatorname{erf}(\frac{\sigma}{a_1})} \right)^{-1} \right)$$

con

(16) $$T_3(x) = \sqrt{\log x} \ , \ x > 1 \, .$$

(iii) La condición necesaria y suficiente para la determinación de los coeficientes k_1 y k_2 es que los coeficientes $c_1, c_2, \rho, l, B, C, \sigma, h_0 > 0$ verifiquen la condición

(17) $$\frac{h_0}{\rho\, \sigma\, (C\, c_1 + l)} > 1 \ , \qquad T_4\left(T_3\left(\frac{h_0}{\rho\, \sigma\, (C\, c_1 + l)}\right)\right) > \frac{\rho\, c_2\, B\, \sigma}{h_0\, \sqrt{\pi}}$$

donde

(18) $$T_4(x) = x \operatorname{erf}(x) \ , \ x > 0 \, .$$

Además, en este caso, se tiene :

(19) $$k_1 = \frac{\rho\, c_1\, \sigma^2}{\xi_1^{\,2}} \ , \qquad k_2 = \frac{\rho\, c_2\, \sigma^2}{\xi_2^{\,2}}$$

donde $\xi_2 > 0$ es la única solución de la ecuación :

(20) $$T_4(x) = \frac{\rho\, B\, \sigma\, c_2}{h_0\, \sqrt{\pi}} \ , \ x > 0 \ ,$$

y $\xi_1 > 0$ es la única solución de la ecuación :

(21) $$\frac{x \exp(-x^2)}{1 - \operatorname{erf}(x)} = \frac{\rho\, l\, \sigma^2\, \sqrt{\pi}}{C\, k_1} \left(\frac{h_0}{\rho\, l\, \sigma} \exp(-\xi^2{}_2) - 1 \right) \ , \ x > 0 \ .$$

La metodología general, para la aplicación de las fórmulas que explicitan a los coeficientes térmicos desconocidos, para materiales semi-infinitos, es la siguiente:

(i) Determinar experimentalmente los coeficientes H_0 (ó h_0) (coeficiente que caracteriza la pendiente de la temperatura o el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$), B (temperatura en el borde fijo $x = 0$) y en algunos casos el coeficiente σ (coeficiente que caracteriza la frontera de cambio de fase)

(ii) Verificar las restricciones con los datos experimentales y demás coeficientes térmicos conocidos, para que una cierta ecuación tenga una única solución.

(iii) Resolver numéricamente dicha ecuación que determinará un parámetro.

(iv) Aplicar las fórmulas que explicitan los coeficientes térmicos desconocidos en función de los datos experimentales, coeficientes térmicos conocidos, parámetro numérico obtenido en (iii) y de funciones reales elementales (por ejemplo: funciones de error y de error complementario, potenciales, exponenciales, logarítmicas, etc.).

NOMENCLATURA

k	:	conductividad térmica	c	:	calor específico
l	:	calor latente de fusión	s	:	posición del cambio de fase
Ste	:	número de Stefan	ρ	:	densidad de masa
t	:	tiempo	x	:	variable espacial
θ	:	temperatura	B	:	temperatura en el borde fijo $x = 0$
h_0	:	coeficiente que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x=0$			

H_0 : coeficiente que caracteriza la pendiente de la temperatura en el borde fijo $x=0$

σ : coeficiente que caracteriza la frontera libre $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$

$\alpha = a^2 = \frac{k}{\rho c}$: coeficiente de difusión, $\xi = \frac{\sigma}{a}$: coeficiente adimensional,

Sub-índices: $i=1$: fase sólida , $i=2$: fase líquida.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo se ha realizado a través del Proyecto de Investigación y Desarrollo "Problemas de Frontera Libre de la Física-Matemática" del CONICET, Rosario (Argentina).

REFERENCIAS

1. [ACH] J. ALBRECHT—L. COLLATZ—K.H. HOFFMANN (Eds.), "Numerical treatment of free boundary value problems", ISNM N°58, Birkhaeuser Verlag, Basel (1982).

2. [ArLaTa] J.C. ARDERIUS—M. LARA—D.A. TARZIA, "Determinación experimental-numérica de coeficientes térmicos a través de problemas tipo Stefan a una fase", Mecánica Computacional, Vol.8, MECOM'88, L.A. Godoy—F. Flores—C.A. Prato (Eds.), AMCA, Santa Fe (1990), 66—86. "Experimental-numerical determination of thermal coefficient through a phase-change process", To appear.

3. [BaCa] C. BAIOCCHI—A. CAPELO, "Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera", Vol. 1: Problemi variazionali, Vol. 2: Problemi quasivariazionali, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, N 4, 7, Pitagora Editrice, Bologna (1978).

4. [BaTa] A.B. BANCORA—D.A. TARZIA, "On the Neumann solution for the two-phase Stefan problem including the density jump at the free boundary", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 9 (1985), 215—222.

5. [Ba] S.G. BANKOFF, "Heat conduction of diffusion with change of phase", Advances in Chem. Eng., 5(1964), 75—150.

6. [BDF] A. BOSSAVIT—A. DAMLAMIAN—M. FREMOND (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Vol. III, IV, Research Notes in Math. N°120, 121, Pitman, London (1985).

7. [Br] M. BRILLOUIN, "Sur quelques problèmes non résolus de physique mathématique classique : propagation de la fusion", Annales de l'Inst. H. Poincaré, 1(1930/31), 285—308.

8. [Ca1] J.R. CANNON, "Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation", Duke Math. J., 30 (1963), 313—323.

9. [Ca2] J.R. CANNON, "Determination of certains parameters in heat conduction problems", J. Math. Anal. Appl., 8 (1964), 188—201.

10. [Ca3] J.R. CANNON, "The one-dimensional heat equation", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).

11. [CaJa] H.S. CARSLAW—J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", Clarendon Press, Oxford (1959).

12. [CaTa] H. CASTELLINI—D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos a través de modelos aproximados de cambio de fase", Reunión Anual Asociación Física Argentina, Tucumán, 7—10/10/1991.

13. [Cr1] J. CRANK, "The mathematics of diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).

14. [Cr2] J. CRANK, "Free and moving boundary problems", Clarendon Press, Oxford (1984).

15. [Da] I.I. DANILYUK, "On the Stefan problem", Russian Math. Surveys, 40(1985), 157–223.

16. [DeErTaVi] H.A. DESTEFANIS–E. ERDMANN–D.A. TARZIA–L.T. VILLA, "Estimation of the diffusion coefficient for a gas-solid system from experimental data carried out with a gravimetric technique using a free boundary model", To appear.

17. [Di] J.I. DIAZ, "Nonlinear partial differential equations and free boundaries", Vol. I : Elliptic equations, Research Notes in Math. N_0 106, Pitman, London (1985).

18. [Du] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N° 185, LABORIA – IRIA, Rocquencourt (1976).

19. [ElOc] C.M. ELLIOTT–J.R. OCKENDON, "Weak and variational methods for moving boundary problems", Research Notes in Math., N_0 59, Pitman, London (1982).

20. [Fa] A. FASANO, "Las zonas pastosas en el problema de Stefan", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", N° 13, Rosario (1987).

21. [FaPr] A. FASANO–M. PRIMICERIO (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Vol. I, II, Research Notes in Math. N°78, 79, Pitman, London (1983).

22. [Fre] M. FREMOND, "Diffusion problems with free boundaries", in Autumn Course on Applications of Analysis to Mechanics, ICTP, Trieste (1976).

23. [Fr] A. FRIEDMAN, "Partial differential equations of a parabolic type", Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1964).

24. [GaSaTa] G.G. GARGUICHEVICH–M.C. SANZIEL–D.A. TARZIA, "Comparison of approximate methods for the determination of thermal coefficients through a phase-change problems", Int. Comm. Heat Mass Transfer, 12 (1985), 451–464.

25. [GoTa] A.M. GONZALEZ–D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos a través de un modelo de zona pastosa a dos fases", Reunión Anual Unión Matemática Argentina, San Juan, 19–22/10/1988.

26. [HoNi] K.H. HOFFMANN–M. NIEZGODKA, "Control of parabolic systems involving free boundaries", Research Notes in Math. N°79, Pitman, London (1983), 431–462.

27. [HoSp] K.H. HOFFMANN–J. SPREKELS (Eds.), "Free boundary problems: Theory and applications", Research Notes in Math. No. 186, Pitman, London (1990).

28. [Jo1] B. F. JONES, Jr., "The determination of a coefficient in a parabolic differential equation, Part I : Existence and uniqueness", J. Math. Mech., 11 (1962), 907–918.

29. [Jo2] B. F. JONES, Jr., "Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equation", Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 33–44.

30. [KiSt] D. KINDERLEHRER–G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

31. [LSU] O.A. LADYZENSKAJA–V.A. SOLONNIKOV–N.N. URAL'CEVA, "Linear and quasilinear equations of parabolic type", Amer. Math. Soc., Providence (1968).

32. [LaCl] G. LAME–B.P. CLAPEYRON, "Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide", Annales Chimie Physique, 47(1831), 250–256.

33. [Li] J.L. LIONS, "Problèmes aux limites dans les équations aux derivées partielles", Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal (1976).

34. [Lu] V.J. LUNARDINI, "Heat transfer in cold climates", Van Nostrand, New York (1981).

35. [Ma] E. MAGENES (Ed.), "Free boundary problems", Vol. I, II, Istituto Nazionale di Alta

Matematica, Roma (1980).

36. [Me] A.M. MEIRMANOV, "Stefan problem", (in Russian), Nauka, Novosibirsk (1986).

37. [MaTa] G. MARTINEZ – D.A. TARZIA, "Un software para la determinación de coeficientes térmicos a través de un proceso con cambio de fase", Actas MECOM'91, Santa Fe – Paraná, 23 – 25/9/1991.

38. [NiPa] M. NIEZGODKA – I. PAWLOW (Eds.), "Recent advances in free boundary problems", Vol. 14, No. 1 – 3, p. 1 – 307, Control and Cybernetics, Warsaw (1985).

39. [OcHo] J.R. OCKENDON – W.R. HODGKINS (Eds.), "Moving boundary problems in heat flow and diffusion", Clarendon Press, Oxford (1975).

40. [Pr] M. PRIMICERIO, "Problemi di diffusione a frontiera libera", Bollettino Un. Mat. Italiana, 18A(1981), 11 – 68.

41. [PrGi] M. PRIMICERIO – R. GIANNI, "La filtración en medios porosos", CUADERNOS del Instituto de Matemática "Beppo Levi", N° 18, Rosario (1989).

42. [Ro] J.F. RODRIGUES, "Obstacle problems in mathematical physics", North – Holland Mathematics Studies N_0 134, North – Holland, Amsterdam (1987).

43. [Ru] L.I. RUBINSTEIN, "The Stefan problem", Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1971).

44. [SWA] A.D. SOLOMON – D.G. WILSON – V. ALEXIADES, "A mushy zone model with an exact solution", Letters Heat Mass Transfer, 9(1982), 319 – 324.

45. [StaTa] M.B. STAMPELLA – D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes desconocidos en el problema de Stefan a dos fases", SIGMA (Rev. Mat. Apl.), 8 (1982), 83 – 98. Ver también "Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem", Int. J. Eng. Science, 27(1989), 1407 – 1419.

46. [St] J. STEFAN, "Ueber dir Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere", Zitzungsberichte Kaisenlichen Akademie der Wissenschaften, Math. Classe, 98(1889), 965 – 983. Annalen der Physik und Chemie, 42(1891), 269 – 286.

47. [StoTa] C.O. STOICO – D.A. TARZIA, "Determinación de coeficientes térmicos en materiales semi-infinitos a través de un proceso con cambio de fase ", II Latin American Congress on Heat and Mass Transfer, San Pablo (Brazil), 12 – 15 May 1986, Vol. 2, 348 – 356.

48. [Tay] A.B. TAYLER, "Mathematical models in applied mechanics", Clarendon Press, Oxford (1963).

49. [Ta1] D.A. TARZIA, "Una revisión sobre problemas de frontera móvil y libre para la ecuación del calor. El problema de Stefan", Math. Notae, 29 (1981 – 1982), 147 – 241. Ver también, "A bibliography on moving-free boundary problems for the heat diffusion equation. The Stefan problem", Progetto Nazionale M.P.I. : Equazioni di Evoluzione e Applicazioni Fisico- Matematiche", Firenze (1988) (con 2528 referencias).

50. [Ta2] D.A. TARZIA, "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t)=2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math., 39 (1981 – 1982), 491 – 497. Ver también "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28 (1980 – 1981), 73 – 89.

51. [Ta3] D.A. TARZIA, "Determination of the unknown coefficients in the Lamé-Clapeyron problem (or one-phase Stefan problem)", Adv. Appl. Math., 3 (1982), 74 – 82.

52. [Ta4] D.A. TARZIA, "Simultaneous determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem with an overspecified condition on the fixed face", Int. J. Heat Mass Transfer, 26 (1983), 1151 – 1158.

53. [Ta5] D.A. TARZIA, "A new variant for the simultaneous calculation of some thermal coefficients of a semi-infinite material through a phase-change problem with an over-condition on the fixed face", Latin Amer. J. Heat Mass Transfer, 8 (1984), 227 – 235.

54. [Ta6] D.A. TARZIA, "An analysis of a bibliography on moving and free boundary problems for the heat equation. Some results for the one dimensional Stefan problem using the Lamé-Clapeyron and Neumann solutions", Free Boundary Problems: Applications and Theory, Vol. III, A. Bossavit – A. Damlamian – M. Frémond (Eds.), Research Notes in Mathematics No. 120, Pitman, London (1985), 84 – 102.

55. [Ta7] D.A. TARZIA, "Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lamé-Clapeyron (Stefan) problem through the Solomon-Wilson-Alexiades mushy zone model", Int. Comm. Heat. Mass Transfer, 14 (1987), 219 – 228.

56. [Ta8] D.A. TARZIA, "Sobre una nueva variante para el cálculo simultáneo de algunos coeficientes térmicos desconocidos de un material semi-infinito", III Latin American Congress on Heat and Mass Transfer, Guanajuato (México), July 4 – 7, 1988, 505 – 518.

57. [Ta9] D.A. TARZIA, "Neumann-like solution for the two-phase Stefan problem with a simple mushy zone model", Mat. Aplic. Comp. , 9(1990), 201 – 211.

58. [We] H. WEBER, "Die partiellen Differential-gleinchungen der Mathematischen Physik, nach Riemanns Vorlesungen", t. II, Braunwschweig (1901), 118 – 122.

59. [WSB] D.G. WILSON – A.D. SOLOMON – P.T. BOGGS (Eds.), "Moving boundary problems", Academic Press, New York (1978).