

**MODELADO POR MEDIO DE ELEMENTOS FINITOS MOVILES  
DE LA DINAMICA DE FLUJOS EN EBULLICION**

**Dario F. Delmastro y Alejandro Clausse**  
*Centro Atómico Bariloche*  
*Comisión Nacional de Energía Atómica*  
*8400 Bariloche, Argentina.*

**RESUMEN**

Se presenta un modelo numérico de un canal en ebullición en base a elementos finitos unidimensionales móviles. El modelo se basa en una aproximación nodal de Galerkin para las ecuaciones de conservación de un canal en ebullición. Entre cada nodo se proponen perfiles espaciales de entalpia, llegándose a un sistema de ecuaciones ordinarias no lineales que permiten hallar la evolución temporal de la posición de cada nodo. Se presentan varias soluciones, y se discuten las ventajas e inconvenientes que posee la utilización de un método de elementos finitos móviles para la resolución de este tipo de problemas.

**ABSTRACT**

A numerical model of a boiling channel based in one-dimensional variable-length finite elements is presented. A Galerkin nodal approximation is used to reduce the conservation equations to a set of ordinary differential equations. Spatial enthalpy profiles are assumed between each node, yielding a set of non-linear equations for the position of the nodes. Several numerical solutions are presented and the advantages and disadvantages of the application of finite elements in this type of problems is discussed.

**INTRODUCCION**

Los flujos bifásicos en ebullición tienen importantes aplicaciones en distintas ramas de la ingeniería. Bajo ciertas condiciones estos sistemas se vuelven inestables dando origen al fenómeno conocido como "ondas de densidad"[1]. En esta situación el estado estacionario del flujo no puede ser mantenido, y el sistema evoluciona hacia un estado de oscilación autosostenido, debido a la realimentación positiva de las caídas de presión a lo largo de la dirección del flujo. Desde el punto de vista del diseño, resulta fundamental conocer el comportamiento dinámico de las variables termohidráulicas (caudal, temperatura, entalpia, título). El inconveniente más notable que presenta la simulación numérica de estas oscilaciones es la discontinuidad móvil en la expansibilidad térmica del fluido en el punto de saturación.

En el presente trabajo se presenta un modelo numérico de un canal en ebullición en base a elementos finitos unidimensionales móviles. El modelo se basa en una aproximación nodal de Galerkin para las ecuaciones de conservación de un canal en ebullición. Entre cada nodo se proponen perfiles espaciales de entalpia, llegándose a un sistema de ecuaciones ordinarias no lineales que permiten hallar la evolución temporal de la posición de cada nodo. Se presentan varias soluciones, y se discuten las ventajas e inconvenientes que posee la utilización de un método de elementos finitos móviles para la resolución de este tipo de problemas.

### CANAL EN EBULLICION

La dinámica de un flujo en ebullición está gobernada por las ecuaciones de conservación de la masa, el momento y la energía planteadas para cada fase (líquido y vapor). Dada la complejidad del problema, se plantearon las siguientes hipótesis respecto al flujo:

- flujo homogéneo (deslizamiento despreciable entre fases) en equilibrio termodinámico,
- las variaciones de presión son pequeñas frente a la presión total del sistema,
- ambas fases son incompresibles,
- flujo de calor y área de pasaje uniforme,
- la disipación viscosa, la energía cinética y potencial, y el trabajo de flujo son despreciables.

Bajo estas suposiciones las ecuaciones de conservación para un flujo unidimensional bifásico se pueden escribir en forma adimensional como(2):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho hu) = \frac{N_{sub}}{N_{pch}} f(t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u^2) = -A \rho u^2 - \frac{\rho}{Fr} - Eu \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

y las ecuaciones de estado correspondientes (con  $h_r=0$ ) son:

$$\rho = 1 \quad \text{para } h \leq 0 \quad (4)$$

$$\rho = \frac{1}{(1 + N_{pch} h)} \quad \text{para } h > 0 \quad (5)$$

### MODELADO POR ELEMENTOS FINITOS

#### Zona de una fase

La zona de una fase del canal se extiende desde la entrada del canal hasta el punto donde comienza la ebullición (frontera de ebullición). Como se puede ver en la Figura 1, se subdivide esta zona en  $N_e$  elementos de longitud variable. El aumento de entalpía desde la entrada,  $h_i = h_{i0} - \Delta h_i(t)$ , hasta saturación,  $h_r$ , se subdivide también en  $N_e$  intervalos iguales de magnitud  $(h_r - h_i)/N_e$ . Luego la posición del nodo líquido  $L_n$  se define como el punto donde la entalpía del fluido alcanza el siguiente valor:

$$h_n = \left[ \frac{n - N_e}{N_e} \right] \cdot \left[ \frac{N_{sub}}{N_{pch}} - \Delta h_i \right] \quad (6)$$

Se debe notar que esta entalpía  $h_n$  si bien es función del tiempo tiene una evolución conocida ya que sólo depende de la condición de contorno a la entrada  $\Delta h_i(t)$ . Sin embargo su ubicación espacial es una variable temporal solución del problema.

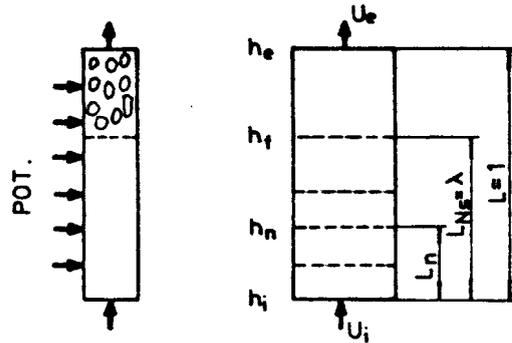


Figura 1: esquema del canal en ebullición.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución de las posiciones de los nodos  $L_n$  se pueden obtener mediante una aproximación nodal de Galerkin, usando una función de forma lineal para el perfil de entalpía dentro de cada elemento [3]. Integrando la ecuación de energía (ec. 1) usando la regla de Leibnitz entre  $L_{n-1}$  y  $L_n$ , obtenemos:

$$\frac{dL_n}{dt} = 2 u_i + N_n (L_n - L_{n-1}) \frac{\left[ \frac{2N_n + 1 - 2n}{N_n} \frac{d\Delta h_i}{dt} - 2 \frac{N_{sub}}{N_{pch}} f(t) \right]}{\left[ \frac{N_{sub}}{N_{pch}} - \Delta h_i \right]} \quad (7)$$

#### Zona de dos fases

También se eligió la masa total del canal como variable de estado. Su ecuación de conservación puede obtenerse integrando la ecuación de continuidad sobre toda la longitud del canal:

$$\frac{dM_{ch}}{dt} = u_i - \rho_e u_e \quad (8)$$

La velocidad a la salida  $u_e$ , puede ser calculada combinando primero las ecuaciones 1, 2 y 5, para obtener:

$$\frac{\partial u_e}{\partial z} = N_{sub} f(t) \quad (9)$$

Integrando la ecuación 9 entre la frontera de ebullición y una posición  $z$  en la zona bifásica del canal, se obtiene:

$$u = u_1 + M_{ch} (z-\lambda) f(t) \quad (10)$$

De donde la velocidad a la salida viene dada por:

$$u_0 = u_1 + M_{ch} (1-\lambda) f(t) \quad (11)$$

La densidad a la salida,  $\rho_0$ , se puede expresar en términos de la masa total del canal, usando también un perfil lineal para interpolar en el elemento de dos fases. Combinando las ecuaciones 1, 4 y 5, e integrando a lo largo del canal se tiene que:

$$M_{ch} = \lambda + (1-\lambda) \frac{\ln(1/\rho_0)}{(1/\rho_0)-1} \quad (12)$$

Por eficiencia numérica se utilizó un polinomio de grado 5, que ajusta a esta expresión, para expresar  $\rho_0$  en función de  $(M_{ch}-\lambda)/(1-\lambda)$ .

Ecuación de impulso y condiciones de cierre

Integrando la ecuación de impulso entre los extremos del canal y usando como condición de contorno una caída de presión  $\Delta P_{ext}(t)$  fijada externamente sobre el canal, se obtiene que:

$$\text{En } \Delta P_{ext}(t) = \Delta P_I + \Delta P_C + \Delta P_{Fr} + \Delta P_0 \quad (13)$$

Donde la caída de presión debida a la inercia

$$\Delta P_I = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dz = \frac{d}{dt} \int_0^1 \rho u dz = \frac{dW}{dt} \quad (14)$$

viene dada por:

$$\Delta P_I = \frac{d}{dt} \left[ M_{ch} u_1 + \frac{M_{ch} (1-\lambda) (1-M_{ch})}{(1/\rho_0)-1} f(t) \right] \quad (15)$$

En forma similar las caídas de presión gravitacionales, de fricción y de aceleración se pueden expresar como:

$$\Delta P_C = \int_0^1 \frac{\rho}{Fr} dz = \frac{M_{ch}}{Fr} \quad (16)$$

$$\Delta P_{Fr} = \int_0^1 [ A + K_n \delta(z-z_n) ] \rho u^2 dz \quad (17)$$

$$= A_1 \lambda u_1^2 + A_2 \left\{ (M_{ch}-\lambda) u_1^2 + \frac{2 u_1 (1-M_{ch}) (u_0-u_1)}{(1/\rho_0)-1} \right. \\ \left. + \left[ \frac{u_0-u_1}{1/\rho_0-1} \right]^2 \left[ \frac{(1/\rho_0-3)(1-\lambda)}{2} + M_{ch} - \lambda \right] \right\} + K_1 u_1^2 + K_0 \rho_0 u_0^2$$

$$\Delta P_0 = \int_0^1 \frac{\partial \rho u^2}{\partial z} dz = \rho_0 u_0^2 - u_1^2 \quad (18)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son los coeficientes de fricción distribuida para las zonas de una y dos fases respectivamente.

Integración temporal

Las  $N+2$  ecuaciones diferenciales que describen al canal en ebullición son integradas numéricamente en forma explícita por medio de un método de Runge-Kutta [4].

#### RESULTADOS

Los flujos bifásicos en ebullición en ciertos rangos presentan un comportamiento

estable, pero bajo ciertas condiciones estos sistemas se vuelven inestables dando origen a fenómenos oscilatorios. Las condiciones límites que separan los dos tipos de comportamientos reciben el nombre de frontera de estabilidad. En la figuras 2 y 3, se muestran ambos tipos de comportamientos. En los dos casos las condiciones de contorno se mantienen constantes (pero distintas en cada uno), después de una perturbación en la velocidad de entrada producida en el instante inicial ( $t=0$ ). Los resultados obtenidos por el presente modelo concuerdan muy bien con los obtenidos por Rizwan-Uddin y Dorning utilizando un método más sofisticado [5].

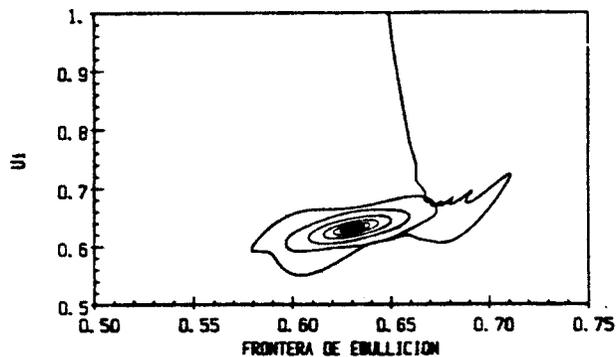


Figura 2: proyección de la trayectoria en el plano  $\lambda$ - $u$  para un comportamiento estable ( $Ne_{ub}=7.57, Np_{cb}=12, Fr=0.0837, K_1=6, K_2=2, A_1=2.8, A_2=5.6, N_s=20$ ).

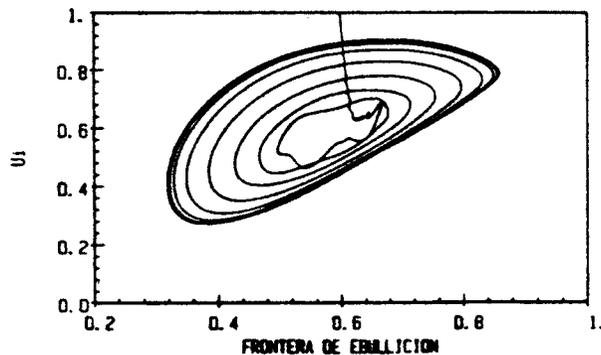


Figura 3: proyección de la trayectoria en el plano  $\lambda$ - $u$  para un comportamiento inestable ( $Ne_{ub}=7.57, Np_{cb}=13, Fr=0.0883, K_1=6, K_2=2, A_1=2.8, A_2=5.6, N_s=20$ ).

En la figura 4 se muestra la evolución temporal de la velocidad a la entrada del canal producida por una caída exponencial del subenfriamiento de entrada (debida por ejemplo a una pérdida parcial de los generadores de vapor en una central nuclear). En ella se observa como el sistema evoluciona entre dos puntos estables atravesando en su trayecto una región de comportamiento oscilatorio.

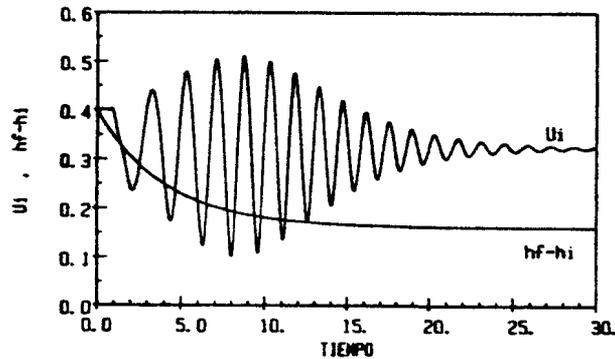


Figura 4: evolución temporal de la velocidad  $u_i$ , debida a un decaimiento exponencial del subenfriamiento de entrada.

En la figura 5 se muestra la evolución temporal de la velocidad entrante al canal producida por una variación de la potencia de la forma  $t \cdot \exp(-t/\tau)$  con  $\tau=3$ . Esta situación puede corresponder a un desbalance en el sistema de control de potencia que introduzca momentáneamente al sistema en una región inestable.

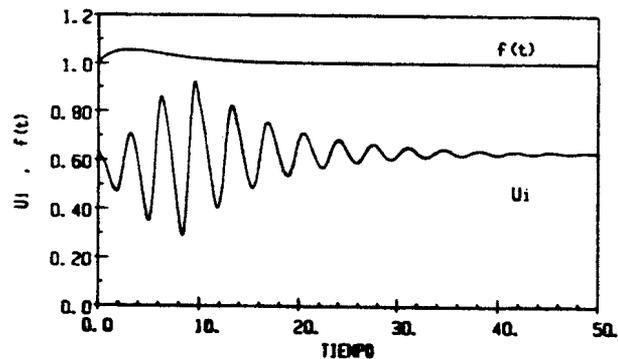


Figura 5: evolución temporal de la velocidad  $u_i$ , debida a una oscilación en el flujo de calor.

En la figura 6 se muestra la evolución temporal de la velocidad de entrada, producida por una caída exponencial de la fuerza impulsora externa, la cual se puede originar por la pérdida de una de las bombas de refrigeración.

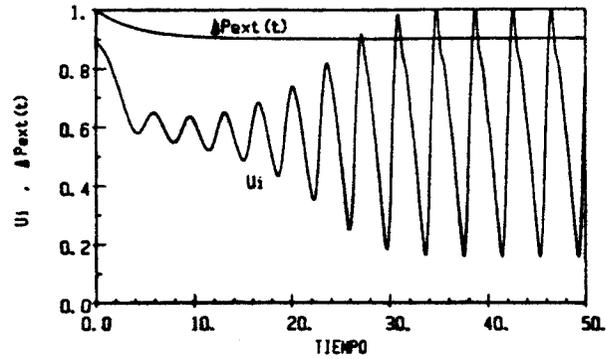


Figura 6: evolución temporal de la velocidad  $u_i$ , debida a un decaimiento exponencial del salto externo de presión.

Los resultados mostrados concuerdan cualitativamente con los presentados por Rizwan-Uddin y Dorning para situaciones parecidas [6].

Evolución temporal de la red

En la figura 7 se muestra, a modo de ejemplo, la evolución temporal de la red para el caso mostrado en la figura 3.

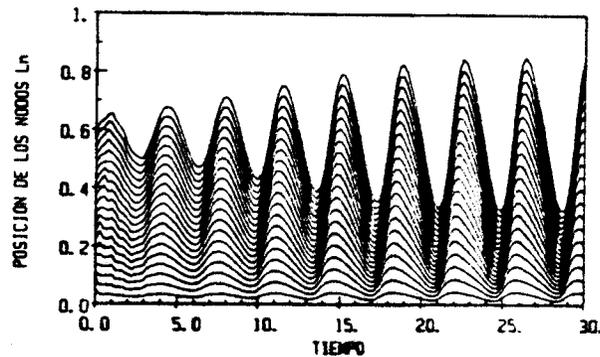


Figura 7: evolución temporal de la red.

#### CONCLUSIONES

El método de elementos finitos móviles presentado resulta ser muy útil para el estudio de distintas situaciones de interés en la ingeniería nuclear y química. Se pueden destacar su rapidez y versatilidad.

En cuanto a sus inconvenientes son de mencionar su incapacidad para tratar

inversiones de caudal y la presencia de algunas oscilaciones numéricas en los transitorios iniciales.

#### NOMENCLATURA

h entalpía específica,  
K coeficiente de pérdida,  
L longitud del canal,  
Mca masa total del canal,  
Ns número de nodos en la zona subenfriada,  
p presión,  
Q potencia total  
t tiempo,  
u velocidad,  
v volumen específico,  
w caudal másico,  
W impulso total,  
z variable espacial.

#### Letras griegas

$\lambda$  frontera de ebullición,  
 $\rho$  densidad.

#### Subíndices

a aceleración,  
e salida del canal,  
ext externo,  
r líquido en saturación,  
fg cambio de fase,  
fr fricción,  
i entrada del canal,  
I inercia,  
G gravedad,  
n n-simo nodo de una fase,  
o estado estacionario,  
1 una fase,  
2 dos fases.

#### Supraindices

• dimensional

#### Numeros Adimensionales [2]

Eu Número de Euler,  
Fr Número de Froude,  
A Número de fricción,

$N_{pch}$  Número de cambio de fase  $\left[ = \frac{Q_0 \cdot v_{fg}^0}{w_0 \cdot h_{fg}^0 \cdot v_f^0} \right]$ ,

$N_{sub}$  Número de subenfriamiento  $\left[ = \frac{(h_f^0 - h_i^0) v_{fg}^0}{h_{fg}^0 \cdot v_f^0} \right]$ .

#### REFERENCIAS

1. Lahey, R.T., Jr. & Moody, F.J. "The Thermal Hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor". ANS Monograph, 1977.
2. Clause, A., et al., "The Analysis of Chaotic Instabilities in Natural Circulation Boiling Systems" Eurotherm Seminar Nr. 16, 1990, págs. 161-167.
3. Owen, D R J & Hinton, E "A Simple Guide to Finite Elements". Pineridge Press Limited 1980

4. Marshall, G. "Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales". Reverté Argentina, 1985.
5. Rizwan-uddin & Dorning, J.J., "A Chaotic Attractor in a Periodically Forced Two-Phase Flow System", Nucl. Sci. Eng., 100, 1988, págs. 393-404.
6. Rizwan-uddin & Dorning, J.J., "Chaotic Dynamics of a Triply-Forced Two-Phase Flow System", Nucl. Sci. Eng., 105, 1990, págs. 123-135.

