

## SIMULACION NUMERICA DEL PROBLEMA DE LA ESTRICCIÓN: ESTUDIO DE LA DISTRIBUCION DE TENSIONES EN EL CUELLO DE LA PROBETA

Felipe Gabaldón<sup>†</sup>, Carlos García Garino\* y José María Goicolea<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Departamento de Mecánica, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, Ciudad Universitaria, 28040 Madrid, España  
e-mail: felipe@filemon.mecanica.upm.es, goicolea@filemon.mecanica.upm.es

\*LAPIC, Carrera Redes y Telecomunicaciones, ITU, Universidad Nacional de Cuyo & CONICET  
Casilla de Correo 947, 5500 Mendoza, Argentina  
e-mail: cgarcia@pascal.uncu.edu.ar

**Key Words:** Necking, distribución de tensiones, Tecnología de Elementos, Plasticidad, Grandes Deformaciones.

**Abstract.** *El problema de la estricción de una barra cilíndrica sometida a tracción simple se ha utilizado principalmente en la literatura para validar modelos constitutivos con grandes deformaciones, con énfasis en resultados globales. En este trabajo se analiza con profundidad la distribución de tensiones en el cuello de la probeta y se comprueba la validez de los resultados propuestos por Bridgman. También se explota una idea propuesta por Gabaldón que consiste en comparar los resultados analíticos conocidos para las componentes del tensor desviador de tensiones y la presión en el cuello, con los obtenidos mediante elementos finitos. De esta forma el problema puede ser considerado un benchmark riguroso para validar modelos constitutivos con efectos de plasticidad y grandes deformaciones, así como la tecnología de elementos finitos empleada. Los elementos Q1/P0 permiten obtener buenos resultados en general pero muestran las conocidas dificultades para capturar la distribución de presiones en el cuello. Los elementos con deformaciones mejoradas Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5 permiten mejorar los resultados obtenidos aunque se debe utilizar una cuadratura de 9 puntos para capturar correctamente la distribución de presiones. Todos los elementos utilizados muestran excelentes resultados para las componentes del tensor desviador de tensiones.*

## 1. INTRODUCCION

La simulación numérica del problema de la estricción de una barra cilíndrica circular sometida a tracción simple ha sido estudiado por diferentes autores en forma experimental y numérica y también se conocen algunos resultados analíticos que describen la distribución de tensiones en la zona del cuello.

Los primeros trabajos acerca del problema, basados en experimentos, se deben a Bridgman<sup>1</sup> y a Davidenkov y Spiridinova,<sup>2</sup> trabajos a partir de los cuales dichos autores propusieron los resultados analíticos que se resumen en este trabajo.

Norris et al.<sup>3</sup> presentaron resultados experimentales para una probeta de acero y la correspondiente simulación numérica. Goicolea<sup>4</sup> avanzó en esta dirección comparando resultados experimentales obtenidos mediante probetas de aluminio con resultados numéricos.

En la literatura se ha empleado el problema para validar códigos de elementos finitos con grandes deformaciones y, entre otros autores, Simo<sup>5</sup> y Ponthot<sup>6</sup> han presentado estudios numéricos del problema comparando la variación de resultados frente a distintas mallas, empleando el bien conocido elemento mixto  $Q1/P0$  con campos de desplazamientos lineales y presión constante,<sup>7</sup> para lo cual presentaron resultados globales.

Los autores han profundizado los estudios citados al analizar las capacidades de diferentes códigos no lineales con efectos de grandes deformaciones elastoplásticas, tanto académicos como comerciales, para modelar deformaciones y tensiones en la zona del cuello,<sup>8,9</sup> capturando correctamente los resultados experimentales disponibles. En este sentido la herramienta numérica se torna valiosa para caracterizar ecuaciones constitutivas.

Posteriormente García Garino y coautores<sup>10-12</sup> estudiaron la sensibilidad del problema frente a imperfecciones geométricas en la zona del cuello confirmando que las mismas afectan notablemente la respuesta *global* de la barra, resultado obtenido previamente por Simo y Ponthot (op. cit.). Sin embargo se obtuvo un resultado promisorio desde el punto de vista de la caracterización de materiales cual es que la ecuación constitutiva parece ser insensitiva frente a las imperfecciones,<sup>11,12</sup> a partir del cual se ha iniciado un proyecto de investigación<sup>13</sup> para confirmar experimentalmente los resultados obtenidos. Los autores además han estudiado la sensibilidad de resultados frente a cambios en la malla de elementos finitos,<sup>14</sup> los cuales muestran pocos cambios y permitieron estimar la discretización adecuada para modelar el problema. Una recopilación de los resultados teóricos del problema, el estado del arte del mismo, así como los diferentes estudios numéricos llevados a cabo pueden consultarse en un reciente informe de los autores.<sup>15</sup>

En este trabajo se profundiza el estudio de la distribución de tensiones en el cuello de la probeta, para lo cual se comparan los resultados teóricos debidos a Bridgman<sup>1</sup> con los obtenidos numericamente. En este sentido cobra gran relevancia la propuesta de Gabaldón<sup>16</sup> de comparar los resultados numéricos con los analíticos para las componentes del tensor desviador de tensiones y la presión en el cuello. Del estudio realizado se desprenden importantes conclusiones, entre las cuales cabe citar la confirmación de los resultados teóricos, la posibilidad de utilizar este problema como un exigente problema de prueba

así como estudiar la bondad de los diferentes elementos finitos empleados en la simulación computacional.

Para obtener los resultados numéricos que se presentan en este trabajo se ha utilizado el código SOGDE,<sup>17</sup> con capacidad para modelar problemas de elastoplasticidad con grandes deformaciones, que posteriormente fue extendido por Gabaldón<sup>16</sup> para incluir elementos con deformaciones aumentadas<sup>18,19</sup>

## 2. RESULTADOS TEORICOS

A partir del estado de deformaciones del problema<sup>15</sup> puede comprobarse que el tensor de tensiones de Cauchy en la sección del cuello se escribe:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

De la cinemática del problema surge<sup>15</sup> que las componentes radiales y tangenciales  $\sigma_r$  y  $\sigma_\theta$  respectivamente son iguales.

Aplicando el criterio de fluencia de Von Mises al estado de tensiones anterior, resulta:

$$\sigma_z - \sigma_r = Y \quad (2)$$

siendo  $Y$  la tensión de fluencia uniaxial.

Bridgman<sup>1</sup> propuso la siguiente relación entre las componentes radial  $\sigma_r$  y axial del tensor de tensiones  $\sigma_z$  y la tensión de fluencia  $Y$ :

$$\sigma_r = Y \log \left( 1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \quad (3)$$

$$\sigma_z = Y \left[ 1 + \log \left( 1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \right] \quad (4)$$

donde  $D$  es el diámetro de la sección en la zona del cuello,  $R$  es el radio de curvatura de una línea isostática y  $r$  es la coordenada radial en la sección del cuello. El inconveniente de la expresión anterior es la dificultad para medir el radio de curvatura  $R$  a lo largo del experimento. Bridgman<sup>1</sup> propuso la siguiente expresión para expresar el radio de curvatura  $R$  en función de la deformación longitudinal  $\varepsilon_z$ :

$$\frac{D}{R} = 2\sqrt{\varepsilon_z - 0,1} \quad (\varepsilon_z > 0,1) \quad (5)$$

Con el fin de profundizar en el conocimiento del problema Gabaldón propuso utilizar las componentes del tensor desviador  $s_r$  y  $s_z$  y de la presión  $p$  en la zona del cuello. De acuerdo con el estado tensional expresado en (1), la presión vale:

$$p = \frac{2\sigma_r + \sigma_z}{3} \quad (6)$$

y sustituyendo en esta expresión los resultados (2) y (4), se obtiene:

$$\frac{p}{Y} = \frac{1}{3} + \log \left( 1 - \frac{r^2}{DR} + \frac{D}{4R} \right) \quad (7)$$

Asimismo, expresando la ecuación (2) en términos de las tensiones desviadoras,  $s_r$  y  $s_z$ , e imponiendo que la traza del tensor de tensiones desviadoras es 0, se obtiene que dichas tensiones son constantes en el cuello y valen:

$$s_r = -\frac{1}{3}Y \quad (8)$$

$$s_z = \frac{2}{3}Y \quad (9)$$

Los resultados obtenidos, sorprendentemente simples para el caso de las componentes del tensor desviador en la zona del cuello permiten obtener valores de comparación muy útiles para contrastar resultados numéricos.

Es importante destacar que las componentes del tensor de tensiones quedan completamente definidas en función del valor de la tensión de fluencia  $Y$ , que a su vez es función de la deformación logarítmica  $\varepsilon_z = -2 \log \frac{D}{D_0}$ , mediante una ecuación constitutiva uniaxial como la que se discute en el próximo apartado.

**Observación 2.1** *La relación  $D/D_0$  mediante la ecuación constitutiva uniaxial determina el valor de la tensión de fluencia en el cuello. Esta propiedad, que puede ser sumamente útil para calibrar la ecuación constitutiva de un código de elementos finitos, ha sido sugerida en trabajos previos de los autores<sup>12,20</sup> y recientemente por Valiente.<sup>21</sup>*

**Observación 2.2** *Es interesante destacar que el estado triaxial de tensiones que tiene lugar en la zona de la estricción, acompañado de fuertes cambios locales en la geometría, está completamente determinado por el parámetro escalar  $D/D_0$ .*

En resumen los resultados obtenidos son importantes por dos razones complementarias:

1. Los resultados presentados constituyen una excelente fuente para calibrar códigos no lineales capaces de resolver problemas de plasticidad con grandes deformaciones
2. La existencia de resultados numéricos conocidos permitirá validar las expresiones presentadas debidas a Bridgman,<sup>1</sup> que se basan en las ecuaciones de la elasticidad y en algunas hipótesis simplificadoras

### 3. SIMULACION NUMERICA

Para reproducir numéricamente el ensayo de tracción, se ha escogido una probeta de aluminio HE30 (BS1474), idéntica a la utilizada en.<sup>4</sup> La probeta tiene una altura de 75 mm. y diámetro 16,2 mm. En los extremos de la probeta se impone un desplazamiento de 10 mm. Dada la simetría existente solo se ha modelizado una cuarta parte. La malla empleada y las condiciones de contorno se muestran en la figura 1. El modelo tiene 412 nodos y 360 elementos, resultando un total de 762 grados de libertad.

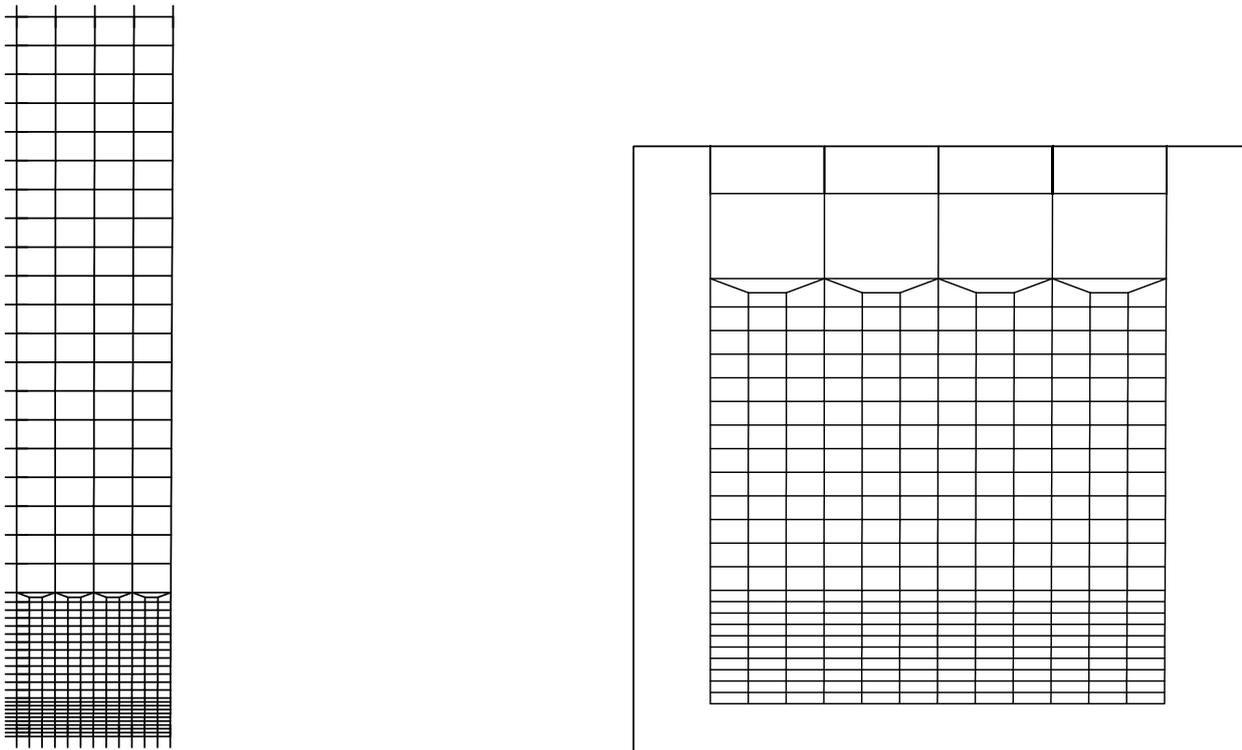


Figura 1: *Malla y condiciones de contorno. Detalle de la zona refinada y de la transición*

Para que se desarrolle la estricción se introduce una pequeña imperfección geométrica (también presente en la probeta real), disminuyendo el radio en la sección central en un 1,8518 % respecto del nominal. La variación del radio entre la sección central y la sección extrema es lineal.

La formulación del modelo constitutivo  $J_2$  empleado en el cálculo está descrita en.<sup>16,17</sup> Las constantes elásticas correspondientes al aluminio del ensayo son:

$$E = 67000 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

La ley de endurecimiento empleada es una ley potencial del tipo:

$$Y(\varepsilon) = A(b + \varepsilon^p)^n \quad (10)$$

Los valores de las constantes  $A$  y  $n$  se toman del trabajo de Goicolea:<sup>4</sup>

$$A = 181,7 \text{ GPa}$$

$$n = 0,159$$

El parámetro  $b$  se obtiene imponiendo en la ecuación (10) que el límite elástico inicial sea  $Y_0 = 50 \text{ MPa}$ , resultando:

$$b = 2,989 \cdot 10^{-4}$$

### 3.1. Elemento Q1/P0

En la figura 2 se muestra para la distribución de tensiones en el cuello, la comparación entre los resultados numéricos obtenidos con el elemento Q1/P0<sup>7</sup> y los resultados semi-empíricos debidos a Bridgman dados por las ecuaciones (3) y (4).

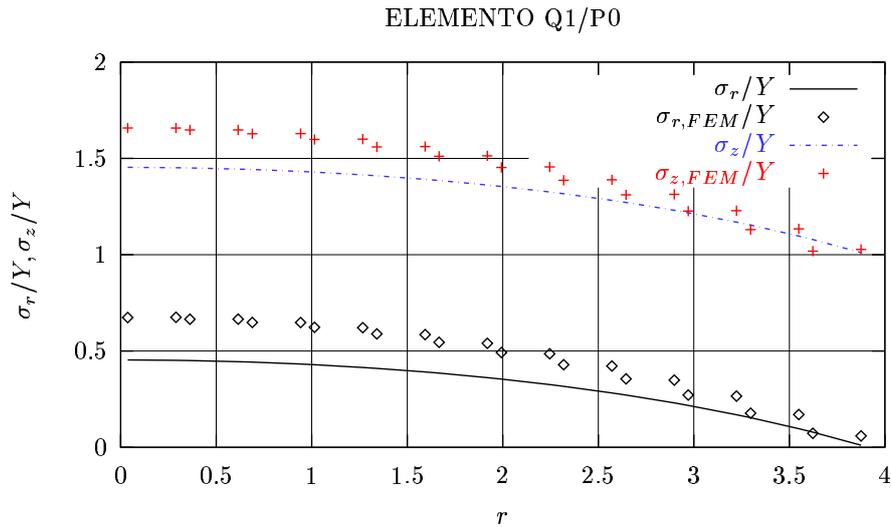


Figura 2: Distribución de tensiones radiales y verticales en el cuello. Comparación entre los resultados numéricos obtenidos con Q1/P0 y los resultados teóricos

Como se observa en la figura 2 las distribución de tensiones obtenida numericamente con el elemento Q1/P0 tiende a los distribución teórica, pero sin embargo existen diferencias cuantitativas que son mayores hacia el eje de la probeta tanto para las tensiones radiales como para las longitudinales.

Con el fin de investigar las diferencias encontradas se emplean las expresiones analíticas de las componentes del tensor desviador  $s_r$ ,  $s_z$  y la presión  $p$  en la zona del cuello, dadas

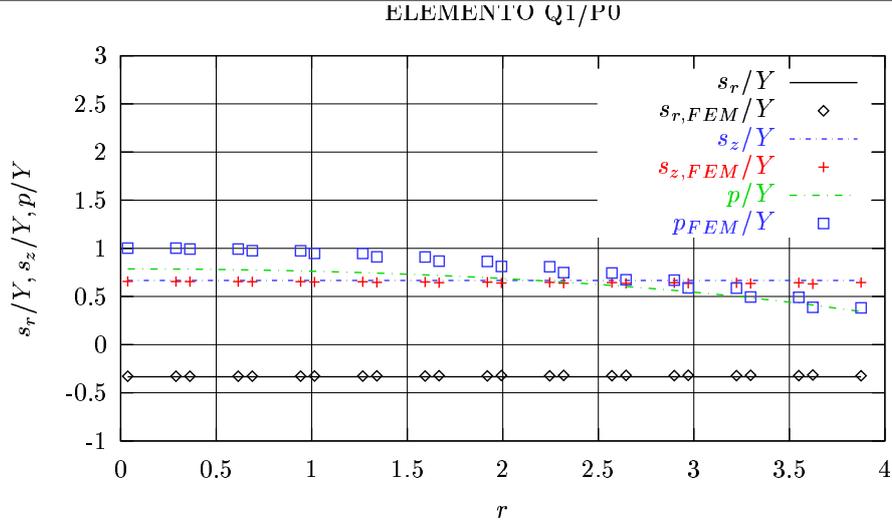


Figura 3: Distribución de las componentes desviadoras  $s_r$ ,  $s_z$  y la presión  $p$  en el cuello. Comparación entre los resultados numéricos obtenidos con Q1/P0 y los resultados teóricos

por las ecuaciones 8, 9 y 7 respectivamente. En la figura 3 se comparan las distribuciones analíticas con las obtenidas numericamente con los elementos Q1/P0. De la figura 3 surge que se captura perfectamente el valor de las componentes desviadoras pero existen diferencias cuantitativas para la distribución de la presión, que bien puede deberse a las bien conocidas limitaciones del elemento Q1/P0 para modelar los campos de presiones. Consecuentemente las discrepancias que muestra la figura 2 entre los valores numéricos y los teóricos parece deberse a la dificultad en el modelado de las presiones, que pese a su versatilidad y economía presenta Q1/P0.

### 3.2. Elementos con deformación mejorada

En la literatura se ha planteado la opción de los denominados Elementos con deformaciones mejoradas<sup>1819222316</sup> (EAS, Enhanced assumed strain) como una alternativa para superar algunas de las limitaciones de los elementos usuales, como resultan el bloqueo por corte o el tratamiento de la incompresibilidad. Resulta conveniente en este caso investigar el comportamiento de estos elementos para simular apropiadamente el campo de presiones en la zona del cuello.

Para ello las curvas de las figuras 4 5 y 6 comparan los perfiles de tensiones analíticos con los obtenidos empleando los elementos mejorados Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5, integrados con cinco y nueve puntos de Gauss respectivamente.

De estas curvas se extraen las siguientes conclusiones:

1. En general, la distribución de tensiones se ajusta de manera razonable a la obtenida por Bridgman (3),(4), sin embargo cuando se emplean cuadraturas con 5 puntos de Gauss existen oscilaciones de los valores numéricos en la proximidad del eje de

revolución.

2. Cuando se emplean reglas de integración de 9 puntos de Gauss los perfiles de tensiones obtenidos numéricamente ajustan muy bien con los resultados semi-empíricos debidos a Bridgman(3),(4).

Las figuras 7 y 8 muestran la distribución de las tensiones desviadoras y de la presión en el cuello. En ellas se comparan las distribuciones analíticas dadas por las ecuaciones (8), (9) y (7), con las obtenidas mediante elementos finitos usando cuadraturas de 5 y 9 puntos respectivamente.

Puede comprobarse que en ambos casos los resultados numéricos correspondientes a las componentes del tensor desviador se ajustan perfectamente a los valores analíticos. Sin embargo se observan oscilaciones en la distribución de las presiones para la cuadratura de 5 puntos, que prácticamente desaparecen cuando se emplea una cuadratura de 9 puntos.

La comparación de las distribuciones numéricas obtenidas con Q1/P0, ver figura 3 con las obtenidas con los elementos con deformaciones mejoradas, ver figuras 7 y 8, permite observar que los resultados debidos a Q1/P0 mientras que los resultados obtenidos con los elementos Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/E5 con una cuadratura de 5 puntos en general aproximan mejor a la distribución analítica pero presentan oscilaciones en la proximidad del eje de revolución que desaparecen cuando se emplea una cuadratura de 9 puntos.

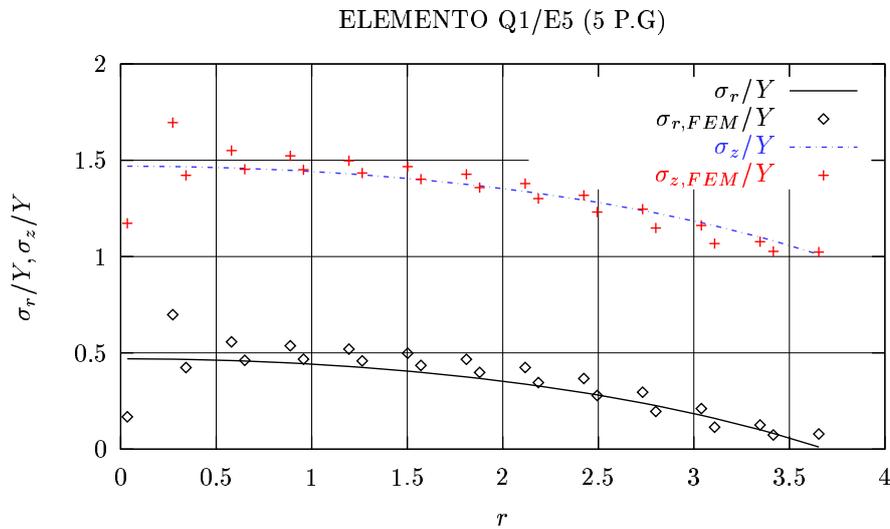


Figura 4: Distribución de tensiones radiales y verticales en el cuello para el elemento Q1/E5

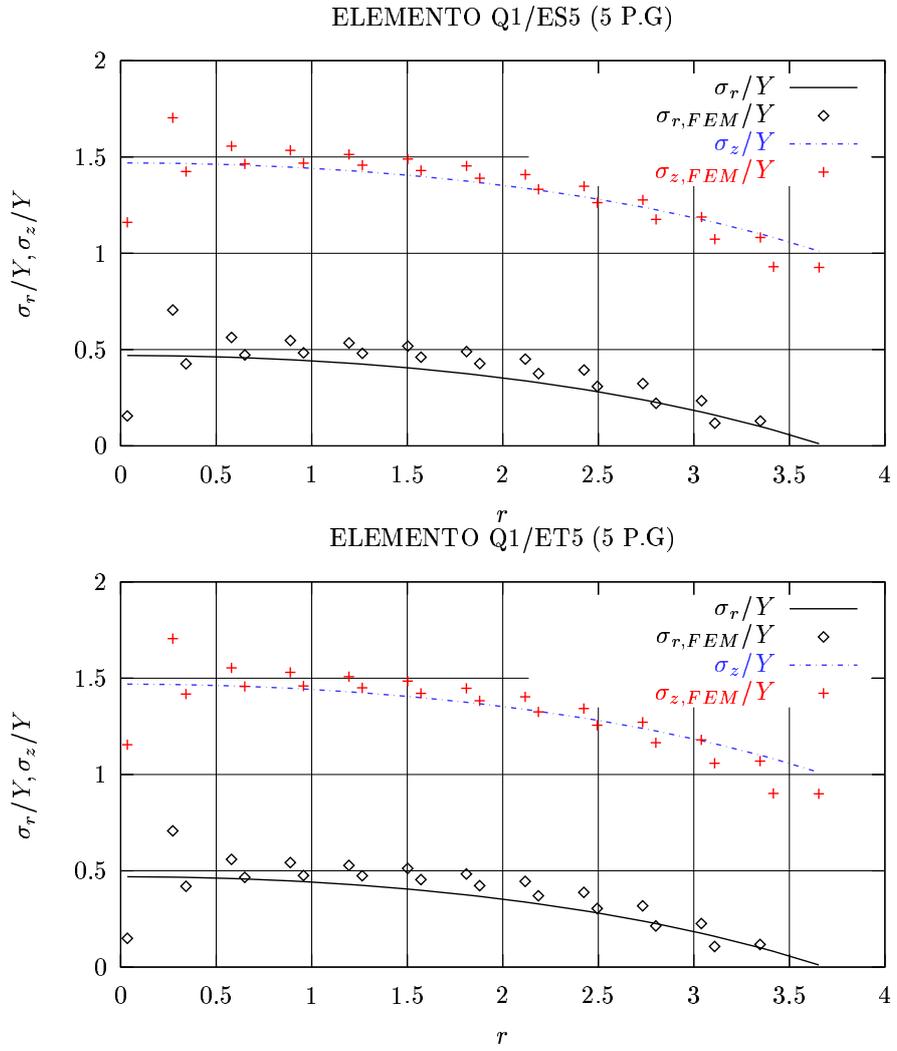


Figura 5: *Distribución de tensiones radiales y verticales en el cuello*

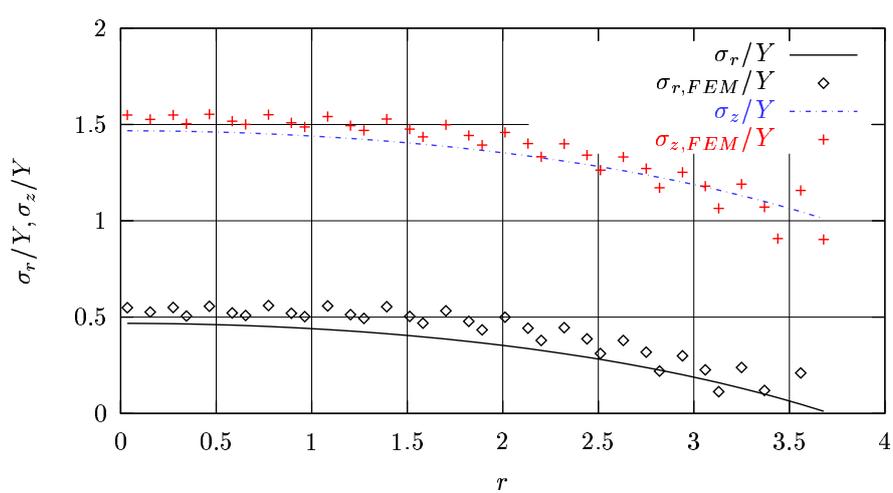
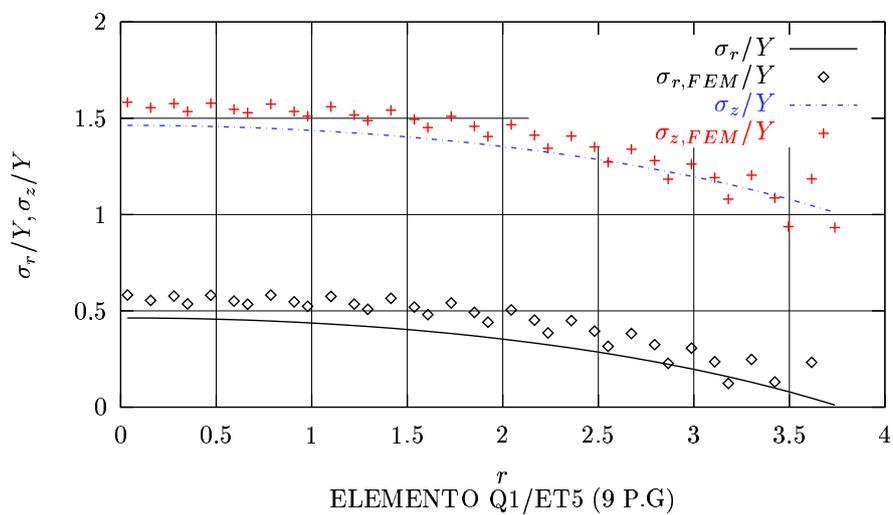
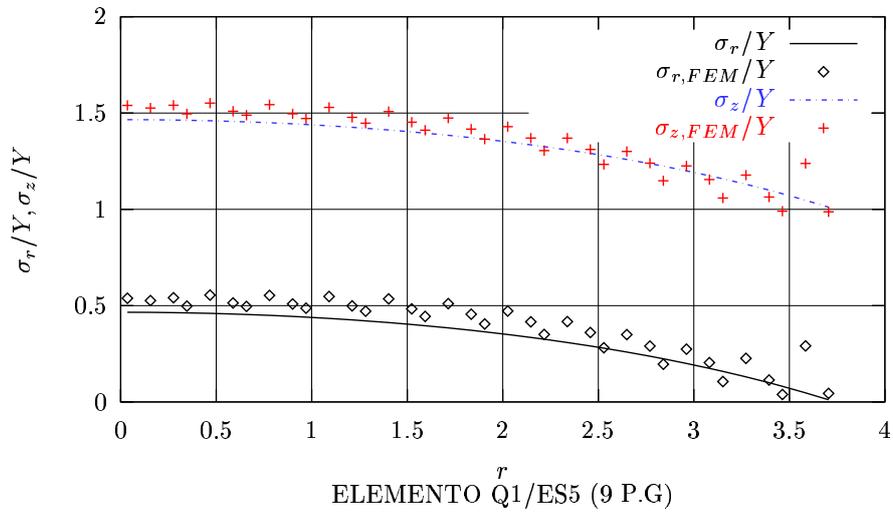


Figura 6: Distribución de tensiones radiales y verticales en el cuello

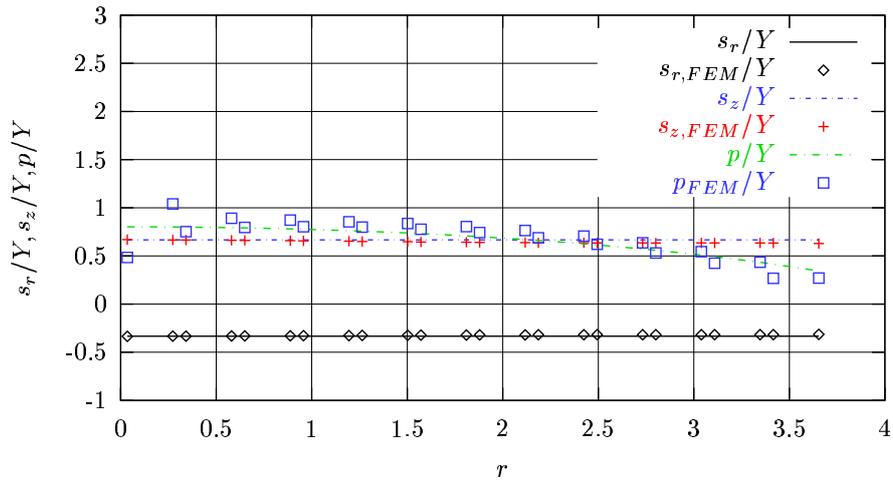
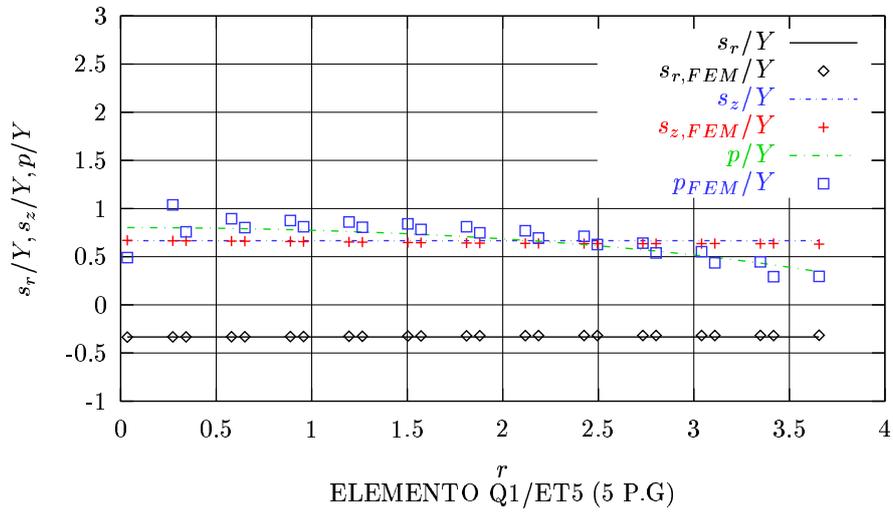
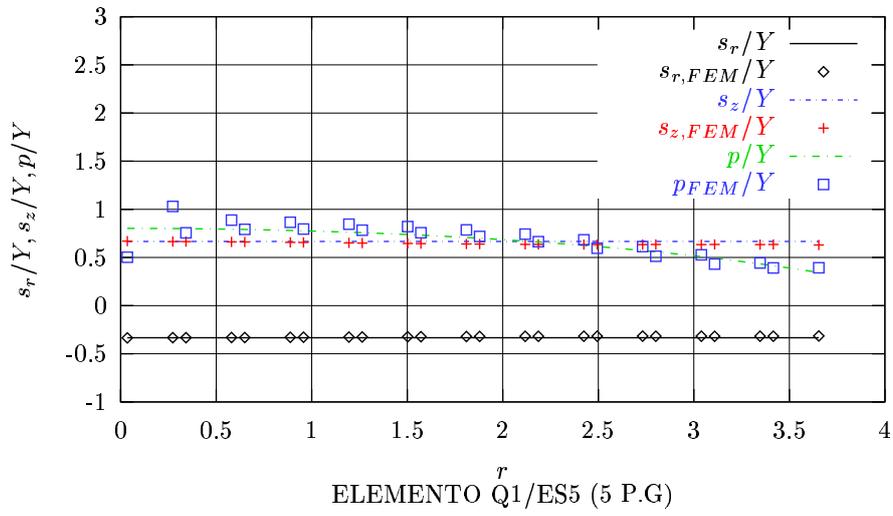


Figura 7: Distribución de presiones y tensiones desviadoras radiales y verticales en el cuello

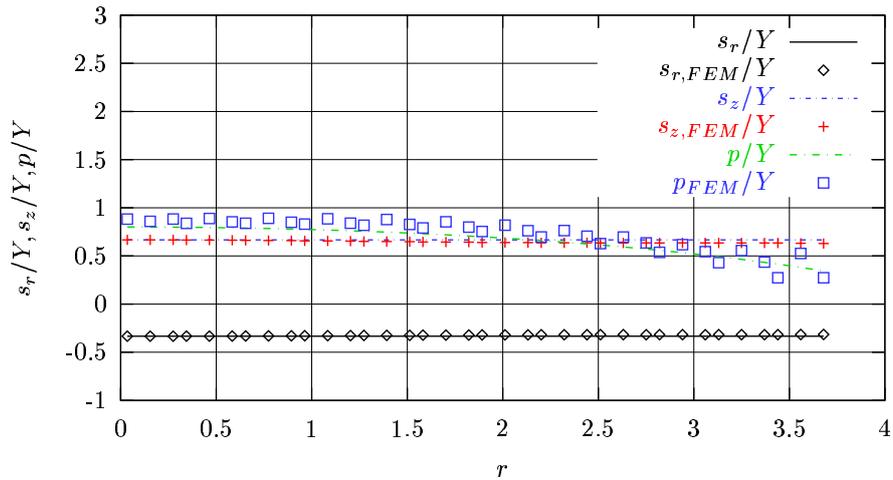
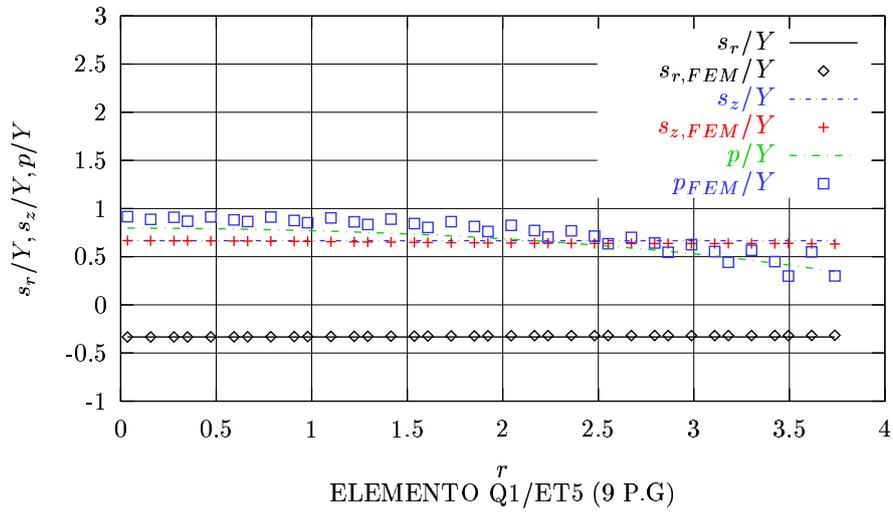
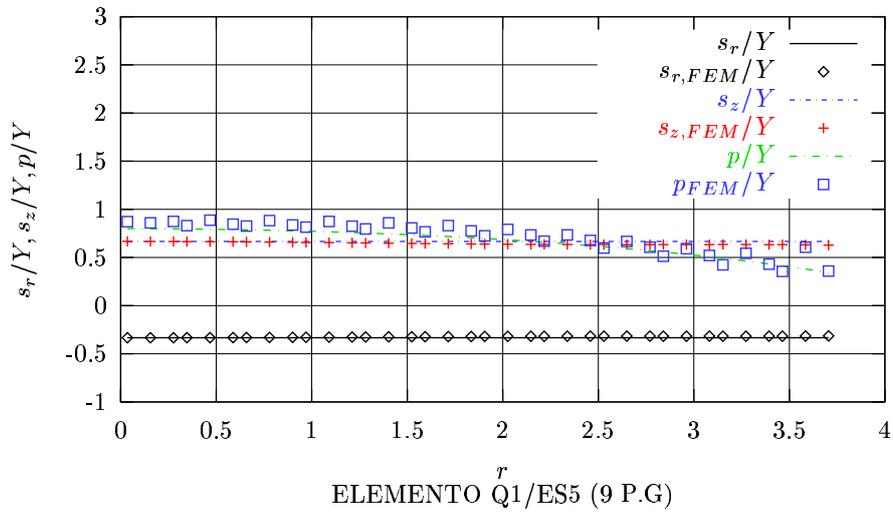


Figura 8: Distribución de presiones y tensiones desviadoras radiales y verticales en el cuello

#### 4. CONCLUSIONES

1. Los valores numéricos obtenidos con los diferentes elementos finitos utilizados en la simulación del problema permiten confirmar la validez de los resultados de Bridgman<sup>1</sup>
2. La simulación del problema de la estricción resulta de esta manera un exigente problema de prueba que además de permitir la calibración de códigos de elementos finitos no lineales y modelos constitutivos con grandes deformaciones, también puede emplearse para comprobar la calidad de la aproximación del elemento finito empleado
3. El elemento Q1/P0 simula muy bien la distribución analítica de las componentes del tensor desviador, pero falla en la captura de la distribución de la presión en la zona del cuello, y consecuentemente en la distribución de las componentes del tensor de tensiones. Los perfiles obtenidos resultan suaves en todos los casos y pese a las diferencias cuantitativas obtenidas la simulación tiende a los valores analíticos.
4. Los elementos Q1/E5, Q1/ES5 y Q1/ET5 también simulan muy bien la distribución de las componentes del tensor desviador, tanto para la cuadratura de 5 puntos como para la de 9 puntos.
5. Cuando se emplea una cuadratura de 5 puntos los elementos con deformación aumentada mejoran la calidad de las aproximaciones obtenidas con Q1/P0 para la distribución de la presión en el cuello, pero presentan oscilaciones en la proximidad del eje de revolución. El empleo de una cuadratura de 9 puntos elimina las oscilaciones y mejora la aproximación numérica.
6. Parece importante estudiar la sensibilidad frente a la malla de elementos finitos de los resultados numéricos obtenidos para la distribución de tensiones en el cuello. Un estudio semejante para resultados globales realizado por los autores<sup>14</sup> mostro poca sensibilidad frente a la variación de la malla, pero los resultados obtenidos en este trabajo no permiten garantizar el mismo resultado.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradacen al programa FONCyT de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) el subsidio concedido al proyecto PICTR 12-03268, que ha permitido elaborar este trabajo.

#### REFERENCIAS

- [1] P.W. Bridgman. The stress distribution at the neck of a tensile specimen. *Transactions of the American Society of Metals*, **32**, 553–574 (1944).

- [2] N.N. Davidenkov and N.I. Spiridonova. Analysis of the state of stress in the neck of a tension test specimen. In *Proceedings of American Society of Testing Materials*, volume 46, pages 1147–1158, (1946).
- [3] D.M. Norris, B. Moran, J.K. Scudder, and D.F. Quiñones. A computer simulation of the tension test. *Journal of Mechanics, Physics and Solids*, **26**, 1–19 (1978).
- [4] J.M. Goicolea. *Numerical modelling in large strain plasticity with application to tube collapse analysis*. PhD thesis, University of London, (1985).
- [5] J.C. Simó. A framework for finite strains elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. part ii: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **68**, 1–31 (1988).
- [6] J.P. Ponthot. *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par le méthode des éléments finis*. PhD thesis, Universidad de Lieja, Bélgica, (1994).
- [7] J.C. Nagtegaal, D.M. Parks, and J.R. Rice. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **4**, 153–177 (1974).
- [8] J.M. Goicolea, F. Gabaldón, and C. García-Garino. Interpretación de la estricción en el ensayo de tracción empleando modelos hipoelásticos e hiperelásticos. In M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete, and M. Pastor, editors, *Memorias del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Zaragoza, (1996). SEMNI.
- [9] C. García-Garino, J. M. Goicolea, and F. Gabaldón. Simulación numérica del ensayo de tracción simple. In G. Etse and B. Luccioni, editors, *Mecánica Computacional*, volume 17, pages 425–436, (1996).
- [10] C. García-Garino, A. Mirasso, S. Raichman, and J.M. Goicolea. Estricción de barras metálicas cilíndricas: sensibilidad frente al tamaño y tipo de las imperfecciones. In G. Etse and B. Luccioni, editors, *Mecánica Computacional*, volume 17, pages 437–444, (1996).
- [11] C. García-Garino, A. Mirasso, S. Raichman, and J. M. Goicolea. Imperfection sensitivity analysis of necking instability in circular cylindrical bars. In D.R.J. Owen, E. Oñate, and E. Hinton (Eds.), editors, *Computational Plasticity*, pages 760–764, Barcelona, (1997). Cimne.
- [12] C. García-Garino, A. Mirasso, S. Raichman, and J. M. Goicolea. Local and global sensitivity analysis of necking instability in circular cylindrical bars. In Elena Croitoro, editor, *First Canadian Conference on Non Linear Solids Mechanics*, pages 760–764, Victoria, Canada, (1999). University of Victoria and Pacific Institute of Mathematics.
- [13] C. García-Garino, A. Mirasso, V. Vera, F. Gabaldón, J. Goicolea, and S. Raichman. Empleo de métodos numéricos y experimentales para determinar ecuaciones constitutivas de metales en régimen de grandes deformaciones. Proyecto PICT-12-03268. FONCYT. ANPCyT. En curso, (2002-2004).
- [14] C. García-Garino, F. Gabaldón, J. M. Goicolea, and A. Mirasso. Simulación numérica

- del problema de la estricción de una probeta cilíndrico circular. sensibilidad de los resultados frente a la malla de elementos finitos. In M. Rosales, V. Cortinez, and D. Bambill, editors, *Mecánica Computacional*, volume 22, pages 1921–1940, (2003).
- [15] C. García Garino, F. Gabaldón, J. M. Goicolea, A. Mirasso, and S. Raichman. Simulación computacional del ensayo de tracción simple con estricción. Technical report, Universidad Nacional de Cuyo and Universidad Politécnica de Madrid., (2004). IT-1-02-2004.
- [16] F. Gabaldón. *Métodos de elementos finitos mixtos con deformaciones supuestas en elastoplasticidad*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, (1999).
- [17] C. García-Garino. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, Barcelona, (1993).
- [18] J.C. Simó and F. Armero. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **110**, 359–386 (1993).
- [19] F. Armero and S. Glaser. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, **14**, 759–791 (1997).
- [20] C. García-Garino, A. Mirasso, S. Raichman, and J. M. Goicolea. Análisis de sensibilidad local y unicidad aparente en el problema de estricción de barras metálicas. In C. Garcia-Garino, A. Mirasso, J. Barón, and J.Ñuñez McLeod, editors, *Mecánica Computacional*, pages 281–288, (1999).
- [21] A. Valiente. On bridgman’s stress solution for a tensile neck applied to axisymmetrical blunt notched tension bars. *Journal of Applied Mechanics*, **68**, 412–419 (2001).
- [22] J.C. Simó and S.M. Rifai. A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 1595–1638 (1990).
- [23] S. Glaser and F. Armero. Recent developments in the formulation of assumed enhanced strain finite elements for finite deformation problems. Technical report, University of California at Berkeley, (1995). Report UCB/SEMM-1995/13.