

ANÁLISE DE ESCOAMENTOS EM DUTOS  
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Donir Ribeiro Costa e João Batista Aparecido  
Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia  
UNESP, CP 31. 15378 Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

RESUMO

Analisa-se o escoamento laminar de fluidos viscosos, newtonianos e incompressíveis em dutos retilíneos de seção transversal arbitrária, utilizando o método dos elementos finitos. Para tal, apresenta-se a formulação variacional da equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem. Este formalismo é discretizado utilizando elementos triangulares com três pontos nodais. Obtém-se a distribuição de velocidade, a velocidade média, o valor da velocidade máxima, a queda de pressão ao longo do duto e o comprimento de entrada hidrodinâmica.

ABSTRACT

Solutions are shown for the laminar incompressible newtonian viscous fluid flow in straight ducts of arbitrary cross section using the finite element method. The mathematical model for this problem is given by an elliptic second order partial differential equation. Triangular elements with three nodal points are utilized to perform the discretization. Velocity, average velocity, maximum velocity, pressure drop and hydrodynamic entry length are calculated.

INTRODUÇÃO

O escoamento laminar desenvolvido de fluidos newtonianos incompressíveis no interior de dutos retilíneos de seção transversal das mais variadas formas tem sido objeto de investigação. Shah e London [1] fizeram uma compilação abrangente destes trabalhos realizados. Nestas pesquisas têm sido utilizados os mais variados métodos, tais como: diferenças finitas, elementos finitos, mínimos quadrados, transformações conformes, separação de variáveis, entre outros. Nos últimos anos, Aparecido [2], Aparecido e Cotta [3,4], Aparecido, Cotta e Özişik [5] utilizaram a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TIIG) para resolver escoamentos desta natureza em dutos de seção transversal triangular, hexagonal, e trapezoidal. O modelamento matemático deste tipo de escoamento é semelhante àqueles que ocorrem em outros fenômenos físicos, tais como: Transferência de Calor, Difusão de Gases, Escoamento em Meio Poroso, Magnetostática, Torsão, Lubrificação e muitos outros. Este modelamento é efetuado utilizando equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem não homogêneas e com coeficientes variáveis. Recentemente, Costa e Aparecido [6] desenvolveram uma solução para esta classe de equações, usando o método dos elementos finitos. Neste trabalho aplicamos estas idéias na análise específica dos escoamentos acima referidos.

### FORMULAÇÃO DIFERENCIAL

O modelamento matemático de um escoamento do tipo acima referido é obtido através da adequada simplificação das equações de Navier-Stokes e resulta na seguinte equação:

$$-\nabla \cdot [\nabla u(x,y)] = C \quad , \quad (x,y) \in A. \quad (01)$$

As condições de contorno mais frequentes, neste tipo de escoamento, são as de não escorregamento e a de simetria. A primeira implica que nas paredes do duto a velocidade do fluido é igual à da respectiva parede, a segunda que o fluxo de quantidade de movimento é nulo nas regiões de simetria, deste modo

$$u(x,y) = u_p \quad , \quad (x,y) \in S_p; \quad (02)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = 0 \quad , \quad (x,y) \in S_q. \quad (03)$$

Nas eqs.(1-3),  $u(x,y)$  é a distribuição de velocidade,  $u_p$  a velocidade na parede,  $C$  é uma constante igual à taxa de queda de pressão ao longo do duto.  $S_p$  é a região do contorno definida por paredes,  $S_q$  é a região de simetria do escoamento, e  $n$  é um versor normal à  $S_q$ . Na Figura 1 mostra-se a geometria do domínio bidimensional múltiplamente conexo  $A$ , bem como os contornos  $S_p$  e  $S_q$  com as respectivas condições de contorno.

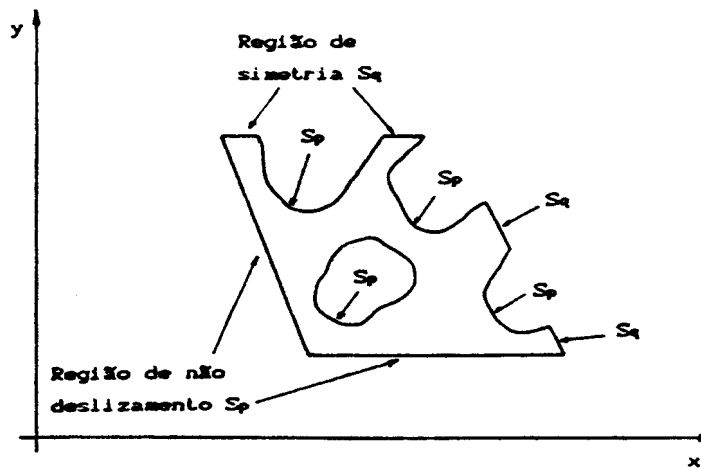


Figura.1 - Geometria do domínio bidimensional

### FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Utilizando a teoria do Cálculo Variacional contida em Vainberg [7] encontra-se o funcional correspondente às eqs.(1-3) que é o seguinte:

$$J[u(x,y)] = \frac{1}{2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right)^2 - 2 C u(x,y) \right] dx dy. \quad (04)$$

Dividindo-se o domínio A em E sub-domínios, e considerando que os operadores integral e somatório são lineares, a eq.(04) torna-se

$$J[u(x,y)] = \sum_{e=1}^E J^e[u(x,y)], \quad (05)$$

sendo

$$J^e[u(x,y)] = \frac{1}{2} \int_{A^e} \left[ \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right)^2 - 2 C u(x,y) \right] dx dy. \quad (06)$$

### ELEMENTOS FINITOS

A divisão do domínio A em uma quantidade finita de sub-domínios também finitos, de agora em diante designados por elementos finitos, possibilita o arbitrio de uma função aproximação,  $U(x,y)$ , no interior dos elementos, restando como incógnita os valores assumidos numa quantidade finita de pontos bem definidos, geralmente designados por nós. Neste trabalho os elementos têm a forma de triângulos, sendo que cada um possui três nós, um em cada vértice, conforme a Figura 2.

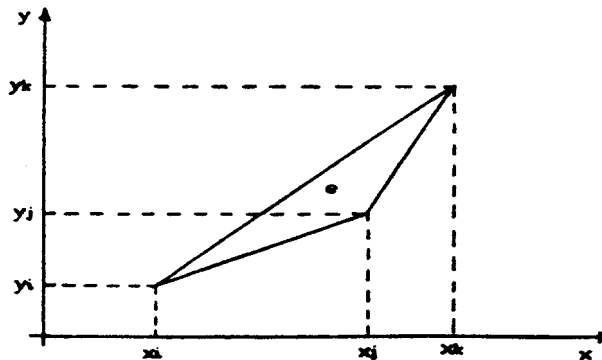


Figura.2 - Forma dos elementos finitos utilizados

Utilizando os conceitos do Método dos Elementos Finitos contidos em Costa e Aparecido [6], Myers [8], Zienkiewicz e Taylor [9], arbitra-se uma função aproximação linear em relação às variáveis  $x$  e  $y$ ,  $U^e = U^e(x,y)$ , dentro do elemento, da seguinte forma

$$U^e = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad (07)$$

Aplicando a eq.(07) aos nós  $i,j,k$  de um dado elemento obtém-se um sistema algébrico com três equações e três incógnitas, possibilitando relacionar as constantes  $C_1, C_2, C_3$  com os valores da função aproximação nos nós. Após alguns algebrismos obtém-se:

$$U^e = F^T R^e U^e \quad (08)$$

onde

$$F^T = [1 \ x \ y] \quad (09)$$

$$R^e = \frac{\begin{bmatrix} (x_j y_k - x_k y_j) & (x_k y_i - x_i y_k) & (x_i y_j - x_j y_i) \\ -(y_k - y_j) & (y_k - y_i) & -(y_j - y_i) \\ (x_k - x_j) & -(x_k - x_i) & (x_j - x_i) \end{bmatrix}}{[(x_j - x_i)(y_k - y_j) - (x_k - x_j)(y_j - y_i)]} \quad (10)$$

$$U^e = [U_i^e \ U_j^e \ U_k^e]^T \quad (11)$$

Substituindo a eq.(08) na eq.(06), e esta na eq.(05), efetuando as integrações, percebe-se que  $J[U(x,y)]$  pode ser enfocada como uma função de várias variáveis, cujos argumentos são os valores da função aproximação nos nós. Pelas mesmas razões que  $u(x,y)$  é um extremante do funcional,  $J[u(x,y)]$ , definido na eq.(04),  $U = [U_1, U_2, \dots, U_N]^T$  ( $N$  é o número total de nós) é um extremante de  $J[U(x,y)]$ . Para encontrar o ponto crítico de um funcional é necessário satisfazer a condição

$$\delta J[u(x,y)] = 0 \quad (12)$$

e para a função de várias variáveis é necessário que

$$\frac{\partial J[U(x,y)]}{\partial U_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

A eq.(13) representa, na forma escalar, um sistema linear algébrico com  $N$  equações e  $N$  incógnitas cuja representação na forma matricial é:

$$K U = B \quad (14)$$

onde  $K$  é a matriz dos coeficientes,  $U$  é o vetor incógnita cujas componentes são os valores da função aproximação nos nós, e  $B$  é o vetor termo independente. Na composição da matriz  $K$  e do vetor  $B$ , estão influências da forma da equação diferencial parcial, da forma do domínio, da forma dos elementos finitos, e das condições de contorno. A solução da eq.(14) é

$$U = K^{-1}B. \quad (15)$$

Para a montagem das matrizes  $K$  e  $B$  considere-se o que segue:

$$K = \sum_{e=1}^E D^e K^e D^{eT}. \quad (16)$$

$$B = \sum_{e=1}^E f^e B^e. \quad (17)$$

sendo

$$A^e = \frac{1}{2} |x_{ij}x_{jk} - x_{jk}y_{ij}|, \quad (x_{mn} = x_n - x_m); \quad (18)$$

$$K^e = \frac{A^e}{[x_{ij}y_{jk} - x_{jk}y_{ij}]^2} \begin{bmatrix} x_{jk}^2 + y_{jk}^2 & -(x_{ik}x_{jk} + y_{ik}y_{jk}) & x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk} \\ & x_{ik}^2 + y_{ik}^2 & -(x_{ij}x_{jk} + y_{ij}y_{jk}) \\ \text{simétrica} & & x_{ij}^2 + y_{ij}^2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

$$D^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{--- } i\text{ésima linha} \\ \text{--- } j\text{ésima linha} \\ \text{--- } k\text{ésima linha} \end{array}. \quad (20)$$

$$B^e = \frac{C}{3} A^e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

### GRANDEZAS DE INTERESSE

Tendo obtido os valores da função aproximação nos pontos nodais, de acordo com a metodologia descrita anteriormente, é de interesse em problemas de engenharia o cálculo da média das seguintes grandezas:  $U(x,y)$ ,  $[U(x,y)]^2$  e  $[U(x,y)]^3$ .

Cálculo do valor médio de  $U(x,y)$ .

A média para cada elemento é obtida pela seguinte fórmula:

$$\bar{U}^e = \frac{1}{A^e} \int_{A^e} U^e dA . \quad (22)$$

Fazendo-se a somatória para todos os elementos resulta:

$$\bar{U} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^E \int_{A^e} U^e dA . \quad (23)$$

Substituindo-se a eq.(22) na eq.(23), transpondo as matrizes e retirando  $U^e$  e  $R^e$  para fora da integral, porque são independentes de  $x$  e  $y$ , resulta:

$$\int_{A^e} U^e dA = U^{eT} R^{eT} \int_{A^e} P dA = U^{eT} R^{eT} \int_{A^e} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} dA . \quad (24)$$

Integrando termo a termo a matriz, chega-se à:

$$\int_{A^e} U^e dA = A^e U^{eT} R^{eT} \begin{bmatrix} 1 \\ X_c \\ Y_c \end{bmatrix} . \quad (25)$$

Substituindo-se a eq.(25) na eq.(23), obtém-se o valor médio de  $U(x,y)$ .

Cálculo do valor médio de  $[U(x,y)]^2$ .

Analogamente ao caso anterior a média escreve-se da seguinte maneira:

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^E \int_{A^e} U^{e2} dA . \quad (26)$$

Após alguns algebrismos, tal como no caso anterior, a integral na eq.(26) torna-se:

$$\int_{A^0} U^{p2} dA = U^{pT} K^{pT} \int_{A^0} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} dA K^p U^p . \quad (27)$$

Efetua-se a integral dos elementos da matriz, na eq.(27), e substituindo o resultado na eq.(26) tem-se o valor médio de  $[U(x,y)]^2$ .

Cálculo do valor médio de  $[U(x,y)]^2$ .

Como nos casos anteriores a média escreve-se da seguinte maneira:

$$\bar{U} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \int_{A^0} U^{p2} dA . \quad (28)$$

Após alguns algebrismos, tal como nos casos anteriores, a integral na eq.(28) torna-se:

$$\int_{A^0} U^{p2} dA = Z^T \int_A \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & x^2 & xy \\ x^2 & x^3 & x^2 y \\ xy & x^2 y & xy^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & yx & y^2 \\ xy & x^2 y & xy^2 \\ y^2 & xy^2 & y^3 \end{bmatrix} \right\} dA Z . \quad (29)$$

onde  $Z = [K^p U^p]$ .

Efetua-se a integral dos elementos da matriz, na eq.(29), e substituindo o resultado na eq.(28) tem-se o valor médio de  $[U(x,y)]^2$ .

Determinação das integrais

Para efetuar as integrais nas eqs.(24, 27 e 28) procedeu-se de acordo com Chung [10], definindo  $I = \int_A x^r y^s dA$  e  $n = r + s$ , tem-se:

$n = 1$	$I = 0 .$
$n = 2$	$I = \frac{A}{12} [X_1^2 Y_1^2 + X_2^2 Y_2^2 + X_3^2 Y_3^2] .$
$n = 3$	$I = \frac{A}{30} [X_1^3 Y_1^3 + X_2^3 Y_2^3 + X_3^3 Y_3^3] .$
$n = 4$	$I = \frac{A}{60} [X_1^4 Y_1^4 + X_2^4 Y_2^4 + X_3^4 Y_3^4] .$
$n = 5$	$I = \frac{2A}{105} [X_1^5 Y_1^5 + X_2^5 Y_2^5 + X_3^5 Y_3^5] .$

RESULTADOS

Usando a formulação descrita, desenvolveu-se um software para resolver problemas do tipo aqui apresentado, e uma interface gráfica que permite interação usuário-máquina agilizando as entradas de dados referentes às condições de contorno e à geometria do domínio. Efetuou-se uma série de testes utilizando dutos de seção na forma de triângulos, hexágonos, e rapézios. As grandezas de interesse calculadas foram: fator de atrito ( $fRe = CD_h^2 / D$ ), fator de correção do fluxo de momento ( $Kd(\alpha) = U_s / U$ ), fator de correção da energia cinética ( $Ke(\alpha) = U_s / U$ ), incremento na queda de pressão ( $K(\alpha) = 2[Ke(\alpha) - Kd(\alpha)]$ ), velocidade máxima adimensional ( $U_{max} = \max(U_i, i=1, N) / U$ ), comprimento de entrada hidrodinâmico ( $L_{hy} = (U_{max}^2 - 1 - K(\alpha)) / 4fRe$ ). As grandezas geométricas  $\alpha$  e  $\theta$  estão definidas em 11-81. Nas Tabelas I-III estão alguns resultados obtidos.

Tabela I - Resultados para geometria na forma de triângulo retângulo.

$\theta$	$fRe$	$U_{max}$	$Kd(\alpha)$	$Ke(\alpha)$	$K(\alpha)$	$L_{hy}$
45°	13.381	2.278	1.458	2.442	1.008	0.04148
40°	13.309	2.300	1.460	2.448	1.077	0.04329
35°	13.333	2.312	1.464	2.465	2.002	0.04398
30°	13.278	2.313	1.472	2.495	2.047	0.04340

Tabela II - Resultados para geometria na forma de hexágono.

$\alpha$	$\theta$	$fRe$	$U_{max}$	$Kd(\alpha)$	$Ke(\alpha)$	$K(\alpha)$	$L_{hy}$
1.0	30°	15.047	2.078	1.378	2.149	1.543	0.02080
1.0	45°	15.632	2.027	1.354	2.064	1.422	0.02097
1.0	60°	15.586	2.023	1.351	2.055	1.406	0.02705
2.0	30°	14.361	2.127	1.393	2.206	1.525	0.03306
2.0	45°	15.015	2.053	1.362	2.094	1.465	0.02914
2.0	60°	15.231	2.034	1.354	2.066	1.424	0.02809
4.0	30°	14.166	2.140	1.397	2.221	1.549	0.03405
4.0	45°	14.938	2.062	1.364	2.105	1.481	0.02965
4.0	60°	15.460	2.051	1.368	2.083	1.450	0.02840

Tabela III - Resultados para geometria na forma de trapézio.

$\alpha$	$\theta$	$fRe$	$U_{max}$	$Kd(\alpha)$	$Ke(\alpha)$	$K(\alpha)$	$L_{hy}$
0.5	30°	14.600	2.109	1.411	2.258	1.604	0.0299
0.5	45°	15.517	2.022	1.375	2.128	1.505	0.0255
0.5	60°	15.977	1.987	1.368	2.067	1.419	0.0239
1.0	30°	13.517	2.288	1.460	2.454	1.988	0.0416
1.0	45°	14.079	2.187	1.421	2.305	1.798	0.0358
1.0	60°	14.397	2.137	1.399	2.225	1.651	0.0332
2.0	30°	13.099	2.375	1.481	2.540	2.119	0.0481
2.0	45°	13.591	2.260	1.439	2.375	1.873	0.0411
2.0	60°	14.032	2.190	1.411	2.271	1.720	0.0370



ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os casos calculados utilizavam em torno de 200 nós e o erro percentual das grandezas de interesse ficaram em geral abaixo de 2.0%. Este erro pode ser diminuído utilizando uma máquina que permita usar malhas com maior número de nós ou melhorando a maneira de armazenamento dos dados, que ainda está na forma de matriz cheia. Para os cálculos usou-se um microcomputador PC386. Para obter-se resultados para uma geometria até então desconhecida, em geral, consome-se vinte minutos desde o início até o final. Nas Tabelas IV-VI os resultados são comparados com as referências.

Tabela IV - Erro (%) para geometria na forma de triângulo retângulo em relação às Refs. (2,5).

$\theta$	fRe	Kd( $\omega$ )	Ke( $\omega$ )	K( $\omega$ )
45°	1.73	0.90	1.75	3.06
40°	1.74	0.97	1.79	3.13
35°	1.77	0.97	1.81	3.14
30°	1.80	0.96	1.88	3.23

Tabela V - Erro (%) para geometria na forma de hexágono em relação às Refs. (2,4).

$\alpha$	$\theta$	fRe	U <sub>max</sub>	Kd( $\omega$ )	Ke( $\omega$ )	K( $\omega$ )	L <sub>hy</sub>
1.0	30°	1.76	0.43	0.22	0.61	1.31	-0.81
1.0	45°	1.46	0.30	0.37	0.78	1.64	-1.24
1.0	60°	1.21	0.20	0.45	0.78	1.51	-1.42
2.0	30°	1.48	0.14	0.07	0.23	0.96	-1.17
2.0	45°	1.25	0.10	0.29	0.48	0.96	-1.45
2.0	60°	1.06	0.10	0.37	0.63	1.14	-1.51
4.0	30°	1.19	0.05	0.00	0.05	0.18	-1.22
4.0	45°	1.01	-0.05	0.15	0.29	0.54	-1.53
4.0	60°	0.87	-0.05	0.22	0.44	0.76	-1.80

Tabela VI - Erro (%) para geometria na forma de trapézio em relação às Refs. (2,3).

$\alpha$	$\theta$	fRe	Kd( $\omega$ )	Ke( $\omega$ )	K( $\omega$ )
0.5	30°	2.18	0.36	0.04	1.03
0.5	45°	2.00	0.59	1.33	2.59
0.5	60°	1.82	0.67	1.42	2.97
1.0	30°	1.98	0.13	0.41	0.81
1.0	45°	1.86	0.35	0.83	1.61
1.0	60°	1.80	0.60	1.09	2.04
2.0	30°	1.70	0.09	0.24	0.52
2.0	45°	1.66	0.28	0.68	1.30
2.0	60°	1.64	0.79	1.02	1.06

#### AGRADECIMENTOS

Um dos autores, Aparecido, J. B., agradece o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, concedido através do Projeto N.º 403357/89-6/EM/FV/PQ; o outro, Costa, D. R., agradece a bolsa de Iniciação Científica concedida pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, através do Processo N.º 91/0082-0.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Shah, R. K., and London, A. L., "Laminar Flow Forced Convection in Ducts", in *Advances in Heat Transfer*, ed. Irvine, T. F., and Hartnett, J. P., Academic Press Inc., New York, 1978.
2. Aparecido, J. B., "Transformada Integral Generalizada no escoamento laminar e transferência de calor em dutos retilíneos de geometria arbitrária", Tese de Doutorado, ITA, São José do Campos, Brasil, Dezembro, 1988.
3. Aparecido, J. B., and Cotta, R. M., "Fully Developed Laminar Flow in Trapezoidal Ducts", *Proc. of the 9<sup>th</sup> Brazilian Congress of Mech. Eng.*, COBEM 87, V. 1, pp. 25-28.
4. Aparecido, J. B. and Cotta, R. M., "Laminar Flow Inside Hexagonal Ducts", *Computational Fluid Mechanics*, Vol. 6, n. 2, pp. 93-100, 1990.
5. Aparecido, J. B., Cotta, R. M., and Özişik, M. N., "Analytical Solutions to Two-Dimensional Diffusion Problems Within Irregular Domains", *Journal of Franklin Institute*, vol. 326, n. 3, pp. 421-434, 1989.
6. Costa, D. R., e Aparecido, J. B., "Solução de Equações de Difusão Bidimensionais Utilizando o Método do Elementos Finitos", XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 91, São Paulo, SP, Dezembro, 1991. (Submetido para publicação)
7. Vainberg, M. M., "Variational Method and Method of Monotone Operators in Theory of Nonlinear Equations", John Wiley & Sons, New York, 1973.
8. Myers, G. E., "Analytical Methods in Conduction Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, New York, 1971.
9. Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., "The Finite Element Method", Vol. 1, Fourth Edition, McGraw-Hill Book Company, London, Great Britain, 1989.
10. Chung, T. J., "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw-Hill Book Company, New York, 1978.