

IMPLEMENTACIÓN DE UNA TÉCNICA DE
TRIANGULACIÓN DE DOMINIOS PLANOS A PARTIR
DE UN CONTORNO

Enzo A. Dari
Jorge Pierini
Marcelo J. Vénere
División Mecánica Computacional
Centro Atómico Bariloche - CNEA
Bariloche - Argentina

RESUMEN

Se describe un esquema automático para la generación de una malla de elementos finitos triangulares, en un dominio plano arbitrario, definido mediante su contorno. El esquema genera nodos sobre el mismo y nodos interiores. Interactivamente se pueden quitar, colocar o mover nodos. Una vez que la ubicación de los nodos es satisfactoria se obtiene la mejor triangulación posible con los mismos.

Este esquema fue implementado como módulo del generador de redes ENREDO, permitiendo la utilización de las facilidades que ofrece el mismo. Se trabaja en forma interactiva con facilidades gráficas, obteniéndose con poco esfuerzo por parte del usuario redes de muy buena calidad.

ABSTRACT

An automatic mesh generation technique is described, which creates triangular finite elements on arbitrary planar domains with given boundaries. The scheme defines both interior and boundary nodes. At this point, interactive removal, displacement and insertion of nodes are possible, so as to match user's requirements. Then, the algorithm selects the best possible triangulation with the given grid points.

The scheme was implemented as a module in ENREDO, a more general mesh generator, allowing the use of its features. High quality meshes are obtained with little user effort.

INTRODUCCIÓN:

Los elementos más simples que se pueden utilizar para dividir un dominio bidimensional son los triángulos, los cuales unen a su simplicidad una serie de ventajas tales como:

- Son los elementos que mejor se adaptan a contornos irregulares.
- Permiten un cambio progresivo y suave del tamaño en distintas zonas de la red sin una distorsión importante.
- Es posible automatizar el proceso de partición de elementos, garantizándose que la forma de los mismos permanece aceptable. [1-3]
- En el método de Elementos Finitos, las integrales numéricas a realizar en cada elemento se reducen a cálculos de áreas.
- Los triángulos son los elementos bidimensionales que producen la estructura de la matriz del sistema de ecuaciones a resolver con la mínima cantidad de no-ceros.

Se han desarrollado numerosas técnicas [4] para obtener la partición de un dominio en triángulos. Describiremos aquí la implementación de una de ellas, la triangulación automática [5-6], la cual posee las siguientes ventajas:

- Total generalidad de fronteras del dominio
- Se pueden tratar dominios múltiplemente conexos, sin necesidad de dividir en sub-dominios convexos.
- Permite mantener la más amplia posibilidad de estructura de la red, es decir, el número de elementos alrededor de un nodo no está determinado a-priori, como lo estaría en una red estructurada.
- Facilidad de generación, desde el punto de vista del usuario.
- Produce elementos de buena calidad.
- No es necesario buscar alguna relación matemática entre las fronteras del dominio.

DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO UTILIZADO:

El algoritmo parte de la información de la frontera del dominio. Dicha información está dada como un conjunto de puntos en el plano, conectados por lados que forman una frontera exterior y (probablemente) otros conjuntos de puntos describiendo una o más fronteras interiores.

A partir de esta información, en primer lugar se generan sobre esta frontera los nodos de borde. En base a esta frontera discretizada, se generan los nodos interiores. Dados los nodos, diferenciados en nodos del contorno exterior, nodos de contornos interiores y nodos internos, se decide la Conectividad de la red, es decir la forma de conectar los nodos formando triángulos que llenen el dominio y no se superpongan.

GENERACIÓN DE LOS NODOS DE LA RED:

Dado un contorno, (ya sea el contorno exterior o un contorno interior), se considera nodo el primer punto de su

descripción, el siguiente nodo se coloca a una distancia DS (longitud característica de la partición), recorrida sobre el contorno, y así sucesivamente, hasta llegar al primer nodo. Si el último nodo está a una distancia menor que DS/2 del primero, se lo excluye. (Ver fig. 1)

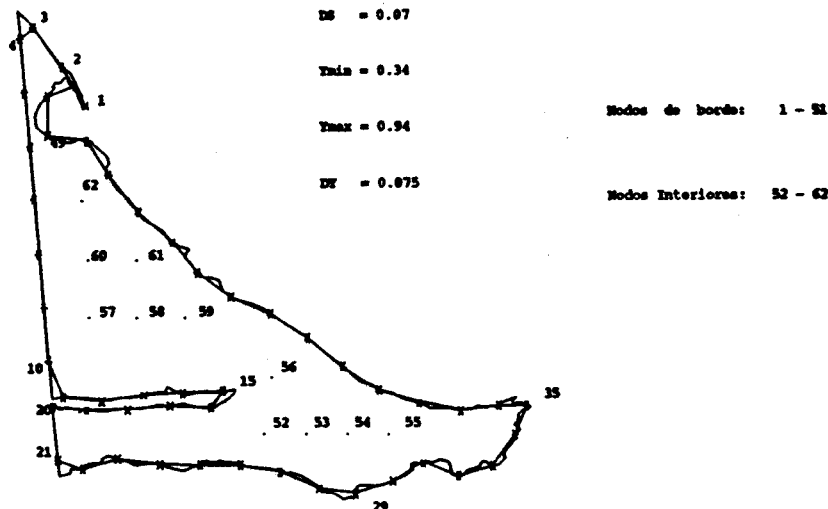


Figura 1 : Generación de nodos en un dominio irregular

Para generar los nodos interiores se procede de la siguiente manera: (Ver fig. 1)

-Se hallan las ordenadas mínima y máxima de dominio: Ymin, Ymax.

-Se trazan líneas imaginarias horizontales entre Ymin e Ymax, con separación:

$$DY = (Ymax - Ymin) / [(Ymax - Ymin) / DS]$$

-Para cada línea horizontal, se hallan los puntos de intersección con todos los contornos discretizados, quedando definidos segmentos interiores al dominio.

-En cada uno de estos segmentos se colocan nodos espaciados una distancia: $DX = LS / [(LS/DS)]$ (LS: Longitud del segmento), excluyéndose aquellos nodos que estén a una distancia $< DS/2$ de otros nodos de borde.

[[.]] : Indica parte entera

GENERACIÓN DE LA CONECTIVIDAD DE LA RED:

Una vez obtenidos todos los nodos que van a formar la red, se ordenan los nodos del contorno exterior en forma antihoraria, y los de los contornos interiores en forma horaria.

Llamamos Frente de Generación (FG) (Ver fig. 2) a la frontera de la porción del dominio que aún no fue triangulada. Obviamente en el comienzo de la triangulación, el FG coincide con la frontera del dominio.

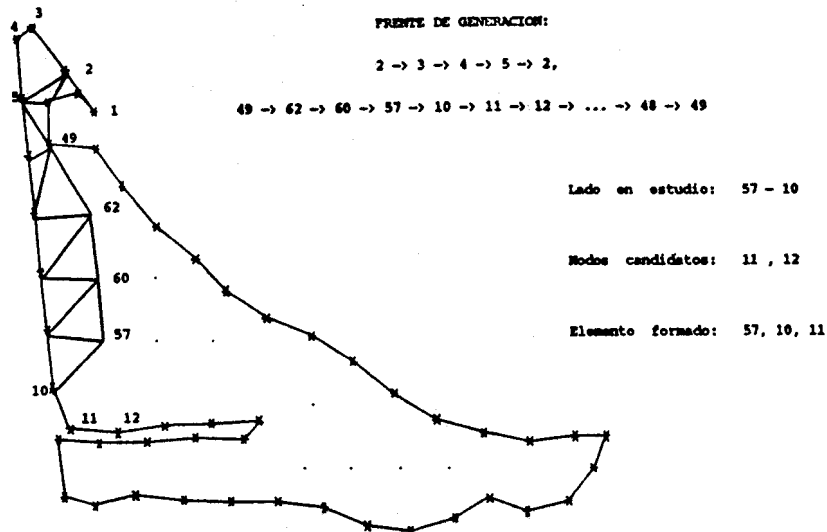


Figura 2: Paso intermedio en la generación de la conectividad

Para formar un elemento se procede de la siguiente manera: Se elige un lado cualquiera del FG (dado el ordenamiento de la frontera del dominio, la red por generar queda a su izquierda), y se selecciona un nodo para que, con el lado elegido, forme el próximo elemento a generar. Se incluye este elemento en la lista de la conectividad de la red y se actualiza el FG.

Selección del mejor nodo:

Dado un lado del FG se debe elegir un nodo de manera que:

- El área del triángulo formado sea positiva (el nodo debe quedar a la izquierda del lado)
- No se superponga con otros elementos (no debe quedar dentro del triángulo formado ningún nodo)

Para cumplir estos requisitos, el algoritmo utilizado selecciona los nodos candidatos de la siguiente forma (Ver fig. 2): se descartan los nodos totalmente rodeados por elementos o por elementos y el exterior del dominio (éstos son los nodos que alguna vez pertenecieron al FG y que ya no están en él, nodos 1, 6, 7, 8, 9, 50 y 51 en la figura 2); se descartan los nodos que formarían un triángulo de área negativa. Del resto de los nodos se seleccionan los 2 que minimicen la norma cuadrática del perímetro del triángulo a formar. Para decidir entre estos dos, se toma el cuadrilátero que forman con el lado y se analiza la calidad de las dos particiones posibles. La calidad de la partición es la suma de las calidades de los triángulos resultantes. La calidad de un triángulo se define como su área dividida por la norma cuadrática de su perímetro; este número adimensional es claramente máximo e igual a $\sqrt{3}/12$ para un triángulo equilátero.

En caso de que el cuadrilátero no sea convexo, el criterio adoptado siempre se decide por el elemento de menor área, evitándose que quede un nodo interior a un elemento.

Una vez seleccionado el nodo, se almacena la información del nuevo elemento generado y se actualiza el frente de generación. Se elige un lado del nuevo FG y se reinicia el procedimiento. Cuando el frente de generación desaparece, la red está completamente generada.

COMENTARIOS ADICIONALES:

Para el almacenamiento del FG se utilizó la técnica de "listas enganchadas" (linked lists), la cual permite acotar la memoria necesaria. Consiste en utilizar un vector entero de punteros, de longitud igual al número de nodos de la red, conteniendo en la posición de cada nodo que pertenece al FG el valor del nodo siguiente. En caso de que el nodo no pertenezca al frente, se almacena un 0 en la posición correspondiente.

Este algoritmo fue implementado como un módulo del generador de redes ENREDO [7-8], el cual cuenta con facilidades tales como: suavizado de la red, densificación local por partición de elementos o deformación de la red, borrado de partes de la red, pegado de redes, etc.

Cabe mencionar que el método utilizado para seleccionar el mejor nodo (propuesto en [6]) puede fallar en algunos casos de fronteras irregulares. Según se muestra en la Fig. 3, el nodo elegido para formar un elemento con el lado 234-92 es el 95, elección claramente errónea. Para tratar estos casos se debió agregar un "test de aceptabilidad": el nodo es aceptable si es el nodo siguiente en el frente de

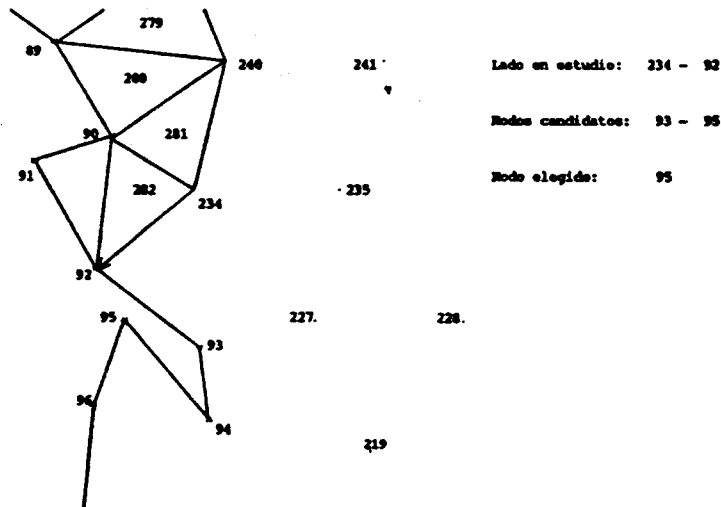


Figura 3 : Elección errónea del nodo más conveniente

generación o si forma un triángulo de área positiva con el lado siguiente en el FG (en ambas direcciones). Esta verificación se realiza con el par de nodos más cercanos (en el sentido ya explicado) al segmento en estudio. Si ninguno de estos dos nodos pasa el test, no se forma ningún elemento y se toma otro lado del FG.

El algoritmo ha sido verificado con numerosos ejemplos de contornos muy irregulares, observándose un excelente comportamiento. En la Fig. 4 mostramos una red generada sobre un dominio múltiplemente conexo muy irregular. En la Fig 5

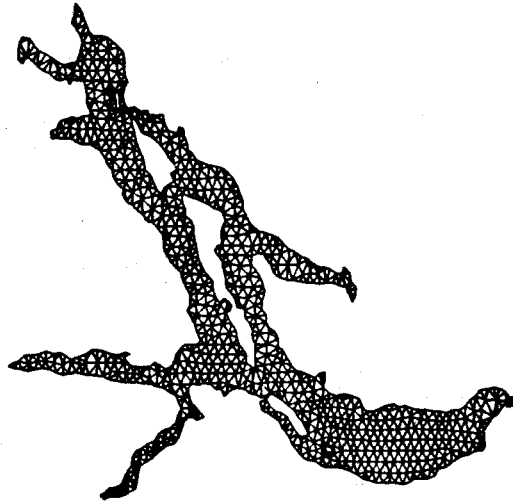


Figura 4: Ejemplo de un dominio múltiplemente conexo muy irregular

se puede observar una red para modelar el flujo entre perfiles aerodinámicos. La misma fue generada por el método de triangulación automática, y luego fue densificada en las zonas en que se espera un fuerte gradiente en la solución, utilizando las facilidades del generador ENREDO. En la Fig 6 realizamos una comparación entre la generación a partir del borrado de elementos y deformación de una red estructurada, y la generación a partir de la triangulación directa del dominio. Como se puede observar, la forma de los triángulos es mucho mejor en el segundo caso, ya que el número de elementos que coinciden en un nodo no es fijo, sino que se ajusta en cada zona de la red de manera de obtener la mejor triangulación posible.

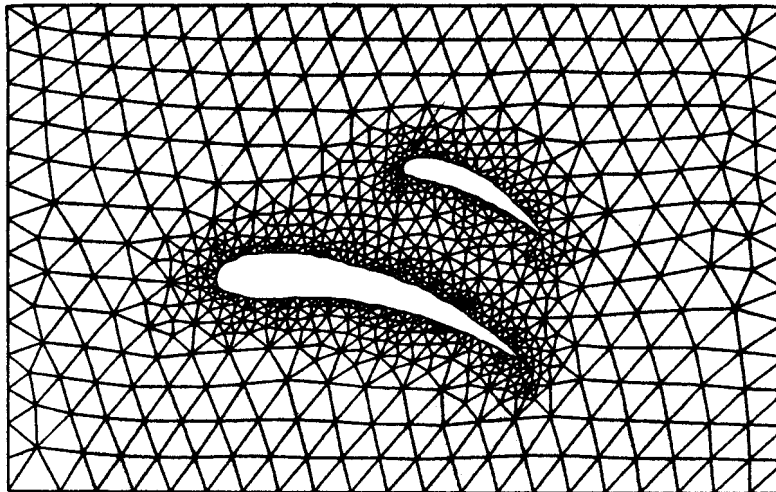


Figura 5: Red que modela el perfil de un ala doble

CONCLUSIONES

Se implementó un algoritmo para la triangulación automática de dominios irregulares múltiplemente conexos.

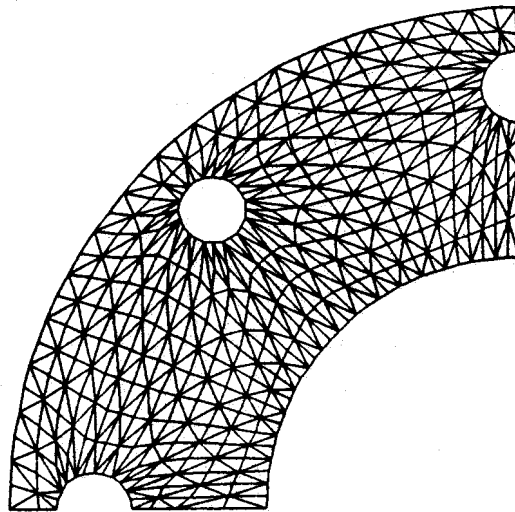
El mismo permite tratar geometrías muy irregulares, manteniendo una buena calidad de elementos, debido a la inherente no-estructuración de la red.

Es posible también, la generación de una red sobre un dominio, requiriendo una información mínima del usuario.

Este esquema fue implementado como módulo de un generador de redes bidimensionales más complejo (ENREDO).

REFERENCIAS

- [1] M. C. RIVARA - "Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices" SIAM Jou. of Numer. Analysis Vol. 21 No. 3 pp 604-613 (1984)
- [2] M. C. RIVARA - "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques" Int. Jou. for Numer. Methods in Eng. Vol. 20 pp 745-756 (1984)
- [3] M. C. RIVARA - "A grid generator based on 4-triangles conforming mesh-refinement algorithms" Int. Jou. for Numer. Methods in Eng. Vol. 24 pp 1343-1354 (1987)
- [4] W. C. THACKER - "A brief review of techniques for generating irregular computational grids" Int. Jou. for Numer. Methods in Eng. Vol. 15 pp 1335-1341 (1980)

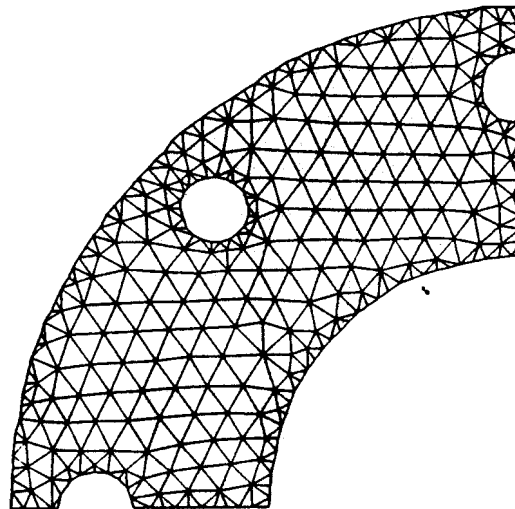


(a)

BRIDA :
Generación por deformación
y Borrado de partes de
una Red Estructurada

672 Elementos

398 Nodos



(b)

BRIDA :
Generación por
Triangulación Automática
del dominio

537 Elementos

350 Nodos

Figura 6 : Comparación entre distintos métodos
de generación de redes

- [5] J. C. CAVENDISH - "Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the Finite Element Method" Int. Jou. for Numer. Methods in Eng. Vol. 8 pp 679-696 (1974)

- [6] S. H. LO - "A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains" Int. Jou. for Numer. Methods in Eng. Vol. 21 pp 1403-1426 (1985)
 - [7] M. J. VENERE - "ENREDO - Generador de redes de Elementos Finitos para recintos irregulares de dos dimensiones" presentado en ENIEF'86, 4° Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios del Método de Elementos Finitos, Bariloche, 1986
 - [8] M. J. VENERE - "Técnicas prácticas de generación de redes. Su incorporación al generador de redes ENREDO" presentado en ENIEF'87, 5° Encuentro Nacional de Investigadores y Usuarios del Método de Elementos Finitos, Bariloche, 1987
-

