

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS EM  
CONCRETO E ARGAMASSA ARMADA PELO EMPREGO DE UM MODELO DE DANO**

**Sergio P. Baroncini Proença**  
Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos,  
Av. Dr. Carlos Botelho, 1465, 13560-São Carlos, SP, Brasil

**RESUMO**

Este trabalho apresenta um estudo preliminar sobre a resposta de um modelo constitutivo a dano, do tipo isotrópico, na análise do comportamento não linear de elementos estruturais (vigas e placas) em concreto e argamassa armada. Os resultados obtidos comprovam a boa performance do modelo empregado e asseguram uma continuidade para os estudos aqui iniciados.

**ABSTRACT**

This work introduces a preliminary study about the response of a isotropic damage constitutive model applied to the analysis of the non-linear behavior of reinforced concrete and ferrocement structural elements (beams and plates). The results obtained show a good performance of the model used and ensure the continuity of the study here started.

## INTRODUÇÃO

Os modelos constitutivos formulados pela aplicação dos conceitos da mecânica do dano, permitem considerar as perdas de rigidez e resistência, observadas em diferentes materiais, como resultado do processo evolutivo de microfissuração.

O efeito da microfissuração sobre o módulo elástico inicial, por exemplo, pode ser evidenciado, macroscopicamente, ao longo do ramo de amolecimento, "softening", da curva tensão-deformação. De fato, se num determinado instante da história de carregamento, correspondente a um certo ponto do ramo descendente, inverte-se o sentido da deformação incremental, resulta um descarregamento segundo uma direção de inclinação inferior àquela definida pela rigidez tangente inicial.

Ao longo dos últimos anos, tem sido formulados diversos modelos que podem ser classificados como escalares [1,2] ou anisótropos [3], de acordo com o caráter escalar ou tensorial, respectivamente, da variável local representativa do dano. No primeiro caso, admite-se que o degrado do material se dá de modo tal a manter inalterada a suposta isotropia inicial; já nos modelos anisótropos se hipotiza que o processo de microfissuração conduz a uma anisotropia do material.

Neste trabalho, apresentam-se alguns resultados obtidos pela aplicação do modelo de dano escalar de Mazars, em sua versão para carregamento monótono crescente, a elementos estruturais em concreto armado e argamassa armada, como vigas e placas. A partir da análise dos resultados obtidos com a aplicação do método dos elementos finitos, um breve comentário é feito sobre as potencialidades do modelo em questão.

### ASPECTOS GERAIS DA MECÂNICA DO DANO. MODELO CONSTITUTIVO DE MAZARS.

A mecânica do dano ("Continuous Damage Mechanics") [4], [5] e [6], pretende descrever a evolução dos fenômenos de perda de resistência e rigidez que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, correspondente à ruptura do elemento de volume. Para tanto, fundamenta-se nos princípios, e métodos, da mecânica dos meios contínuos e da termodinâmica dos processos irreversíveis.

O dano não é uma grandeza física mensurável diretamente mas, para fins de modelagem matemática, é possível relacioná-lo com a redução progressiva de características mecânicas globais como, por exemplo, o módulo de elasticidade. Assim sendo, uma variável interna representativa do estado de deterioração do material é definida de modo a permitir quantificar e distinguir, macroscopicamente, um elemento de volume deteriorado de um outro íntegro.

O modelo constitutivo proposto por J.Mazars [1], para o caso de carregamento monótono crescente, admite o seguinte conjunto de hipóteses:

- o concreto em processo de dano evolutivo apresenta um comportamento elástico, sendo desprezadas deformações permanentes evidenciadas numa situação de descarregamento
- localmente o dano é causado pela presença de extensões, ao menos ao longo de uma das direções principais de deformação
- o dano é representado por uma variável escalar (D), cuja evolução ocorre quando é superado um certo valor de referência.

O estado de alongamento do material é caracterizado pela deformação equivalente  $\tilde{\epsilon}$ , definida por:

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2} \quad (1)$$

onde  $\epsilon_1$  é a deformação principal na direção 1 e

$$\langle \epsilon_1 \rangle_+ = \frac{1}{2}[\epsilon_1 + |\epsilon_1|] \quad (2)$$

Segundo o critério adotado, o processo de dano inicia quando  $\tilde{\epsilon}$  atinge um valor inicial convencionalizado igual à deformação  $\epsilon_{do}$ , correspondente ao esforço máximo em uma prova de tração monoaxial. Para um estado geral de dano D, o critério que determina sua evolução é expresso por:

$$f(\tilde{\epsilon}, D) = \tilde{\epsilon} - S(D) = 0, \text{ com } S(0) = \epsilon_{do}$$

Por outro lado, a lei de evolução da variável D é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= 0 \text{ se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \\ \dot{D} &= F(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \end{aligned} \quad (3a,b)$$

onde  $F(\tilde{\epsilon})$  é uma função contínua e positiva da deformação equivalente  $\tilde{\epsilon}$  (de modo que  $\dot{D} \geq 0 \forall \tilde{\epsilon}$ ) e  $(\dot{\phantom{x}}) = \partial(\phantom{x})/\partial t$ .

Nos casos particulares de tração e compressão monoaxial, a (3b) vem a ser expressa, respectivamente, por:

$$\dot{D}_T = F_T(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+, \quad \dot{D}_c = F_c(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ \quad (4a,b)$$

No caso de solicitação monótona crescente as (4) são integráveis, sendo possível exprimir  $D_T$  e  $D_c$  em forma explícita:

$$D_T(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do}(1-A_T)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\tilde{\epsilon}-\epsilon_{do})]} \quad (5a)$$

$$D_c(\tilde{\epsilon}) = 1 - \frac{\epsilon_{do}(1-A_c)}{\tilde{\epsilon}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\tilde{\epsilon}-\epsilon_{do})]} \quad (5b)$$

onde  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_c$  e  $B_c$  são parâmetros do material a serem identificados com base em resultados de ensaios monoaxiais de tração e compressão.

No caso de estado de esforço pluriaxial num ponto, Mazars propõe para D a seguinte definição:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_c D_c \quad (6)$$

sendo que os coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_c$  assumem valores entre 0 e 1 e são tais que  $\alpha_T + \alpha_c = 1$ .

As expressões propostas para os dois coeficientes são:

$$\alpha_T = \sum_i H_i \frac{\epsilon_{T_i} (\epsilon_{T_i} + \epsilon_{c_i})}{\tilde{\epsilon}^2} \quad \alpha_c = \sum_i H_i \frac{\epsilon_{c_i} (\epsilon_{T_i} + \epsilon_{c_i})}{\tilde{\epsilon}^2} \quad (7a,b)$$

onde  $H_i(\epsilon_i)$  é a função degrau de Heaviside tal que:

$$H_i = 1 \text{ se } \epsilon_i = \epsilon_{T_i} + \epsilon_{c_i} > 0$$

$$H_i = 0 \text{ se } \epsilon_i < 0 \quad (8)$$

e  $\epsilon_{T_i}$  e  $\epsilon_{c_i}$  são, respectivamente, as componentes dos tensores  $\epsilon_c$  e  $\epsilon_T$  definidos por:

$$\epsilon_T = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \langle \sigma \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \langle \Sigma_i \sigma_i \rangle_+ I \quad (9.a)$$

$$\epsilon_c = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \langle \sigma \rangle_- - \frac{\nu}{E} \langle \Sigma_i \sigma_i \rangle_- I \quad (9.b)$$

Nas (9),  $I$  representa o tensor identidade de segunda ordem e  $\sigma$  é o tensor de tensões elásticas fictício obtido, a cada passo de carga, a partir da consideração de comportamento íntegro, sem dano, do material.

Finalmente, a lei constitutiva ( $\sigma$ - $\epsilon$ ), em sua forma integral, válida na hipótese de carregamento monótono crescente é expressa por:

$$\sigma = D_0(1-D)\epsilon \quad (10)$$

com

$$D = 0 \text{ se } f = \tilde{\epsilon} - \epsilon_{do} < 0$$

$$D \neq 0 \text{ se } f = \tilde{\epsilon} - \epsilon_{do} > 0 \quad (11.a,b)$$

Na (10)  $D_0$  é o tensor de rigidez elástico inicial.

A figura 1 ilustra a resposta dada pelo modelo para as situações de tração e compressão monoaxial.

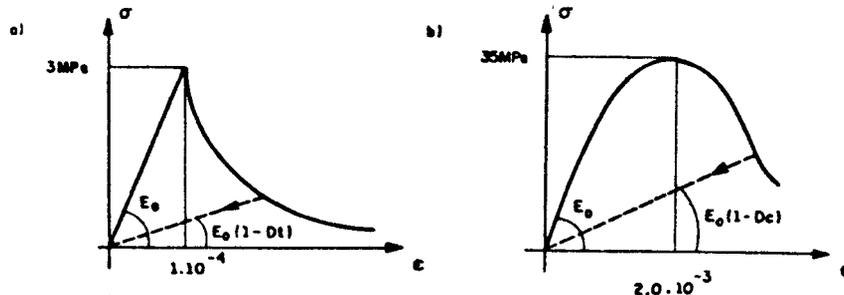


Figura 1 - Resposta do Modelo: a) tração monoaxial  
b) compressão monoaxial

#### BREVE COMENTÁRIO SOBRE O EMPREGO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O modelo de Mazars foi implementado em um código de cálculo de elementos finitos isoparamétricos tridimensionais ditos degenerados, [6], [7], com oito ou nove nós e cinco graus de liberdade por nó. Estes elementos são indicados para a análise de estruturas delgadas, como placas e cascas, nas quais são razoáveis as hipóteses cinemáticas adotadas no processo de degeneração.

Além disso, o elemento adotado apresenta a particularidade de executar as integrações numéricas próprias da transformação do MEF mediante o modelo a estratos ("layered model"), que consiste em discretizar o elemento em faixas ao longo da espessura. Esta técnica, vantajosa no caso de materiais compostos com o concreto tem, por outro lado, no caso particular do modelo constitutivo em questão, a desvantagem de não permitir a adequada consideração do efeito dos esforços tangenciais transversais sobre a distribuição de dano.

A resolução do sistema não linear resultante da aplicação do modelo foi desenvolvida segundo um procedimento incremental iterativo do tipo Newton secante, com atualização da matriz de rigidez secante da estrutura a cada iteração.

#### APLICAÇÕES A ELEMENTOS ESTRUTURAIS EM CONCRETO ARMADO E ARGAMASSA ARMADA

Neste item são comentadas algumas aplicações do modelo constitutivo a dano de Mazars. É importante ressaltar que a experimentação numérica realizada não foi exaustiva e teve como principal objetivo verificar a performance do modelo quando associado ao tipo de elemento finito e discretização escolhidos. Desse modo algumas simplificações foram adotadas, como o comportamento elástico linear para o aço e a perfeita aderência ao concreto. Além disso, a possível dependência dos resultados sobre a malha de elementos empregada foi eliminada pelo confronto com resultados experimentais conhecidos.

##### Viga em Concreto Armado

A viga, proposta em [8], de seção retangular, é apoiada nas extremidades e solicitada por duas forças concentradas dispostas simetricamente com relação ao meio do vão, v. figura 2.

O concreto apresenta as seguintes características:

- módulo de elasticidade  $E = 24700 \text{ MPa}$
- coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$
- parâmetros do modelo  $A_T = 0,995$  ;  $B_T = 8000$   
 $A_c = 1,13$  ;  $B_c = 1643,5$ ;  $c_{de} = 0,000067$

Para o aço, adotou-se  $E = 210000 \text{ MPa}$ .

A viga foi discretizada com uma malha constituída por 19 elementos isoparamétricos de 8 nós, sendo que ao longo da altura foram definidos oito estratos de concreto. A armadura foi idealizada com um estrato de área equivalente disposto na altura do centro geométrico da real disposição.

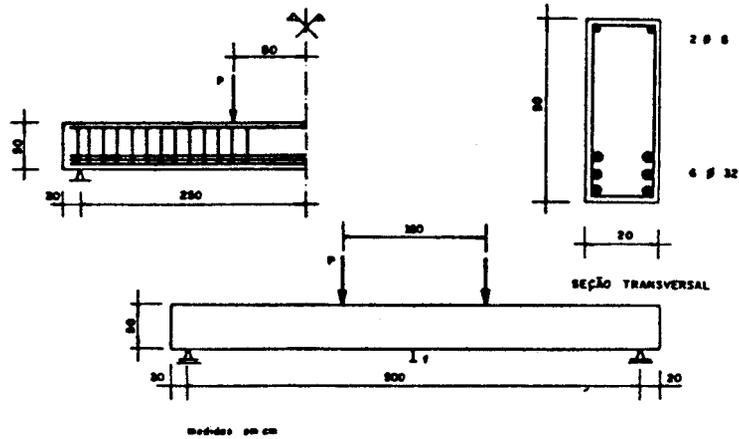


Figura 2 - Viga em Concreto Armado

A resposta obtida, em termos de curva carga-deslocamento, está ilustrada na figura 3a. Observa-se a boa concordância com os dados experimentais, notando-se, a propósito, que estes resultaram de uma prova executada com controle de carregamento, enquanto que na análise numérica considerou-se imposição de deslocamentos.

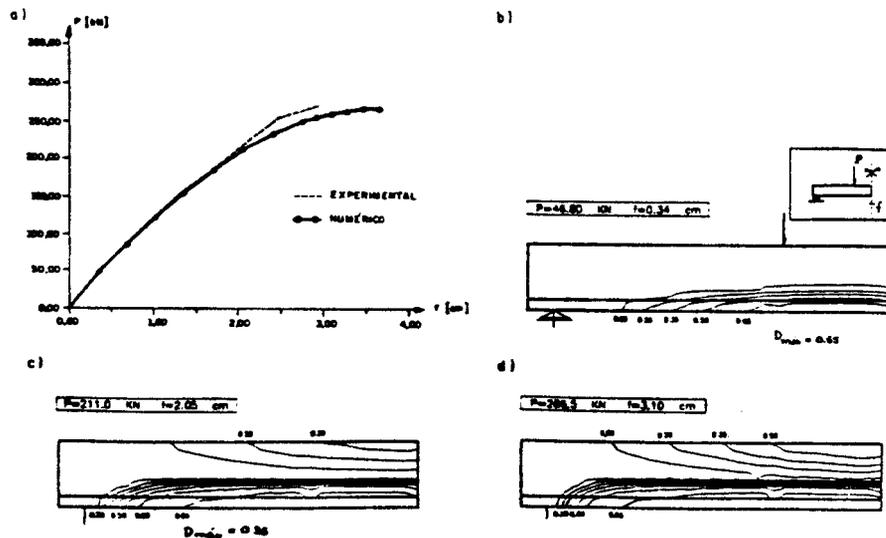


Figura 3 - Resposta Obtida a) curva carga deslocamento  
b) e d) curvas de isodano

Para a avaliação da distribuição do dano ao longo da altura do elemento estrutural foram representadas curvas de igual valor de dano, determinadas por interpolação a partir dos valores da variável  $D$  nos pontos de integração numérica de cada elemento. Na figura 3b,c) são mostradas, também, as curvas de isodano para duas etapas de carregamento

#### Placa em Concreto Armado

A placa é quadrada, totalmente apoiada no contorno e submetida a uma carga concentrada aplicada no centro geométrico. As armaduras superior e inferior são distribuídas segundo um diferente percentual nas direções  $x$  e  $y$  (v.fig.4). O concreto apresenta as seguintes propriedades de interesse para o estudo:

- módulo de elasticidade  $E = 16400$  MPa
- coeficiente de Poisson  $\nu = 0,0$
- parâmetros do modelo  $A_T = 0,7$  ;  $B_T = 12000,0$   
 $A_c = 1,0$  ;  $B_c = 1000,0$  ;  $\epsilon_{do} = 0,00018$

Para o aço adotou-se  $E = 210000$  MPa.

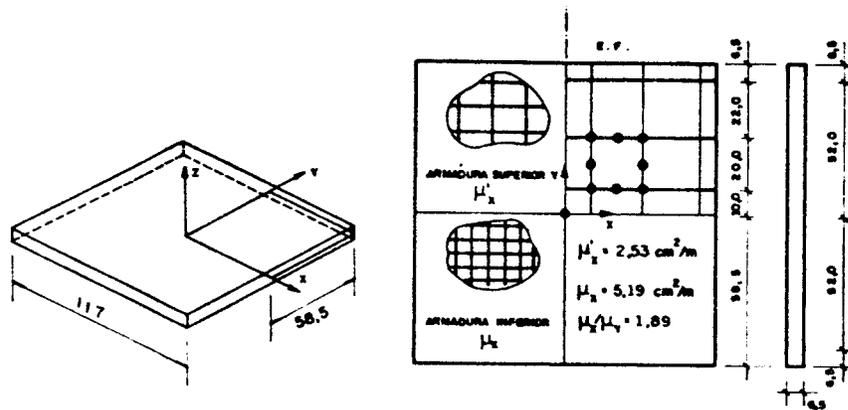


Figura 4 - Placa em Concreto Armado

Na discretização de um quarto da placa foram definidos 16 elementos finitos de 8 nós, sendo a espessura subdividida em oito estratos de concreto aos quais foram superpostos dois outros de área equivalente à armadura real.

Como neste caso não eram disponíveis os parâmetros característicos do modelo de dano ( $A_T$  ,  $B_T$  ,  $A_c$  e  $B_c$ ) foram adotados valores médios para o concreto. Devido a incerteza sobre os parâmetros utilizados, optou-se, neste caso, por uma análise qualitativa, verificando-se a potencialidade do modelo quanto à distribuição do dano no confronto com o mecanismo de colapso previsto, por exemplo, pela teoria das charneiras plásticas (figura 5a).

Como se observa, da figura 5b, a distribuição de dano no estrato inferior evidencia uma tendência da zona de alteração das propriedades do material em dispor-se ao longo das diagonais já numa fase inicial da história de carregamento. Na figura 5c, apresenta-se o quadro de fissuras típico de uma placa em concreto armado, vinculada e solicitada em modo análogo àquela analisada.

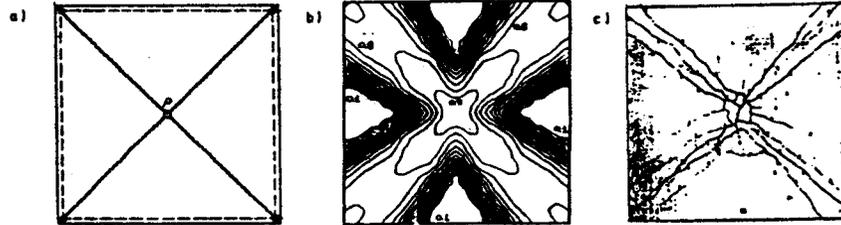


Figura 5 - a) distribuição teórica de charneiras  
b) curvas de isodano c) distribuição de fissuras

#### Viga em Argamassa Armada

A viga considerada segue um esquema estrutural idêntico àquela descrito para a viga em concreto armado, (v.figura 6a). A característica principal apresentada pela viga é a presença de armaduras de tela. As propriedades físicas de interesse para a simulação numérica são:

- módulo de elasticidade da argamassa  $E = 36000$  MPa
- coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$
- modelo de elasticidade das telas e da armadura complementar  
 $E = 210000$  MPa
- parâmetros do modelo  $A_T = 0,995$  ;  $B_T = 5000,0$  ;  $A_c = 1,0$  ;  $B_c = 2000$

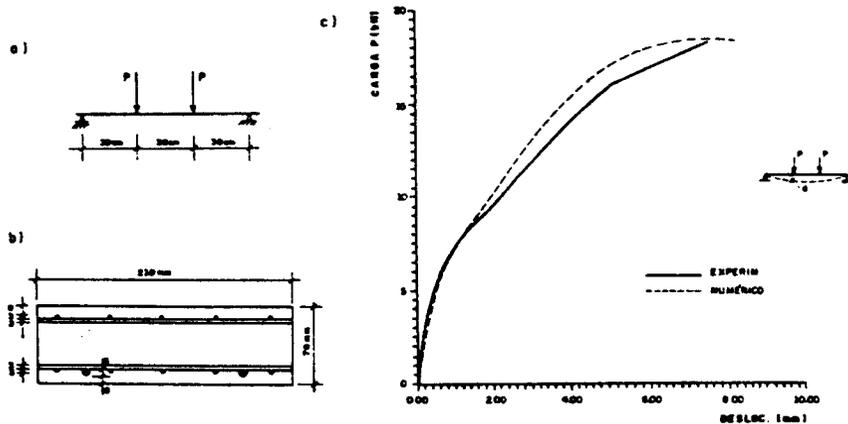


Figura 6 - a) esquema estático  
b) distribuição de armaduras  
c) diagramas carga-deslocamentos

A figura 6b, ilustra a disposição das armaduras ao longo da seção transversal.

A peça foi discretizada com 2 elementos finitos isoparamétricos de oito nós, sendo a seção transversal formada por 9 estratos de argamassa aos quais foram superpostos três estratos de aço.

Novamente, neste caso, os resultados experimentais de caracterização do material não foram suficientes para uma adequada calibragem do modelo. Assim sendo, o objetivo da análise realizada foi o de avaliar a possibilidade de estender o emprego de modelos constitutivos a dano ao estudos de estruturas em argamassa armada. Do confronto com os resultados experimentais disponíveis, (v.figura 6c), observa-se a boa performance do modelo, mesmo em se considerando que os parâmetros adotados são aproximados e que a discretização foi realizada com um número muito pequeno de elementos.

#### CONCLUSÕES

Os resultados obtidos pela experimentação numérica, além de evidenciar a boa performance do modelo permitem preconizar possíveis desenvolvimentos futuros.

No que se refere ao estudo das estruturas em concreto armado, verifica-se que a análise com modelo constitutivo a dano constitui uma válida alternativa para as formulações elastoplásticas usuais, [9], [10], por exemplo. Entretanto, no sentido de melhor reproduzir a realidade física, é indispensável considerar os fenômenos de interação entre concreto e armadura (como a perda de aderência e plastificação da armadura). Além disso, é importante ressaltar que o modelo, na forma automatizada, não concende de reproduzir o efetivo comportamento do concreto em presença de fenômenos de localização de deformações e de formação de microfissuras.

Quanto à argamassa armada, comentários similares àqueles relacionados ao concreto continuam válidos, podendo-se acreditar, também, que uma rigorosa caracterização do material e consequente calibragem do modelo venham a possibilitar análises quantitativas bastante realistas.

#### REFERÊNCIAS

1. Mazars, J. "Application de la Mecanique de L'Endommagement au Comportement non Lineaire et a la Rupture du Béton de Structre" Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 6, 1984.
2. Resende, L. "Constitutive Modelling and Finite Element Analysis in Geomechanics" PhD Thesis, University of Cape Town, Sept. 1984.
3. Ladeveze, P. "Sur une Theorie de L'Endommagement Anisotrope" Rapport interne n.34, Laboratoire de Mechanique et Technologie, Cachan, France, 1987.
4. Lemaitre, J.; Chaboche, J.C. "Mecanique des Matériaux Solides" Dunod-Bordas Ed. Paris France, 1985.
5. Krajcinovic, D. ; Fonseka, G.U. "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials" J. of Applied Mechanics, Vol. 48, pp. 809-815, 1981.
6. Lemaitre, J. "How to use Damage Mechanics?" Nucl. Eng. Des., vol. 80, pp. 233-245, 1984.

7. Hinton, E.; Owen, D.R.J. "Finite Element Software for Plates and Shells", Pineridge Press, 1984.
8. Mazars, J. "Nouveaux Concepts Dans la Modélisation du Comportement du Béton Composite. Application au Calcul des Structures" Annales de l'ITBTP, no. 461, série béton 252, janvier, 1988.
9. Proença, S.P.B. "Aplicação de um Modelo Matemático para Análise Não-Linear de Estruturas em Argamassa Armada", X MECON, Sept. 1989, Porto-Portugal.
10. Perego, M. "Danneggiamento Dei Materiali Lapideti: Leggi Constitutive, Analysis per Elementi Finiti ed Applicazioni", Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, DIS, anno accademico, 1989-1990.

#### AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e a FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).