

**MODELOS NUMERICOS DEL COMPORTAMIENTO  
HISTERETICO Y ESTIMACION DEL DAÑO  
ESTRUCTURAL EN PORTICOS SISMORRESISTENTES  
DE HORMIGON ARMADO**

Victorio E. Sonzogni\*

Instituto de Desarrollo Tecnológico para  
la Industria Química (INTEC)  
UNL-CONICET  
Santa Fe-Argentina

**Resumen**

En esta conferencia se presenta un estado del arte en la estimación del daño estructural para pórticos sismorresistentes de hormigón armado. Dado que dicha estimación se realiza sobre modelos numéricos, se presenta en primer lugar una revisión de los modelos para el ciclo histerético de las relaciones constitutivas utilizados para este tipo de estructuras. A continuación se delinean los procedimientos seguidos para estimar parámetros de daño en la respuesta y un índice de daño global para la estructura. Uno de los parámetros más usados, la ductilidad, es objeto de múltiples definiciones. Se brindan las definiciones posibles, así como una comparación de sus desempeños en ejemplos numéricos. Se pone énfasis en la determinación de ductilidades en columnas de edificios.

**Abstract**

An "state-of-the-art" in the estimation of structural damage earthquake resistant of reinforced concrete frames, is presented. First, a review of numerical models for hysteretic cycles in constitutive relations is made. Next, procedures followed for computing damage parameters during the response, and global damage indices are briefly sketch. Various definitions for ductility demand, as the most popular damage parameter, as well as results from numerical tests are presented. Emphasis is placed upon ductilities for columns, in which the effect of varying axial forces is important.

\* Investigador Asistente del CONICET

## 1. INTRODUCCION

En esta conferencia se trata el modelado numérico de los ciclos de histeresis para las ecuaciones constitutivas en estructuras aporricadas de hormigón armado, y la estimación del daño estructural a partir de parámetros de respuesta determinados en esos modelos de ciclos histeréticos. El ámbito de aplicación de este tema es el análisis de la respuesta estructural de pórticos de hormigón armado bajo solicitaciones transitorias arbitrarias. Un caso particular de ello es el análisis de la respuesta sísmica de estructuras de edificios. Y ese análisis realizado por métodos numéricos.

En primer lugar se efectuará una descripción de los diferentes modelos numéricos que han sido utilizados para describir los ciclos histeréticos en las relaciones momento - curvatura de secciones transversales de pórticos de hormigón armado.

A continuación se reseñarán los procedimientos que se han utilizado para evaluar un índice de daño. Esto es, una magnitud que permita cuantificar el daño estructural producido durante la respuesta.

El parámetro de respuesta que ha sido más utilizado para estimar algún índice de daño, es la demanda de ductilidad. Se presentarán diferentes definiciones de ductilidad y se realizará una evaluación del desempeño de cada una de ellas para casos prácticos de respuesta sísmica de estructuras de edificios.

En miembros de la estructura con variaciones en los esfuerzos normales durante la respuesta, como es el caso de columnas de edificios, las definiciones usuales de ductilidad no pueden ser aplicadas, dado que el valor de las deformaciones de fluencia no es único. En esos casos se precisa redefinir la ductilidad. Se presentarán algunas soluciones propuestas para ese fin.

## 2. MODELOS PARA EL CICLO HISTERETICO CARGA-DEFORMACION

En esta seccion se describirán los modelos matemáticos o numéricos que han sido propuestos para poder representar los ciclos histeréticos carga-deformacion de estructuras en general y de hormigón armado en particular.

El modelo más simple que podemos plantear es el denominado bilineal (figura 1), para el cual la curva esqueleto se describe con dos rectas. Una de ellas corresponde a la carga elástica y va hasta el punto de plastificación o fluencia. A partir de allí otra recta describe la deformación en el rango plástico. Este modelo puede incluir un endurecimiento medido por la pendiente de la recta plástica. Cuando el endurecimiento es nulo se cae en el caso particular de un modelo elasto-plástico perfecto. El ciclo se produce sobre rectas paralelas a las de la curva esqueleto. Este modelo fue de los primeros usados para análisis elasto-plástico [1,2,3] y su principal ventaja es su simplicidad. No obstante es insuficiente para poder representar el comportamiento de estructuras de hormigón armado.

Un procedimiento que permite generar ciclos de histeresis, debido a Masing [4], se basa en definir una curva esqueleto primaria. Los ciclos sucesivos de carga y descarga se representan con la misma función de la curva esqueleto, realizándose un cambio de origen y escala para las variables intervinientes. Así si la curva esqueleto se define

$$P = f(X) \quad (2.1)$$

las ramas de los ciclos sucesivos se calculan con

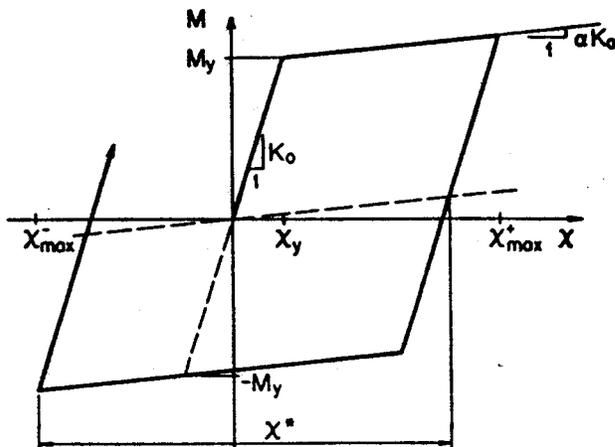


Figura 1. Modelo histerético bilineal

$$\frac{P - P_1}{2} = f\left(\frac{X - X_1}{2}\right) \quad (2.2)$$

siendo  $(X_1, P_1)$  coordenadas del punto en el cual se efectuó la última reversion de la carga.

Según sea la función  $f$  utilizada surgen distintos modelos. Uno muy utilizado es el de Ramberg-Osgood [5] en el que la curva esqueleto se define

$$\frac{X}{X_r} = \frac{P}{P_r} + \alpha \left(\frac{P}{P_r}\right)^\beta \quad (2.3)$$

siendo  $X_r$  y  $P_r$  un desplazamiento y una fuerza de referencia,  $\alpha$  una constante real positiva y  $\beta$  constante entera positiva impar mayor que 1. En la figura 2 se muestra la forma de uno de esos ciclos. Como caso particular este modelo contiene al bilineal. El ciclo de Ramberg-Osgood fue propuesto por Jennings para evaluar las pérdidas de energía por trabajo plástico de deformación de una estructura bajo deformaciones cíclicas [6]. Este modelo ha sido utilizado también para estructuras de acero y para modelos de suelos.

Un inconveniente que puede presentar el modelo de Ramberg-Osgood, según sea el procedimiento de cálculo que se siga, es que proporciona la deformación en función de la carga. Si se precisa la relación inversa, ésta no puede ser explicitada y la carga en función de deformación debe ser calculada en forma iterativa. A fin de salvar este inconveniente se han propuesto modelos alternativos, en los cuales se defina la carga en forma explícita. Así Menegotto y Pinto [7], y Sonzogni [8] han propuesto modelos de tipo Masing basados en diferentes descripciones de la curva esqueleto.

Un modelo, de concepción distinta, fue desarrollado por Iwan [9], quien tomó un conjunto de elementos elasto-plásticos con diferentes niveles de fluencia. Según sean los valores asignados a cada componente, logra una serie de curvas que, como caso particular, incluyen al modelo bilineal.

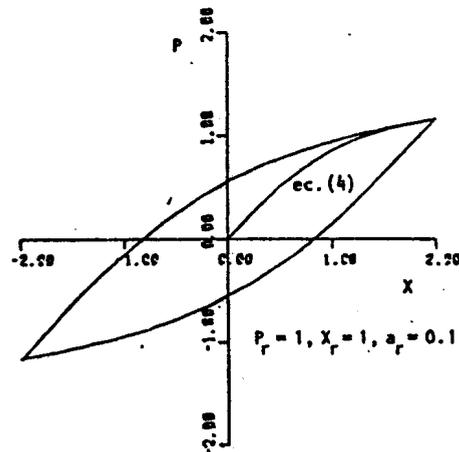


Figura 2. Modelo histérico de Ramberg-Osgood

Una descripción más reciente para los ciclos de histeresis lo constituyen las ecuaciones evolucionarias. Las ecuaciones constitutivas se describen en la forma de ecuaciones diferenciales que se integran paralela y separadamente de la integración de las ecuaciones de movimiento. Este tipo de modelos han sido utilizados, por ejemplo, en referencias 10 y 11.

Cuando avanzamos en el estudio de modelos histéricos más apropiados para representar la respuesta de estructuras de hormigón armado, encontramos que el punto de partida puede ser considerado el modelo propuesto por Clough en 1966 [12]. Sobre una base bilineal incluye una degradación de la rigidez. La descarga desde la recta plástica se produce paralela a la recta elástica. Una vez producido un cambio de signo en la carga, la recta de la rama de carga, en el nuevo sentido, se orienta hacia el punto de mayor deformación alcanzado en el proceso de carga previa (figura 3-a). Este modelo, uno de los más utilizados, ha sido objeto de múltiples modificaciones. Entre ellas pueden citarse los modelos de Imbeault y Nielsen [13], Otani [14], Anderson y Townsend [15], Saïdi y Sozen [16], entre otros (figura 3). Sugano y Fukada [17] utilizaron una base trilineal, incluyendo así explícitamente la fisuración del hormigón a tracción.

Iwan [18] en una generalización de su modelo histérico incluyó una degradación en la rigidez. Utilizando un conjunto de elementos simples que además de tener componentes elásticos y elasto-plásticos contenían también elementos con fricción o deslizamiento irreversible. Nuevamente consiguió así representar una amplia clase de formas de ciclo degradante (figura 3-d).

Un hito en los modelos histéricos para hormigón armado lo constituye el presentado por Takeda et al en 1970 [19]. Este modelo empírico contiene una serie de reglas para seguir los procesos de carga y descarga desde distintas situaciones (figura 4). Es uno de los más complejos de su tipo y ha sido ampliamente utilizado y tomado como patrón para la propuesta de modelos más simplificados. Presenta una buena concordancia con resultados experimentales.

Modelos de otro tipo fueron propuestos por Shiga et al [20] y por Tani et

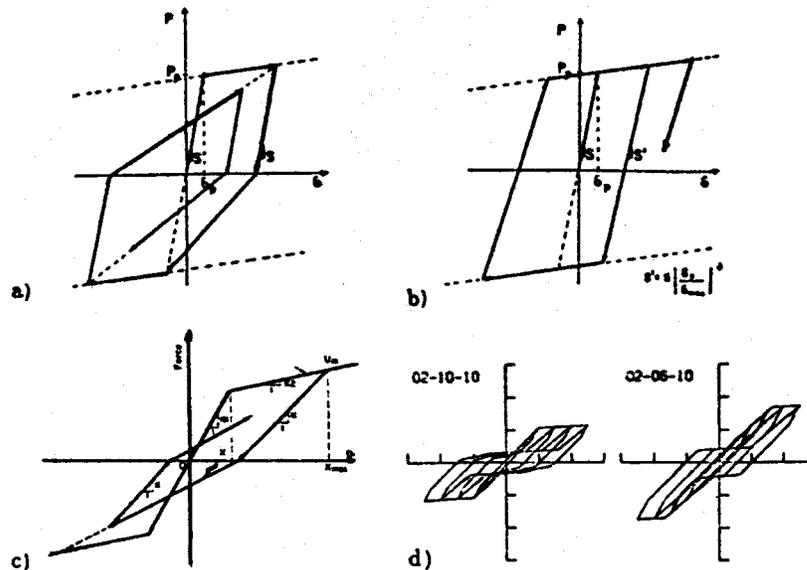


Figura 3. Modelos histéricos para hormigón armado.

a) Modelo de Clough; b) Modelo de Imbeault y Nielsen;  
c) Modelo de Saiidi y Sozen; d) Modelo de Iwan.

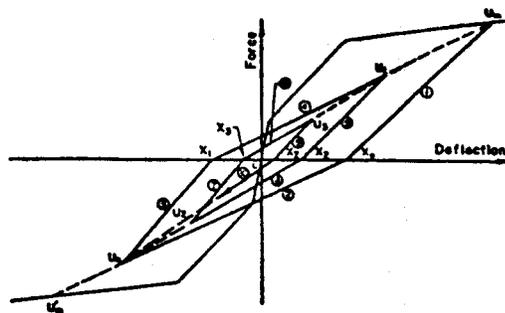


Figura 4. Modelo histérico de Takeda et al.

al [21] en los cuales el ciclo histérico se modela en forma separada de la curva esqueleto.

Otras características de los ciclos observados experimentalmente se han tratado de introducir en los modelos numéricos. El "desinflado" de los ciclos, similar al comportamiento de los de fig. 3-d, fue introducido por Takayanaghi y Schnobrich [22] en un modelo de Takeda modificado. En la misma referencia se considera el decremento en la resistencia con el número de ciclos de reversión

de la carga. Este efecto, importante en el caso de esfuerzos de corte elevados, también fue modelado por Aoyama [23] mediante una combinación de elementos de deslizamiento negativo y modelos bilineales.

Más recientemente se han utilizado técnicas de identificación de sistemas para construir modelos numéricos ajustando una serie de parámetros del mismo a un conjunto de datos experimentales. En este sentido puede mencionarse, por ejemplo, trabajos de Stanton y McNiven [24].

### 3. MEDIDA DEL DAÑO ESTRUCTURAL

Para evaluar determinísticamente el daño que puede sufrir una estructura antisísmica se han utilizado diversos procedimientos. Estos pueden ser presentados en la siguiente forma general [25]. Se determinan una o más variables de la respuesta estructural frente a una sollicitación dada, variables que se denominarán *Parámetros de Daño* ( $\delta$ ). A partir de estos parámetros de daño se evalúa un *Índice de Daño Estructural* ( $D$ ). Este último toma valores comprendidos entre 0 (Indemne) y 1 (Falla). Puede además intentarse relacionar  $D$  con un *Índice de Daño Económico* concebido como la relación entre el costo de reparación y el costo de reconstrucción para una estructura.

#### 3.1. Evaluación del Parámetro de Daño ( $\delta$ )

En general los procedimientos para evaluar los parámetros de daño  $\delta$  pueden ser de 2 tipos. Uno de ellos realiza la estimación de ciertos valores de la respuesta y la comparación de esta demanda con la correspondiente capacidad de la estructura. El otro procedimiento se basa en la degradación de alguna propiedad estructural.

##### a) Comparación demanda-capacidad

En este caso se estiman los valores de la respuesta (o demanda) para algunas variables. Estos pueden ser:

- un valor máximo: de resistencia, deformación o desplazamiento [26,27,28];
- un rango de valores: de deformación o de desplazamientos [26]; y
- un valor acumulado: de deformación, desplazamiento o de energía disipada como trabajo plástico [29,30,31].

Los valores máximos de deformación o de desplazamiento, así como un rango de estos valores, ha sido muy utilizado a través de la definición de ductilidad de deformaciones o de desplazamientos. Las definiciones de ductilidad se tratan en la sección siguiente.

Cuando se evalúa un valor acumulado de la respuesta, puede utilizarse alguna *Teoría de Daño Acumulado*. En general, la Teoría de Daño Acumulado procede según los dos pasos siguientes:

1°) Se divide la historia de deformaciones (o la variable a utilizar) en hemiciclos de deformación. Se calcula la respuesta acumulada a lo largo de cada hemiciclo. 2°) Se evalúa un parámetro de daño acumulado. Una teoría que ha sido muy usada se basa en la expresión

$$\delta = A \sum_{i=1}^{N_{Ac}} \delta_i^\beta$$

siendo  $\delta_i$  el valor de un parámetro de daño acumulado a lo largo del hemiciclo  $i$ . Suele tomarse para  $A$  un valor tal que conduce a

$$\delta = \delta_u \sum_{i=1}^{N_{hc}} \left( \frac{\delta_i}{\delta_u} \right)^\beta \quad (3.1)$$

siendo  $\delta_u$  un valor último del parámetro  $\delta$  y  $\beta$  un exponente empírico mayor que 1 que permite asignar mayor peso a pocos ciclos de gran amplitud, que a un gran número de ciclos de pequeña amplitud. Para el caso de una deformación cíclica a una amplitud constante  $\delta_1$  la expresión anterior toma la forma

$$\delta = \delta_u N_{hc} \left( \frac{\delta_1}{\delta_u} \right)^\beta \quad (3.2)$$

La falla por fatiga se producirá para un número de hemiciclos  $N_u$ , cuando el parámetro alcance su valor último  $\delta_u$ , esto es:

$$N_u \left( \frac{\delta_1}{\delta_u} \right)^\beta = 1 \quad (3.3)$$

que en un plano logarítmico representa la recta

$$\log N_u + \beta \log \left( \frac{\delta_1}{\delta_u} \right) = 0$$

Esto es similar a las líneas S-N para fatiga de alto ciclaje de piezas de acero. El exponente  $\beta$  para fatiga de alto ciclaje toma valores típicos de 2.5 a 3, mientras que en el caso de fatiga de bajo ciclaje sus valores rondan 1.6 a 1.8 [32].

#### b) Degradación de una propiedad estructural

Este procedimiento se basa en estimar una propiedad de la estructura en su estado indemne y en su estado dañado. Esta propiedad, que se degrada a lo largo de la respuesta, puede ser: la rigidez, la resistencia, o la capacidad de disipación de energía [33]. Si designamos con  $p$  a alguna de estas propiedades, el parámetro de daño puede calcularse:

$$\delta = 1 - \frac{p_d}{p_o} \quad (3.4)$$

refiriéndose el índice  $o$  al estado inicial y el índice  $d$  al estado dañado. El parámetro  $\delta$  comienza así con valor cero y crece alcanzando el valor unitario al anularse  $p_d$ .

#### 3.2. Cálculo de un Índice de Daño Estructural ( $D$ )

En posesión de los parámetros de daño, se calcula un número  $D$  que refleje globalmente el daño de la estructura. Se establece un umbral para el parámetro  $\delta$  de modo que para valores inferiores a este umbral el Índice de Daño sea 0 (no dañado) y cuando se alcance el valor último  $\delta_u$  el índice  $D$  sea 1 (falla).

En referencia [25] se utiliza una función:

$$D = \begin{cases} 0 & , \quad \delta < \delta_t \\ f(\delta) & , \quad \delta_t < \delta < \delta_u \end{cases} \quad (3.5)$$

con

$$f(\delta) = \left( \frac{\delta - \delta_t}{\delta_u - \delta_t} \right)^\gamma$$

cuyo gráfico se muestra en la Figura 5, mientras que en ref. [34] se propone:

$$f(\delta) = \left[ \exp \left( \gamma \left( \frac{\delta - \delta_t}{\delta_u - \delta_t} \right) \right) - 1 \right] / [\exp(\gamma) - 1]$$

y otras definiciones acordes son posibles.

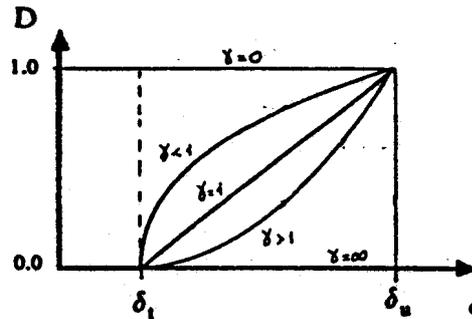


Figura 5. Índice de daño

Se intenta representar mediante el índice de daño  $D$  el estado global de la estructura. Si los parámetros  $\delta$  y el índice  $D$  han sido evaluados a nivel de los elementos, se precisa algún procedimiento para combinar estos índices y obtener un valor global. Una forma simple de realizar esto es mediante un promedio ponderado:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{NE} w_k D_k}{\sum_{k=1}^{NE} w_k} \quad (3.6)$$

siendo  $NE$  el número de elementos en la estructura,  $D_k$  el índice de daño del elemento  $k$ , y  $w_k$  apropiados factores de peso. Park et al. [35] han utilizado un índice global:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{NE} D_k^2}{\sum_{k=1}^{NE} D_k}$$

obtenido a partir de (3.6) con factores de peso proporcionales a los respectivos índices de daño  $D_k$ .

#### 4. DEFINICIONES DE DUCTILIDAD

La ductilidad es el parámetro que ha sido más ampliamente utilizado para evaluar requerimientos y capacidades de deformaciones inelásticas. En su concepción es una medida de las máximas deformaciones inelásticas, normalizada. Hay diferentes definiciones para ductilidad. Si se considera un sistema estructural no lineal, cuya relación carga - desplazamiento sea descrita por alguna de las curvas de Figura 6, algunas definiciones de ductilidad dadas por Giberson [36] son las siguientes:

$$\mu^{(1)} = \frac{X_{max}}{X_y} = 1 + \frac{\delta}{X_y} \quad (4.1)$$

$$\mu^{(2)} = 1 + \frac{\delta^p}{X_y} \quad (4.2)$$

$$\mu^{(3)} = 1 + \frac{\delta^p}{X^e} \quad (4.3)$$

siendo definidas en esa figura las variables intervinientes. Las dos primeras definiciones (4.1 y 4.2) son aplicables a sistemas con marcado punto de fluencia (Fig. 6-a), ya que la normalización se hace con respecto al desplazamiento de fluencia  $X_y$ . De esas dos definiciones, la segunda es más representativa de las deformaciones plásticas producidas. La tercer definición (4.3) tiene mayor generalidad y puede aplicarse a sistemas como los de Fig. 6-a y 6-b. Para el sistema bilineal de Fig. 6-a estas definiciones conducen a valores que dependen del parámetro de endurecimiento  $\alpha$ , y que se grafican en Figura 6-c. A pesar de que las dos últimas son más recomendables que la primera, la definición (4.1) es la que se ha utilizado en la mayoría de los casos, por su simplicidad. De aquí en adelante las definiciones presentadas serán del tipo (4.1), a menos que expresamente se indique lo contrario.

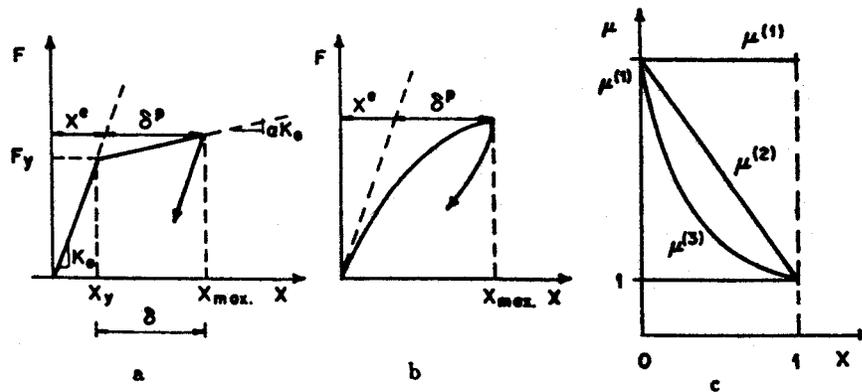


Figura 6. Definiciones de ductilidad según Giberson  
 a) Ciclo bilineal; b) Ciclo no lineal general;  
 c) Variación de ductilidades con el parámetro de endurecimiento  $\alpha$ .

Si las deformaciones se miden a través de curvaturas, en vigas o columnas flexionadas, la *ductilidad de curvatura* en una sección de la misma puede expresarse de la siguiente forma:

$$\mu_x = \frac{\chi_{max}}{\chi_y} \quad (4.4)$$

donde  $\chi_{max}$  es el máximo valor alcanzado por la curvatura y  $\chi_y$  su valor de fluencia (Fig. 7). Esta definición puede utilizarse en un modelo histerético bilineal donde existe un punto marcado de fluencia. En caso contrario para aplicar (4.4) es preciso una definición convencional de la curvatura de fluencia.

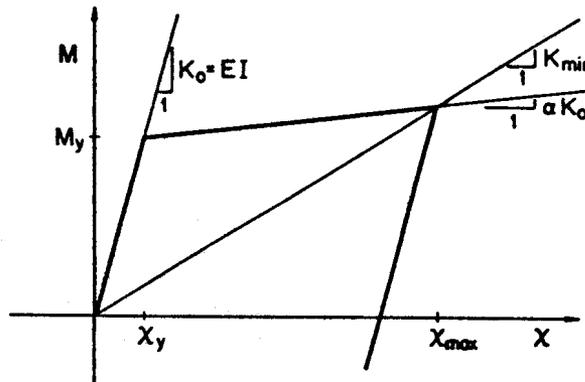


Figura 7. Definición de ductilidad

La misma definición puede aplicarse para otras medidas de deformación y así conducir a una *ductilidad de rotación*.

$$\mu_\theta = \frac{\theta_{max}}{\theta_y} \quad (4.5)$$

o una *ductilidad de desplazamientos*

$$\mu_v = \frac{v_{max}}{v_y} \quad (4.6)$$

siendo  $\theta$  la rotación del extremo de un elemento de pórtico (viga o columna) y  $v$  una medida apropiada de desplazamiento. La definición (4.5) presenta el inconveniente de necesitar una definición convencional de su valor de fluencia. Si se aplica en un extremo del elemento un momento de fluencia  $M_y$ , la rotación  $\theta_y$  asociada al mismo no es única. Es práctica usual en estructuras antisísmicas suponer una deformada antisimétrica para el elemento con lo cual puede precisarse  $\theta_y$  cuyo valor resulta

$$\theta_y = \frac{M_y L}{6EI}$$

siendo  $L$  la longitud del elemento y  $EI$  su rigidez seccional. La hipótesis de deformación antisimétrica es adecuada para pórticos regulares sometidos a cargas

transversales horizontales pero de cualquier manera introduce una normalización convencional para la ductilidad de rotación. Un problema similar ocurre con la definición (4.6). El desplazamiento horizontal del extremo superior de un edificio puede tomarse como desplazamiento típico  $v$  para el cálculo de  $\mu_v$ . En este caso también es necesario adoptar alguna hipótesis para la evaluación del valor de fluencia  $v_y$ . Un estado de cargas laterales con la distribución de las fuerzas sísmicas reglamentarias (por ej., proporcionales a la altura) puede ser una hipótesis adecuada. En ese caso el valor de fluencia  $v_y$  se determina cuando se inicia la plastificación para ese cargamento creciendo monotónicamente. Otras definiciones pueden utilizarse para  $v_y$ .

Por todo lo expuesto se juzga que la definición (4.4) es más adecuada que (4.5) y (4.6) ya que permite estudiar el comportamiento inelástico de las secciones críticas de la estructura, y no se halla sujeta a hipótesis convencionales adicionales. En lo que sigue la palabra "ductilidad" hará referencia implícita a ductilidad de curvatura, a menos que expresamente se manifieste lo contrario.

Para tener en cuenta las deformaciones inelásticas totales que se producen durante cada sentido de deformación, se ha introducido un cociente de *ductilidad cíclica*, definido como

$$\mu_x^c = \frac{\chi^*}{\chi_y} \quad (4.7)$$

donde  $\chi^*$  es la curvatura máxima desarrollada en cada sentido de deformación, medida desde un origen desplazado debido a las deformaciones previas en sentido opuesto (Fig 1) [4,5]. En vez de retener los incrementos acumulados entre dos cambios sucesivos del signo de la deformación, resulta más expeditivo calcular una envolvente para la ductilidad cíclica donde  $\chi^*$  representa la amplitud total de las curvaturas desarrolladas y la definición (4.7) se cambia por:

$$\mu_x^c = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{\chi_{max}^+ - \chi_{max}^-}{\chi_y} - 1 \\ \frac{\chi_{max}^+}{\chi_y} \\ \left| \frac{\chi_{max}^-}{\chi_y} \right| \end{array} \right. \quad (4.8)$$

donde  $\chi_{max}^+$  ( $\chi_{max}^-$ ) es la curvatura de mayor valor positivo (negativo) alcanzado. De aquí en adelante ductilidad cíclica  $\mu_x^c$  hará referencia a la definición (4.8). Esta ductilidad refleja un "rango de valores", en contraste con las definiciones anteriores que proporcionaban un "valor máximo" para la variable estudiada.

Si bien el término *ductilidad* se refiere estrictamente a las definiciones presentadas, en términos de desplazamientos o deformaciones, a continuación se indicarán otros parámetros para la medida del daño estructural, o de los requerimientos de deformaciones inelásticas, que genéricamente se incluirán entre las definiciones de ductilidad. El primero de ellos es la relación entre momentos máximos y momentos de fluencia para una sección:

$$\mu_M = \frac{M_{max}}{M_y} \quad (4.9)$$

Para el caso particular de un ciclo bilineal (Fig. 8) esta definición está relacionada linealmente con la ductilidad de curvatura:

$$\mu_M = \alpha \mu_\chi + (1 - \alpha)$$

de modo que no aporta información nueva a la ya contenida en  $\mu_\chi$ . Si el modelo incorporase una descripción del deterioro de su resistencia, este parámetro recobraría importancia.

Otra definición posible corresponde a la relación de rigideces:

$$\mu_K = \frac{K_0}{K_{\min}} \quad (4.10)$$

siendo  $K_0 = EI$  la rigidez seccional para un extremo del elemento y  $K_{\min}$  el cociente  $M/\chi$  de menor valor absoluto alcanzado durante la respuesta (Fig. 8). Puede observarse que en un modelo bilineal estable

$$\mu_K = \mu_\chi / \mu_M$$

y si se trata de un modelo elastoplástico perfecto.

$$\mu_K = \mu_\chi$$

Este parámetro ha sido utilizado en referencia 10 basado en una "relación de daño" introducida en referencia 11.

Una medida de las deformaciones inelásticas totales experimentadas por un extremo de elemento se obtiene sumando los incrementos de curvatura plástica. El incremento de curvatura durante un paso de análisis puede ser visto como la suma de una parte elástica y otra plástica (Fig. 8):

$$\Delta\chi = \Delta\chi^e + \Delta\chi^p \quad (4.11)$$

$$\Delta\chi^p = (1 - \alpha)\Delta\chi \quad (4.12)$$

La parte plástica  $\Delta\chi^p$  se acumula en:

$$P^+ = \sum \Delta\chi^{p(+)} \quad (4.13.a)$$

y

$$P^- = \sum |\Delta\chi^{p(-)}| \quad (4.13.b)$$

siendo efectuada la sumatoria en el primer caso sobre los pasos con incremento plástico positivo, para obtener  $P^+$ , y en el segundo caso sobre los pasos con incrementos negativos de  $\Delta\chi^p$ . Sumando estos dos acumulados parciales se obtiene la cantidad total de deformaciones plásticas experimentadas.

$$P = P^+ + P^- \quad (4.14)$$

Un valor de *curvatura plástica residual* puede obtenerse con la expresión

$$R = \sum \Delta \chi^p \quad (4.15)$$

donde la diferencia de ésta con la (4.14) estriba en que en (4.15) la sumatoria se realiza sobre todos los pasos con incremento plástico de curvaturas pero manteniendo el signo de cada incremento. De este modo (4.14) está asociada a la energía disipada a través de trabajo plástico de deformación y puede representar fenómenos de fatiga, en tanto que (4.15) está asociada al estado de deformación residual luego de un sismo, y con mediciones que pueden efectuarse en edificios dañados [12]. Estos valores acumulados pueden normalizarse y se introduce a tal efecto las siguientes definiciones.

$$\mu_p = \frac{P}{\chi_y} \quad (4.16)$$

y análogamente

$$\mu_{p+} = \frac{P^+}{\chi_y} \quad (4.17)$$

$$\mu_{p-} = \frac{P^-}{\chi_y} \quad (4.18)$$

como *ductilidades en deformaciones plásticas*.

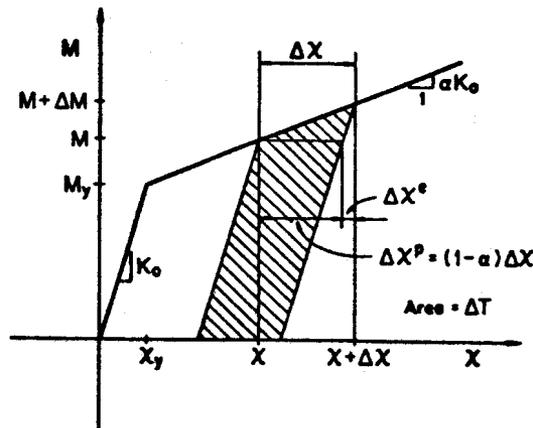


Figura 8. Incremento plástico de curvatura y trabajo plástico de deformación

Otra medida de valores acumulados de respuesta puede obtenerse sumando las contribuciones de cada paso de análisis al *trabajo plástico* desarrollado:

$$T = \sum \Delta T \quad (4.19)$$

Una posible definición del trabajo plástico es, con referencia a la Fig. 8,

$$\Delta T = (1 - \alpha) \left( M + \frac{1}{2} \alpha K_o \Delta \chi \right) \Delta \chi \quad (4.20)$$

siendo representado  $\Delta T$  por el área rayada. El trabajo plástico  $T$  puede ser separado en  $T^+$  y  $T^-$  teniendo en cuenta las deformaciones producidas exclusivamente en sentido positivo y negativo, respectivamente. Tal como se ha hecho con las deformaciones plásticas puede normalizarse este trabajo desarrollado y definir una especie de *ductilidad de trabajo plástico*:

$$\mu_T = \frac{T}{T_o} \quad (4.21)$$

El trabajo  $T_o$  de normalización puede ser definido, por ejemplo, como el trabajo elástico realizado hasta el punto de fluencia:

$$T_o = \frac{1}{2} M_p \chi_f \quad (4.22)$$

También, definiciones obvias pueden hacerse para  $\mu_{T^+}$  y  $\mu_{T^-}$ .

Estas medidas basadas en valores acumulados de deformación y trabajos plásticos están, de alguna manera, relacionadas y en presencia de ciclos estables serían equivalentes. Sin embargo, si las curvas esqueleto varían con los esfuerzos normales y, por tanto, a lo largo del análisis, debería mantenerse la distinción entre ambas medidas plásticas.

Finalmente, debe indicarse que además de las definiciones brindadas, otro resultado interesante a rescatar del análisis es el número de ciclos de deformación plástica experimentados por cada sección crítica. Estrictamente hablando, en lugar del número de ciclos, debería retenerse el número de mitades de ciclo o de *número de hemicyclos*. Para esto se cuenta el número de cambios de signo de la deformación plástica que experimenta cada sección extrema de los elementos.

## 5. DETERMINACION DE DUCTILIDADES EN COLUMNAS DE HORMIGON ARMADO

El momento de fluencia de una sección de columna de hormigón armado es función del esfuerzo normal soportado por esa sección y la dependencia funcional es del tipo mostrado en la Fig. 9. Algunas columnas de edificios altos serán sometidas a grandes variaciones de su esfuerzo normal. En modelos numéricos como el de la Fig. 10 ello implica variaciones proporcionales de la curvatura de fluencia. Así los valores necesarios para normalizar las diferentes definiciones de ductilidad no son únicos y varían a lo largo de la respuesta.

La solución más simple para estimar el requerimiento de ductilidad de una columna es tomar como curvatura de fluencia  $\chi_f$  el valor correspondiente al nivel de esfuerzos normales iniciales, que es debido a las cargas gravitacionales actuando previas al movimiento sísmico. Una mejora con respecto a esta solución fue propuesta por Mahin et al. [6] mediante el cálculo de un promedio ponderado de los momentos de fluencia:

$$M_{ef} = \frac{\sum M_f |\Delta \chi^p|}{\sum |\Delta \chi^p|} \quad (5.1)$$

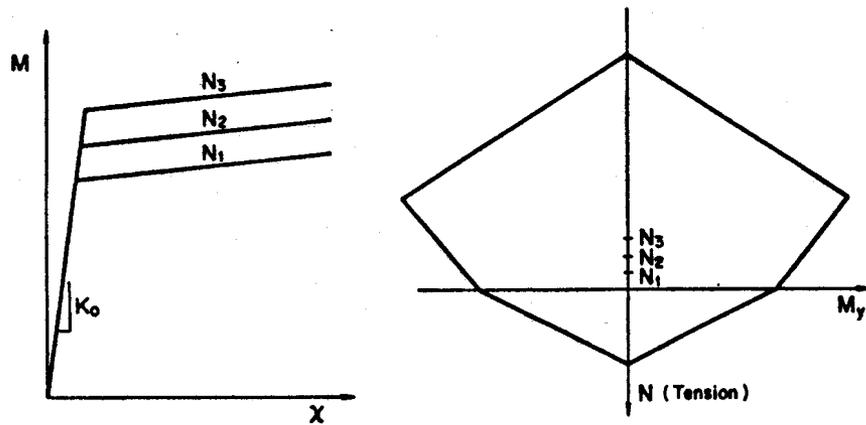


Figura 9. Curvas de interacción y curvas esqueleto variables con los esfuerzos normales

Sin embargo este valor puede no ser mucho mejor que el valor inicial de  $M_y$  (debido a cargas gravitacionales solamente).

Un valor que ha demostrado ser más adecuado para la definición de ductilidades en columnas, puede obtenerse a partir de una expresión similar a (5.1) pero realizando la suma por separado para cada sentido de deformación. Así pueden calcularse dos valores para el momento de fluencia equivalente:

$$M_{eq}^+ = \frac{\sum_{d_{ef}(+)} M_y |\Delta\chi^p|}{\sum_{d_{ef}(+)} |\Delta\chi^p|} \quad (5.2)$$

$$M_{eq}^- = \frac{\sum_{d_{ef}(-)} M_y |\Delta\chi^p|}{\sum_{d_{ef}(-)} |\Delta\chi^p|} \quad (5.3)$$

y sus correspondientes valores de curvatura equivalente  $\chi_{eq}^+ = M_{eq}^+/K_0$  y  $\chi_{eq}^- = M_{eq}^-/K_0$ . Estos valores pueden utilizarse para calcular las diversas ductilidades definidas en la Secc. 3. Los valores máximos positivos de curvaturas, rotaciones, etc., pueden ser normalizados con  $\chi_{eq}^+$ , mientras que los negativos con  $\chi_{eq}^-$ .

Esta propuesta puede comprenderse fácilmente mediante el siguiente razonamiento. La respuesta sísmica de un edificio puede esperarse próxima a su primer modo de vibración. Así, en las columnas (especialmente de pisos inferiores) un incremento en los momentos flectores (debido a "fuerzas" sísmicas laterales) está acompañado por un incremento (o decremento) en el esfuerzo normal de esa columna. La trayectoria de la respuesta en un plano  $N - M$  (esfuerzo normal - momento flector) será del tipo indicado en la Fig. 10. Las deformaciones plásticas en cada sentido estarán localizadas en una porción limitada del diagrama de interacción y en ese caso  $\chi_{eq}^+$  o  $\chi_{eq}^-$  son valores adecuados para la normalización

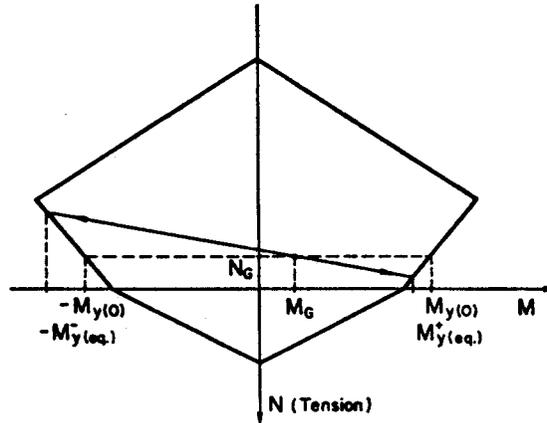


Figura 10. Respuesta en el plano N - M

de las ductilidades. Puede verse también que el simple promedio ponderado (5.1) puede no mejorar mucho la estimación del momento de fluencia inicial.

De este modo las definiciones de la Sec. 4 serán reescritas en términos de las curvaturas equivalentes  $\chi_{eq}^+$  y  $\chi_{eq}^-$  y la definición estandar (4.4) se cambia por:

$$\mu_{\chi(eq)} = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{\chi_{max}^+}{\chi_{eq}^+} \\ \left| \frac{\chi_{max}^-}{\chi_{eq}^-} \right| \end{array} \right. \quad (5.4)$$

la ductilidad cíclica (4.8) por:

$$\mu_{\chi(eq)}^c = \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{\chi_{max}^+}{\chi_{eq}^+} + \left| \frac{\chi_{max}^-}{\chi_{eq}^-} \right| - 1 \\ \frac{\chi_{max}^+}{\chi_{eq}^+} \\ \left| \frac{\chi_{max}^-}{\chi_{eq}^-} \right| \end{array} \right. \quad (5.5)$$

y en forma análoga con el resto de las definiciones.

## 6. DESEMPEÑO DE LAS DIFERENTES DEFINICIONES DE DUCTILIDAD

Se han realizado experiencias numéricas con pórticos de edificios calculados según la norma INPRES-CIRSOC 103 [43]. Se presentan aquí resultados obtenidos para un caso correspondiente a un edificio de 4 pisos, ubicado en la zona sísmica IV y sujeto a los primeros seis segundos del terremoto de El Centro (18/05/40, EE.UU.), previamente escalado. El análisis se efectuó con el programa ANDEN, descrito en referencias 44 y 45. El mismo contempla vigas o columnas con

deformaciones axiales, flexionales y cortantes. Curvas momento-curvatura como la de Fig. 1, con curvas de interacción como los de Fig. 10. Admite zonas de plastificación en los extremos de los elementos, de longitud finita igual a la altura de la sección. Tiene en cuenta el estado de cargas gravitacionales.

La Fig. 12 contiene la numeración de los elementos así como la identificación de las zonas plastificadas al final del análisis. En la Fig. 13 se muestra la relación entre el valor inicial del momento de plastificación y su valor equivalente (5.2) o (5.3), para las diferentes secciones de los elementos (en abscisas). En la Fig. 14 se muestra la traza de la respuesta para una sección, en el plano esfuerzo normal-momento flector ( $N - M$ ). Puede verse que sigue el patrón general de la Fig. 11.

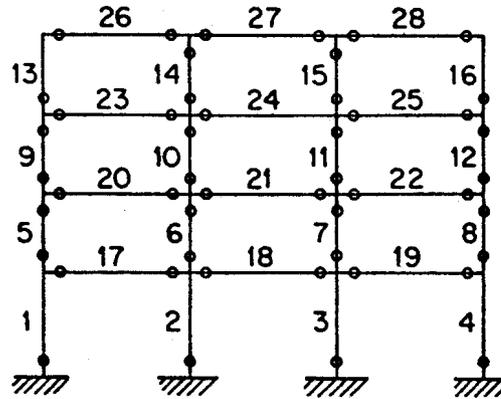


Figura 11. Numeración de los elementos e identificación de las zonas plastificadas

En el Cuadro I se indican los valores de ductilidades calculados con las diferentes definiciones presentadas.

Con referencia a los valores de ese cuadro, puede observarse en las dos primeras columnas la definición estándar de ductilidad de curvatura (4.4) y la ductilidad cíclica (4.8). La ductilidad de rotación (col. 3) no se recomienda por requerir una hipótesis convencional para su definición. La ductilidad de rigidez (col. 4) tampoco parece adecuada para el modelo bilineal utilizado, pues puede presentar variaciones ficticias debido a cambios en los esfuerzos normales. Esta definición podría ser conveniente en modelos con degradación de la resistencia. Las ductilidades basadas en valores acumulados, tales como las ductilidades de deformaciones plásticas (col. 5) y trabajo plástico (col.6), son de naturaleza diferente a las anteriores y pueden ser índices interesantes del daño producido. En columnas 8 y 9 de ese cuadro se muestra el cociente entre estas últimas definiciones y el número de hemiciclos de deformación. Así se consiguen valores "promedios" de deformaciones plásticas y trabajo plástico en cada hemiciclo. Estos últimos valores pueden ser de alguna manera comparados con las definiciones anteriores basadas en valores máximos. Finalmente se indican en columnas 10 y 11 del Cuadro I las definiciones (5.4) y (5.5) para ductilidad de curvatura y ductilidad cíclica equivalentes, respectivamente.

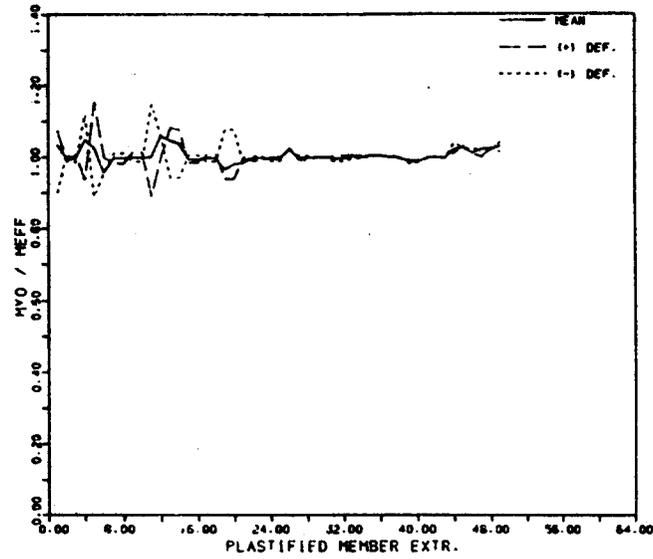


Figura 12. Relación entre momentos de plastificación inicial y equivalentes

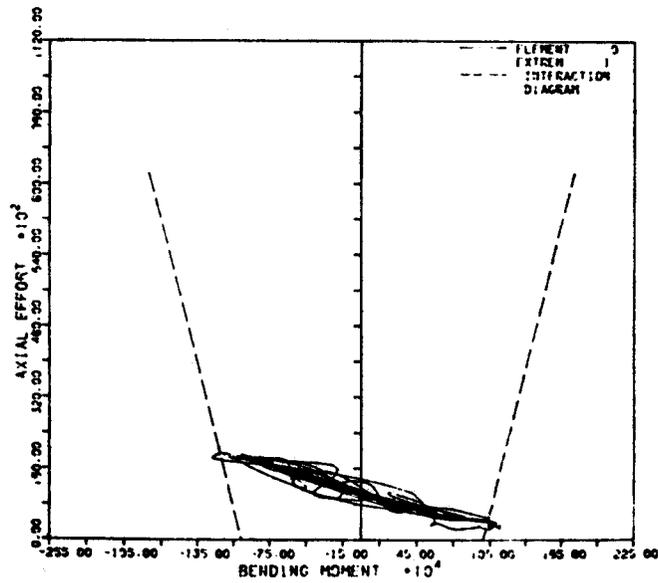


Figura 13. Respuesta en el plano N - M

Cuadro I: Ductilidades

Elemento	Extremo	$\mu_x$	$\mu_x^c$	$\mu_o$	$\mu_K$	$\mu_P$	$\mu_T$	$N_{hc}$	$\frac{F}{N_{hc}}$	$\frac{F}{N_{hc}}$	$\mu_{x(sg)}$	$\mu_{x(sg)}^c$
1	1	2,86	3,12	2,15	2,95	2,70	4,30	1	2,70	4,30	3,08	3,21
2	1	5,11	7,79	2,21	4,75	14,10	24,27	3	4,70	8,09	8,17	7,80
5	1	7,56	11,60	2,93	7,47	20,95	30,01	4	5,24	7,50	8,71	12,18
5	2	2,35	2,35	1,59	2,18	2,23	2,86	0	2,23	2,86	2,25	2,25
6	1	8,39	12,32	2,76	7,33	32,42	57,30	4	8,10	14,32	8,49	12,33
6	2	8,08	12,86	2,88	7,06	33,00	56,67	4	8,25	14,16	8,17	12,85
9	1	6,45	9,20	2,60	6,21	11,69	21,42	1	11,69	21,42	6,99	9,52
9	2	8,88	12,12	3,32	8,06	16,75	28,95	4	4,19	7,24	9,56	12,56
10	1	8,33	14,05	2,64	7,18	27,64	51,01	4	6,91	12,75	8,21	13,97
10	2	8,76	15,22	2,94	7,46	29,19	54,10	4	7,30	13,52	8,63	15,13
13	1	3,42	3,42	1,87	3,21	3,25	5,23	0	3,25	5,23	3,36	3,36
14	1	10,62	14,86	2,50	8,93	36,28	63,90	5	7,25	12,80	10,66	14,85
14	2	9,72	14,14	2,57	8,30	35,86	62,67	5	7,17	12,53	9,75	14,13

Estos valores son juzgados más adecuados, especialmente para columnas, y se proponen para reemplazar a las definiciones estándares (4.4) y (4.8). No se han agregado a este cuadro las modificaciones de las restantes definiciones basadas en curvaturas de plastificación equivalentes, pero su uso es recomendado y lo es especialmente para calcular ductilidades de trabajo plástico de deformación, dado que las variaciones en las curvaturas de normalización resultan elevadas al cuadrado para estas definiciones.

Finalmente puede indicarse que índices apropiados pueden ser por lo menos dos medidas diferentes. Una, de un valor máximo, como pueden ser las definiciones (5.4) o (5.5), y otra de un valor acumulado, como las definiciones (4.16) o (4.21) escritas en términos de curvaturas equivalentes. El uso de dos valores de ductilidad fue propuesto en ref. 46, y una propuesta de índice combinado a partir de los dos valores se hace en ref. 41.

### CONCLUSIONES

Se han mostrado los diversos modelos numéricos utilizados para ciclos de histéresis en estructuras aperticadas de hormigón armado sometidas a sollicitaciones sísmicas. Se han delineado los procedimientos para estimar el daño estructural. Se han brindado diferentes definiciones para el requerimiento de ductilidad mostrándose su desempeño a través de resultados numéricos. Se ha indicado un método propuesto para evaluar un momento de plastificación equivalente que resulta adecuado para el cálculo de ductilidades en columnas, donde hay importantes variaciones del esfuerzo normal.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en la Universidad Nacional del Litoral y con ayuda del Proyecto de Investigación y Desarrollo PID 75000/88 del CONICET.

El dimensionamiento de los pórticos de los ejemplos mostrados fue realizado por la Ing. Lia Orosco, en la Universidad de Tucumán, a quien se agradece la colaboración brindada.

### REFERENCIAS

1. Berg, G.V. and DaDeppo, D.A., "Dynamic analysis of elasto-plastic structures", Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, 86, No. EM2, pp. 35-58, April 1960.
2. Heidebrecht, A.C., Lee, S.-L and Fleming, J.F., "Dynamic analysis of elastic-plastic frames", Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, 90, No. ST2, pp. 315-343, April 1964.
3. Walpole, W.R., and Shepherd, R., "Elasto-Plastic Seismic Response of Reinforced Concrete Frames", Journal of the Structural Division, ASCE, 95, No. ST10, Proc. Paper 6813, pp. 2031-2055, Oct. 1969.
4. Masing, G. "Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing", Proc. Second Internatl. Congr. App. Mech., Zurich, 1926. Citado en: "Fundamentals of Earthquake Engineering", Newmark, N.M. and Rosenblueth, E., Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1971.
5. Ramberg, R. and Osgood, W.R., "Description of Stress-Strain Curve by Three Parameters", Technical Note. 902, NACA, July 1943.
6. Jennings, P.C., "Periodic response of a general yielding structure", Journal of the Engineering Mechanics Div., ASCE, 90, No. EM2, pp. 131-166, April 1964.

7. Menegotto, M. and Pinto, P., "Methods of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and nonelastic behaviour of elements under combined normal force and bending", IABSE Symp., Lisboa, 1973.
8. Sonzogni, V.E., "Modelado del comportamiento histeretico en la respuesta transiente de estructuras inelasticas". III Congreso Latinoamericano sobre Metodos Computacionales para Ingenieria, Buenos Aires, Mayo 1982.
9. Iwan, W.D., "A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response", Journal of Applied Mechanics, American Soc. of Mechanical Engineers, 33, No. 4, pp. 893-900, December 1966.
10. Ozdemir, H., "Nonlinear transient dynamic analysis of yielding structures". Ph.D. Dissertation. Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, Dept. of Civil Engineering, Univ. of California, Berkeley, 1976.
11. Bhatti, M.A. and Pister, K.S., "Transient response analysis of structural systems with nonlinear behavior", Computers & Structures, 13, pp. 181-188, 1981.
12. Clough, R.W. and Johnston, S.D., "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements", Report No. 66-16, Structural Engineering Lab., Univ. of California, Berkeley, Calif., October 1966.
13. Imbeault, F.A. and Nielsen, N.N., "Effect of degrading stiffness on the response of multistory frames subjected to earthquakes", Proc. V World Conf. Earthq. Eng., Rome, pp. 1756-65, 1973.
14. Otani, S., "Inelastic analysis of R/C frame structures", Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 100, No. 7, pp. 1433-49, July 1974.
15. Anderson, J.C. and Townsed, W.H. "Models for RC frames with degrading stiffness", Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 103, No. 12, pp. 2361-76, Dec. 1977.
16. Saïdi, M. and Sozen, M.A., "Simple and complex models for nonlinear seismic response of reinforced concrete structures", Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 465, University of Illinois, Urbana, Illinois, August 1979.
17. Fukada, Y., "A study on the restoring force characteristics of reinforced concrete buildings (Part 1: Formulation and response evaluation of degrading tri-linear model)" (in Japanese), Proceedings of the 40th Kanto District Symposium (Architectural Institute of Japan), Tokyo, Japan, pp. 121-124, Nov. 1969.
18. Iwan, W.D., "A model for the dynamic analysis of deteriorating structures", Proceedings of the Fifth World Conference on Earthquake Engineering, Rome, Italy, Vol. 2, pp. 1782-1791, June 1973.
19. Takeda, T., Sozen, M.A. and Nielsen, N.N., "Reinforced concrete response to simulated earthquake", J. Str. Div. ASCE, 96, No. 12, pp. 2557-73, 1970.
20. Shiga, T. and Ogawa, J., "An experimental study on dynamical behavior of reinforced concrete frames", Proceedings of Japan Earthquake Engineering Symposium 1966, Tokyo, Japan, pp. 321-326, October 1966.
21. Tani, S., Nomura, S., Nagasaka, T., Hiramatsu, A. and Mochizuki, I., "Earthquake response of reinforced concrete structures considering the discontinuous failure process to collapse", Proceedings of the Fifth World Conference on Earthquake Engineering, Rome, Italy, Vol. 1, pp. 1379-1388, June 1973.
22. Takayanagi, T. and Schnobrich, W.C., "Non-linear analysis of coupled wall systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Sussex, 7, No.1, pp. 1-22, Jan./Feb. 1978.
23. Aoyama, H., Ito, M., Sugano, S. and Nakata, S., "A study on the cause of damage to the

- Hachinohe Technical College due to 1968 Tokachi-oki earthquake (Part 1)", Proceedings of the U.S. - Japan Seminar on Earthquake Engineering with Emphasis on the Safety of School Buildings, Sendai, Japan, pp. 199-212, September 1970.
24. Stanton J.F. and Mc Niven H.D., "Towards an optimum model for the response of reinforced concrete beams to cyclic loads", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **11**, pp. 299-312, 1983.
  25. Powell, G.H. and Allahabadi, R., "Seismic damage prediction by deterministic methods: concepts and procedures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, pp. 719-734, 1988.
  26. Mahin, S.A. and Bertero, V.V., "An evaluation of some methods for predicting seismic behavior of reinforced concrete buildings", *Earthquake Engineering Research Center Report No. EERC 75-5*, Univ. of California, Berkeley, 1975.
  27. Blume, J.A., Scholl, R.E., and Lum, P.K., "Damage factors for predicting earthquake dollar loss probabilities", Prepared under contract No. 14-08-0001-1588 for the U.S. Geological Survey, San Francisco, 1977.
  28. Lew, T.K. and Takahashi, S.K., "Rapid seismic analysis procedure", Report No. 51-78-02, Naval Facilities Engineering Command, Port Hueneme, CA, 1978.
  29. Mahin, S.A., Bertero, V.V., Chopra, A.K. and Collins, R.G., "Response of the Olive View Hospital main building during the San Fernando earthquake", *Earthquake Engng. Research Center Report No. EERC 76-22*, Univ. of California, Berkeley, 1976.
  10. Banon, H., Biggs, J.M. and Irvine, H.M., "Seismic damage in reinforced concrete frames"; *J. Structural Div. ASCE*, **107**, ST9, pp. 1713-1729, 1981.
  31. Czarnecki, R.M., "Earthquake damage to tall buildings", Report No. R73-8, Department of Civil Engineering, M.I.T., Cambridge, MA, 1973.
  32. Park, Y.J. and Ang, A.H.S., "Mechanistic seismic damage model for reinforced concrete", *J. Structural Div. ASCE*, **111**, pp.722-739, 1985.
  33. Krawinkler, H. and Zoheri, M., "Cumulative damage in steel structures subjected to earthquake ground motions", *Computers and Structures*, **16**, pp. 531-541, 1983.
  34. Wang, M.L. and Shah, S.P., "Reinforced concrete hysteresis model based on the damage concept", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **15**, pp. 993-1003, 1987.
  35. Park, Y.J., Ang, A.H.S. and Wen, Y.W., "Seismic damage analysis of reinforced concrete building", *J. Structural Div. ASCE*, **111**, pp. 740- 757, 1985.
  36. Giberson, M.F., "Two nonlinear beams with definitions of ductility", *J. Structural Division, ASCE*, **95**, ST2, pp. 137-157 (1969).
  37. Anderson, J.C. and Bertero, V.V., "Seismic behavior of multistory frames designed by different philosophies", *Earthquake Engng. Research Center Report No. EERC 69-15*, Univ. of California, Berkeley, 1969.
  38. Clough, R.W., Benuska, K.L. and Wilson, E.L., "Inelastic earthquake response of tall buildings", *Proc. III World Conf. on Earthquake Engineering*, Vol. II, 1965.
  39. Bertero, V.V., Bresler, B. and Liao, H. "Stiffness degradation of reinforced concrete members subjected to cyclic flexural moments", *Earthquake Engng. Research Center Report No. EERC 69-12*, Univ. of California, Berkeley, 1969.
  40. Shibata, A. and Sozen, M.A., "Substitute- structure method for seismic design in reinforced concrete frames", *J. Structural Division ASCE*, **102**, ST1, pp. 1-18, 1976.
  41. Sansogni, V.E., "Predicción del daño estructural en pórticos de hormigón armado", trabajo enviado a las IX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Buenos Aires, 3-5 oct. 1989.
  42. Meyer, C., Roufaiel, M.S.L. and Arzoumanidis, S.G., "Analysis of damaged concrete

- frames for cyclic loads", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **11**, pp. 207-228, 1983.
43. CIRSOC, "Acción de los sismos sobre las construcciones", Reglamento INPRES-CIRSOC 103, INTI, Buenos Aires, Argentina, 1983.
  44. Sonzogni, V.E. and Bignon, P.G., "Inelastic transient response of reinforced concrete frames", *Adv. Eng. Software*, **5**, pp. 207-214, 1983.
  45. Sonzogni, V.E., Cardona, A. and Idelsohn, S.R., "Inelastic seismic analysis of a building structure designed by argentine codes"; *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **12**, pp. 721-736, 1984.
  46. Banon, H. and Veneziano, D., "Seismic safety of reinforced concrete members and structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **10**, pp. 179-193, 1982.
-

