SOBRE UN PROBLEMA DE CONDUCCION DEL CALOR ESTACIONARIO CON UNA FUENTE DE ENERGIA INTERNA

Graciela G. Garguichevich
Domingo A. Tarzia
PROMAR (CONICET-UNR),
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agr., Univ. Rosario,
Avda. Pellegrini 250,
(2000) Rosario , Argentina.

RESUMEN

Se considera un problema de conducción del calor estacionario en un material representado por un dominio $\Omega \subset \Re^n$ con frontera regular $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Se supone la existencia de una fuente de energía interna g constante y se mantiene sobre Γ_1 la temperatura $b > 0$ y sobre Γ_2 el flujo de calor q , siendo Γ_3 una pared adiabática. Considerando que la temperatura de cambio de fase es 0°, se estudia la relación que debe existir entre q y g para que el material presente dos fases (líquida y sólida) en Ω , en tres ejemplos distintos. En los tres casos se calcula la función flujo crítico $q_C = q_C(g)$.

ABSTRACT

We consider the problem of the steady temperature distribution of a body $\Omega \subset \Re^n$ with a regular boundary $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. We assume that it exists a constant internal energy g and we keep Γ_1 at the temperature $b > 0$ and a constant heat flux q on Γ_2 , while the heat flux on Γ_3 is null. We consider that the phase-change temperature is 0°, and we study which must be the relation between q and g such that two phases of the material (liquid and solid) are present in Ω, in three different examples. In all the cases, we obtain the critical flux function $q_C = q_C(g)$.

1. FORMULACION GENERAL DEL PROBLEMA CON DATOS CONSTANTES.

Se considera el problema de la distribución estacionaria de temperatura θ de un cuerpo $\Omega \subset \Re^n$ en el que actúa una fuente de energía g constante.

Se supone que Ω tiene una frontera regular $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ con $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ y Γ_1 , Γ_2 de medida (n-1) dimensional positiva ($|\Gamma_i| > 0$, $i = 1, 2$), admitiéndose el caso $\Gamma_3 = \emptyset$.

Se asume además, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase del material es 0°.

Se mantiene $\theta = b > 0$ constante sobre Γ_1 y el flujo constante q sobre Γ_2 y nulo sobre Γ_3 .

En estas condiciones, se estudiará, en tres ejemplos, la relación entre las constantes q y g (para un dado valor de temperatura $b > 0$) para que se presenten dos fases del material.

Si se define la temperatura $\theta = \theta(x)$ de la siguiente manera :

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 , & x \in \Omega_1 \quad \text{(fase sólida)} \\ 0 , & x \in \mathcal{L} \quad \text{(frontera libre)} \\ \theta_2(x) > 0 , & x \in \Omega_2 \quad \text{(fase líquida)} \end{cases} \tag{1.1}$$

con $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \mathcal{L}$, entonces se deben satisfacer las siguientes condiciones :

$$\begin{cases} - k_i \, \Delta\theta_i = g & \text{en } \Omega_i \quad (i = 1, 2) , \\ \theta_1 = \theta_2 = 0 \ , \ k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n} & \text{sobre } \mathcal{L} , \\ \theta_2 = b > 0 & \text{sobre } \Gamma_1 , \\ - k_2 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial n} = q & \text{si } \theta > 0 \text{ sobre } \Gamma_2 , \\ - k_1 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial n} = q & \text{si } \theta < 0 \text{ sobre } \Gamma_2 , \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \Gamma_3 , \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $k_i > 0$ es el coeficiente de conductividad térmica de la fase i ($i = 1$: fase sólida, $i = 2$: fase líquida) y n es la normal exterior a Γ_2 , Γ_3 o $\mathcal{L}$ según corresponda.

Este problema resulta equivalente a [5,6] :

$$\begin{cases} -\Delta u = g \quad \text{en } \Omega , \\ u \mid_{\Gamma_1} = B = k_2\, b , \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = q , \\ \frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Gamma_3} = 0 , \end{cases} \tag{1.3}$$

siendo $u = u(x)$ la nueva función incógnita, definida de la siguiente manera :

$$u = k_2\, \theta^{+} - k_1\, \theta^{-} \quad \text{en } \Omega , \tag{1.4}$$

y que admite también las siguientes formulaciones variacionales [3,5] :

$$\begin{cases} u \in K_B , \\ a(u,v-u) = L(v-u) , \ \forall v \in K_B \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad J(u) = \underset{v \in K_B}{\mathrm{Min}}\ J(v) \tag{1.5}$$

siendo

$$\begin{cases} V = H^1(\Omega) , \qquad K_B = \left\{ v \in V : v \mid_{\Gamma_1} = B \right\} , \\ a(u,v) = \displaystyle\int_{\Omega} \nabla u \, \nabla v \, dx , \\ L(v) = g \displaystyle\int_{\Omega} v \, dx - q \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma , \\ J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - L(v) . \end{cases} \tag{1.6}$$

La única solución $u = u_{Bqg}$ de (1.3) (ó (1.5)) queda caracterizada por la expresión :

$$u_{Bqg} = B - q\, u_1 + g\, u_2 \tag{1.7}$$

donde u_1 y u_2 son, respectivamente, las únicas soluciones de los siguientes problemas :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \text{ en } \Omega \,, \\ u_1 |_{\Gamma_1} = 0 \,, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} |_{\Gamma_2} = 1 \,, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} |_{\Gamma_3} = 0 \,, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} u_1 \in V_0 = \left\{ v \in V : v|_{\Gamma_1} = 0 \right\} , \\ a(u_1,v) = \displaystyle\int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \quad , \quad \forall v \in V_0 \,, \end{cases} \tag{1.8}$$

y

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 1 \quad \text{en } \Omega \,, \\ u_2 |_{\Gamma_1} = 0 \,, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial n} |_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} = 0 \,, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} u_2 \in V_0 \,, \\ a(u_2,v) = \displaystyle\int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \quad , \quad \forall v \in V_0 \,. \end{cases} \tag{1.9}$$

Resulta además, por al principio del máximo [3,4], que se tienen las siguientes propiedades :

* u_1 y u_2 son funciones positivas en Ω . (1.10)

* si $g \geq 0$, entonces se tiene la siguiente equivalencia :

$$u_{B\alpha g} \geq 0 \text{ en } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad u_{B\alpha g} \geq 0 \text{ en } \Gamma_2 \tag{1.11}$$

De (1.7) y (1.10) es claro también que se deduce :

* $0 < B_1 \leq B_2$, $\alpha_2 \leq \alpha_1$ y $g_1 \leq g_2 \quad \Rightarrow \quad u_{B_1\alpha_1 g_1} \leq u_{B_2\alpha_2 g_2}$ en Ω , (1.12)

y si algunas de las desigualdades es estricta, entonces se obtiene que $u_{B_1\alpha_1 g_1} \neq u_{B_2\alpha_2 g_2}$ en Ω .

Esto permite definir la función flujo crítico (para cada $B > 0$), por analogía a la dada en [1], de la siguiente manera :

$$q_C : \Re \to \Re ,$$
$$g \to q_C(g) \tag{1.13}$$

de manera que :

* si $q \leq q_C(g)$, es $u_{Bqg} \geq 0$ en Ω (hay una sola fase).

* si $q > q_C(g)$, u_{Bqg} cambia de signo en Ω (se presentan dos fases).

En [2] se ha estudiado el problema (1.3) en el caso más general cuando B, q y g no son necesariamente constantes, generalizándose la definición (1.13) y obteniéndose estimadores para $q_C(g)$. Más aún, el caso particular $g = 0$ fue tratado en [1,5 - 7]

En el caso de datos constantes, si se define la función de dos variables

$$F : \Re^2 \to \Re ,$$
$$(g,q) \to F(g,q) = J(u_{Bqg}) . \tag{1.14}$$

se obtiene que $F \in C^\infty(\Re^2)$ y además viene expresada de la siguiente manera :

$$F(q,g) = -\frac{c_2}{2} g^2 + c_{12}\, q\, g - B\, |\Omega|\, g + B\, |\Gamma_2|\, q - \frac{c_1}{2} q^2 \tag{1.15}$$

donde

$$c_1 = a(u_1, u_1) = \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma > 0 ,$$
$$c_{12} = a(u_1, u_2) = \int_\Omega u_1 \, dx = \int_{\Gamma_2} u_2 \, d\gamma > 0 , \tag{1.16}$$
$$c_2 = a(u_2, u_2) = \int_\Omega u_2 \, dx > 0 ,$$

siendo sus derivadas parciales dadas por :

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \int_{\Gamma_2} u_{Bqg}\, d\gamma = -\, c_1\, q + c_{12}\, g + B\, |\Gamma_2|\,, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial g} = -\int_{\Omega} u_{Bqg}\, dx = c_{12}\, q - c_2\, g - B\, |\Omega|\,. \tag{1.18}$$

Se obtienen, de (1.17) y (1.18) respectivamente, los siguientes estimadores para q_C :

$$q_C \leq \frac{c_{12}\, g + B\, |\Gamma_2|}{c_1} = R_1(g)\,, \quad \forall g \geq 0 \tag{1.19}$$

(en virtud de (1.11)) y

$$q_C \leq \frac{c_2\, g + B\, |\Omega|}{c_{12}} = R_2(g)\,, \quad \forall g \in \Re\,. \tag{1.20}$$

En este trabajo se estudiarán tres ejemplos cuyas características permitirán demostrar algunas propiedades particulares y calcular la función flujo crítico en forma explícita, lo cual no puede siempre asegurarse en el caso general; más aún, se generalizarán ciertas desigualdades obtenidas en [5] para el caso particular $g = 0$ (ver más detalles en [7]).

2. RESOLUCION DEL PROBLEMA (1.3) Y CALCULO DE LA FUNCION FLUJO CRITICO EN TRES CASOS PARTICULARES.

Se considerará el problema (1.3) para los tres casos siguientes :

Ejemplo 1 :

$$\begin{aligned} & n = 2\,, \ \Omega = \left\{ (x,y) : 0 < x < x_0\,, 0 < y < y_0\,, x_0 > 0\,, y_0 > 0 \right\}, \\ & \Gamma_1 = \left\{ (x,y) : x = 0\,, 0 \leq y \leq y_0 \right\}, \\ & \Gamma_2 = \left\{ (x,y) : x = x_0\,, 0 \leq y \leq y_0 \right\}, \\ & \Gamma_3 = \left\{ (x,y) : 0 < x < x_0\,, y = 0 \text{ ó } y = y_0 \right\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ejemplo 2 :

$n = 2 \quad , \quad 0 < r_1 < r_2 \quad ,$ $\qquad r \, , \, \omega$: polar coordinates in $\Re^2$,

$$\Omega = \left\{ (r,\omega) : r_1 < r < r_2 \right\} , \tag{2.2}$$

$$\Gamma_i = \left\{ (r,\omega) : r = r_i \right\} , \quad i = 1, 2 ,$$

$$\Gamma_3 = \emptyset .$$

Ejemplo 3 :

El mismo que el ejemplo 2 pero para la dimensión del espacio $n = 3$. (2.3)

El hecho de que en (1.3) los datos B, q y g son constantes y la particular elección de Ω, Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 en estos casos, provoca que la solución u dependa de una sola variable ($u = u(x)$ en el primer ejemplo y $u = u(r)$ en los dos restantes) y por ende resolver (1.3) se reduce a resolver un problema de contorno para una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden, obteniéndose en cada caso que u_{Bqg} está dada por (1.7) siendo :

* en el ejemplo 1 :

$$\begin{cases} u_1(x) = x \, , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\; 0 \leq x \leq x_0 \;) \\ u_2(x) = x_0 \, x - \dfrac{x^2}{2} \, . \end{cases} \tag{2.4}$$

* en el ejemplo 2 :

$$\begin{cases} u_1(r) = r_2 \log \dfrac{r}{r_1} \, , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\; r_1 \leq r \leq r_2 \;) \\ u_2(r) = \dfrac{r_2^2}{2} \log \dfrac{r}{r_1} - \dfrac{r^2 - r_1^2}{4} \, . \end{cases} \tag{2.5}$$

* en el ejemplo 3 :

$$\begin{cases} u_1(r) = r_2^2 \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r} \right) , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\; r_1 \leq r \leq r_2 \;) \\ u_2(r) = - \dfrac{r_2^3}{3} \left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r} \right) - \dfrac{r^2 - r_1^2}{6} \, . \end{cases} \tag{2.6}$$

Para calcular la función de flujo crítico se demostrarán previamente dos equivalencias que son comunes a los tres casos. (En el Ej 1 bastará considerar $x = r$ con $r_1 = 0$ y $r_2 = x_0$).

Proposición 1.

Si $\alpha > 0$, entonces la función u cambia de signo en Ω (hay dos fases) si y sólo si $u(r_2) < 0$.

Demostración.

i) Como $u \mid_{\Gamma_1} = B > 0$, la condición $u(r_2) < 0$ es obviamente suficiente.

ii) Se probará ahora la necesidad : Sea $u = u_{B\alpha g}$ de manera que cambie de signo en Ω. Como $u(r_1) = B > 0$, existe $r_1 < r^* \leq r_2$ tal que $u(r^*) < 0$. Se considerarán por separado los dos casos $g \geq 0$ y $g < 0$:

* si $g \geq 0$, entonces por el principio del máximo se tiene que $u(r_2) = \min_{\Gamma_2} u = \min_{\Omega} u < 0$

* si $g < 0$ y se supone que $u(r_2) \geq 0$, entonces como $\frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = u'(r_2) = -\alpha < 0$ y $u(r^*) < 0$ con $r_1 < r^* < r_2$, existe $r^{**} \in (r^*, r_2)$ de manera que $u'(r^{**}) = 0$ y $u''(r^{**}) \leq 0$ (en r^{**} hay un máximo relativo de u) , lo cual contradice el hecho que $\Delta u(r^{**}) = -g > 0$.

Proposición 2.

Si $\alpha < 0$, entonces u cambia de signo en Ω (hay dos fases) si y sólo si $g < 0$ y $u(r_m) < 0$, siendo r_m la única solución de la ecuación $u'(r) = 0$ en (r_1, r_2) .

Demostración.

Se define $r_m \in [r_1, r_2]$ de manera que $u(r_m) = \min_{\Omega} u$. Como $\frac{\partial u}{\partial n} \mid_{\Gamma_2} = u'(r_2) = -\alpha > 0$, resulta ser que $r_m \neq r_2$.

Además si $g \geq 0$, entonces por el principio del máximo se tiene que $u(r_m) = \min_{\Gamma_1} u = u(r_1) = B > 0$. Luego, u cambia de signo si y sólo si $g < 0$ y $u(r_m) < 0$ con $r_1 < r_m < r_2$.

Para completar la demostración se verá que r_m es la única solución de $u'(r) = 0$ en (r_1, r_2) . Sea $r^* \in (r_1, r_2)$ tal que $u'(r^*) = 0$, entonces se tiene

$\Delta u(r^*) = u''(r^*) = -g > 0$, con lo cual en toda raíz $r = r^*$ de la ecuación $u'(r) = 0$ hay un mínimo relativo de u; por lo tanto, $r^* = r_m$ es único.

Cálculo de a_c en el ejemplo 1.

Si se aplican las proposiciones 1 y 2 a la función u_{Bag} , definida por (1.7) y (2.4), se obtienen las siguientes propiedades :

i) $a > 0$ y $u(x_0) = B - a\,x_0 + g\,\frac{x_0^2}{2} < 0 \Leftrightarrow a > \frac{B}{x_0} + g\,\frac{x_0}{2} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a > a_c(g) = \frac{B}{x_0} + \frac{x_0}{2}\,g\,, \quad \forall\, g > -g_1 = -\frac{2\,B}{x_0^2}$.

ii) $a < 0$ y $g < -g_1 < 0$:

$u'(x_m) = a + g\,(x_0 - x_m) = 0 \Leftrightarrow x_m = x_0 - \frac{a}{g} < x_0$.

Luego se tiene

$x_m > 0$ y $u(x_m) = \frac{1}{2g}\,(\,a^2 - 2\,g\,x_0\,a + (\,2\,g\,B + g^2\,x_0^2\,)\,) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a > a_c(g) = g\,x_0 + \sqrt{-2\,B\,g}\,, \quad \forall\, g < -g_1$.

Si $g = -g_1$ se tiene $a_c(-g_1) = 0$ y se obtiene para el flujo crítico la siguiente expresión :

$$a_c(g) = \begin{cases} \frac{B}{x_0} + \frac{x_0}{2}\,g\,, & \forall\, g \geq -\frac{2\,B}{x_0^2} = -g_1\,, \\ g\,x_0 + \sqrt{-2\,B\,g}\,, & \forall\, g < -\frac{2\,B}{x_0^2} = -g_1\,, \end{cases} \tag{2.7}$$

siendo $a_c \in C^1(\mathbb{R})$ y creciente.

Además, teniendo en cuenta (1.16) y (1.19) - (1.20) se deducen respectivamente :

$$\begin{cases} c_1 = x_0\,y_0 \\ c_2 = \frac{x_0^3\,y_0}{3} \\ c_{12} = \frac{x_0^2\,y_0}{2} \end{cases} \tag{2.8}$$

y

$$
\begin{cases}
R_1(g) = \dfrac{B}{x_0} + \dfrac{x_0}{2}\, g \,, \\[2ex]
R_2(g) = \dfrac{2\,B}{x_0} + \dfrac{2}{3}\, x_0\, g \,.
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

Se puede observar que $R_1(g) = q_C(g)$ para $g \geq -g_1$ (por (1.19) era $q_C(g) \leq R_1(g)$, $\forall g \geq 0$) y $q_C(g) < R_2(g)$, $\forall g < -g_1$.

Cálculo de q_C en el ejemplo 2.

Como en el ejemplo 1, si se tiene en cuenta (1.7) y (2.5), y se define

$$
c = \frac{r_2}{r_1} > 1 \tag{2.10}
$$

entonces se deduce que :

$$
\text{i) } q > 0 \text{ y } u(r_2) = B - q\, r_2 \log c + g \left(- \frac{r_1^2\,(c^2-1)}{4} + \frac{r_2^2}{2} \log c \right) < 0 \iff
$$

$$
\iff q \geq q_C(g) = \frac{B}{r_2 \log c} + \left(\frac{r_2}{2} - \frac{r_1\,(c^2-1)}{4\, c \log c} \right) g \,, \quad \forall\, g > -g_1 \,, \tag{2.11}
$$

con

$$
g_1 = -\frac{4\,B}{r_1^2\, \gamma(c)} \quad \text{y} \quad \gamma(c) = 2\, c^2 \log c - (c^2 - 1) \,. \tag{2.12}
$$

Por otra parte, si $q < 0$ y $g < -g_1 < 0$ se tiene :

$$
u'(r_m) = -\, q \frac{r_2}{r_m} + \left(-\frac{r_m}{2} + \frac{r_2^2}{2\, r_m} \right) g = 0 \iff
$$

$$
\iff \quad 0 < r_m = r_1 \sqrt{c \left(c - \frac{2\,q}{g\, r_1} \right)} \,, \quad \text{para } g < \frac{2\,q}{r_2} \,,
$$

y por ende resulta :

$$
r_1 < r_m < r_2 \iff 1 < c \left(c - \frac{2\,q}{g\, r_1} \right) < c^2 \,. \tag{2.13}
$$

Si se define la nueva variable auxiliar

$$Q^2 = c\ (\ c - \frac{2\ q}{g\ r_1}) \ , \qquad (2.14)$$

entonces se tiene que :

$$u(r_m) = B + g\ \frac{r_1^2}{4}\ \Big(\ Q^2\ (\ -1 + 2\ \log Q\ ) + 1\ \Big) = G(g,Q)\ . \qquad (2.15)$$

Si $q = 0$, se tiene $Q^2 = c^2$ y por ende se deducen las siguientes propiedades:

$$G(g,c) = B + g\ \frac{r_1^2}{4}\ \gamma(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g = -\ g_1 \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial G}{\partial Q}(g,Q) = g\ r_1^2\ Q\ \log Q < 0\ , \quad \forall\ Q > 1\ , \ g < 0\ . \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial G}{\partial g}(g,Q) = \frac{r_1^2}{4}\ \Big(\ Q^2\ (-1 + 2\ \log Q\ ) + 1\ \Big) > 0\ , \quad \forall Q > 1\ , \ g < 0 \qquad (2.18)$$

Luego se tiene que,

$G(g,Q) = 0$ define implícitamente $Q = Q(g)$, $\forall\ g \le -\ g_1$ con $Q(-g_1) = c$ (2.19)

Por (2.17), $u(r_m) = G(g,Q) < 0$, $\forall\ Q > Q(g)$, $g \le -\ g_1$

Teniendo en cuenta (2.14), resulta

$$Q > Q(g) \quad \Leftrightarrow \quad -\ \frac{g\ r_1}{2\ c}\ \big[\ Q^2(g) - c^2\ \big] < q < 0\ ,$$

y por ende se deduce para el flujo crítico la siguiente expresión :

$$q_c(g) = \begin{cases} \dfrac{B}{r_2\ \log c} + \Big(\ \dfrac{r_2}{2} - \dfrac{r_1\ (c^2 - 1)}{4\ c\ \log c}\ \Big)\ g\ , & \forall\ g > -\ g_1 \\[2ex] -\ \dfrac{g\ r_1}{2\ c}\ [\ Q^2(g) - c^2\ ]\ , & \forall\ g \le -\ g_1\ , \end{cases} \qquad (2.20)$$

donde g_1 está definido por (2.12) , $Q = Q(g)$ por (2.19) y (2.15) ; además resulta que $q_c \in C^1(\mathbb{R})$ y creciente.

Según (1.16) y (2.12), y (1.19) - (1.20) se obtienen respectivamente :

$$\begin{cases} c_1 = 2\,\pi\, r_2^2 \log c\,, \\ c_2 = \dfrac{\pi\, r_1^4}{8} \,[\, 4\, c^4 \log c - 2\, c^2\, (c^2 - 1) - (c^2 - 1)^2]\,, \\ c_{12} = \dfrac{\pi\, r_1^3\, c}{2}\, \gamma(c)\,, \end{cases} \tag{2.21}$$

y

$$\begin{cases} R_1(g) = \dfrac{B}{r_2 \log c} + \left(\dfrac{r_2}{2} - \dfrac{r_1\,(c^2 - 1)}{4\, c \log c} \right) g\,, \\ R_2(g) = \dfrac{2\, B\, (c^2 - 1)}{r_1\, c\, \gamma(c)} + \dfrac{r_1 \left(4\, c^4 \log c - 2\, c^2\, (c^2 - 1) - (c^2 - 1)^2 \right)}{4\, c\, \gamma(c)}\, g\,. \end{cases} \tag{2.22}$$

Como en el ejemplo 1 , es $R_1(g) = a_C(g)$, $\forall g \geq -g_1$ y $a_C(g) < R_2(g)$, $\forall\, g < -g_1$.

Cálculo de a_C en el ejemplo 3.

A partir de (1.7) , (2.6) y (2.10) se tiene :

i) $a > 0$ y $u(r_2) = B + (c-1)\, r_1 \left(-a\, c + \dfrac{g\, r_1}{6}\, (2\, c^2 - c - 1) \right) < 0 \iff$

$$\iff \quad a > a_C(g) = \frac{B}{r_1\, c\, (c-1)} + \frac{r_1\, (c-1)\, (2\, c + 1)}{6\, c}\, g \;, \quad \forall g > -g_1\,, \tag{2.23}$$

con

$$g_1 = \frac{6\, B}{r_1^2\, (c-1)^2\, (2\, c + 1)}\,. \tag{2.24}$$

ii) $a < 0$ y $g < -g_1 < 0$: Se obtiene que ($c = \dfrac{r_2}{r_1} > 1$)

$$u'(r_m) = -\frac{a\, r_2^2}{r_m^2} + g \left(-\frac{r_m}{3} + \frac{r_2^3}{3\, r_m^2} \right) = 0 \quad y \quad r_1 < r_m < r_2 \quad \iff$$

$$\iff \quad r_m = c^{2/3}\, \left(c - \frac{3\, a}{r_1\, g} \right)^{1/3} \quad y \quad \frac{r_1}{3}\, \frac{c^3 - 1}{c^2}\, g \leq a < 0\,. \tag{2.25}$$

Sea la nueva variable auxiliar

$$Q = c - \frac{3\, a}{r_1\, g}\,. \tag{2.26}$$

Entonces :

$$u(r_m) = B + \frac{r_1^2\, g}{6} \left(2\, c\, Q \left(c - \left(\frac{c}{Q} \right)^{1/3} \right) - c^{4/3}\, Q^{2/3} + 1 \right) = H(g,Q) \quad (2.27)$$

Si $a = 0$, se tiene $Q = c$ y por ende se obtienen las siguientes propiedades :

$$H(g,c) = B + \frac{r_1^2\, g}{6} (c-1)^2 \, (2\, c + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g = -\, g_1 \, , \qquad (2.28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q}(g,Q) = \frac{r_1^2\, g\, c}{3} \left(c - \left(\frac{c}{Q} \right)^{1/3} \right) < 0 \, , \quad \forall\ \frac{1}{c^2} < Q \le c \ , \ g < 0 \, , \qquad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial g}(g,Q) = \dfrac{r_1^2}{6} \left(2\, c\, Q \left(c - \left(\dfrac{c}{Q} \right)^{1/3} \right) - c^{4/3}\, Q^{2/3} + 1 \right) > 0 \, , \\ \forall\ \dfrac{1}{c^2} \le Q \le c \ , \ g < 0 \, . \end{array} \right. \qquad (2.30)$$

Luego, se deduce que :

$H(g,Q) = 0$ define implícitamente $Q = Q(g)$, $\forall\ g \le -\, g_1$ con $Q(-g_1) = c$ (2.31)

Por (2.29), se tiene que $u(r_m) = F(g,Q) < 0$, $\forall\ Q > Q(g)$, $g \le -\, g_1$. Como, por (2.26) es

$$Q > Q(g) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g\, r_1}{3} \left(c - Q(g) \right) < a < 0$$

se tiene :

$$a_C(g) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{B}{r_1\, c\, (c-1)} + \dfrac{r_1\, (c-1)\, (2\, c + 1)}{6\, c}\, g & \forall\ g \ge -\, g_1 \, , \\ g\, \dfrac{r_1}{3}\, (c - Q(g)) \, , & \forall\ g \le -\, g_1 \, , \end{array} \right. \qquad (2.32)$$

donde g_1 está definido por (2.24) , $Q = Q(g)$ por (2.31) y (2.27) ; además, resulta $a_C \in C^1(\mathbb{R})$ y creciente.

Por otra parte, se deduce que :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = 4\, \pi\, r_1^3\, c^3\, (c-1) \, , \\ c_2 = \dfrac{4}{45}\, \pi\, r_1^5\, (c-1)^3\, (5\, c^3 + 6\, c^2 + 3\, c + 1) \, , \\ c_{12} = \dfrac{2}{3}\, \pi\, r_1^4\, c^2\, (c-1)^2\, (2\, c + 1) \, , \end{array} \right. \qquad (2.33)$$

y

$$\begin{cases} R_1(g) = \dfrac{B}{r_1\, c\, (c-1)} + \dfrac{r_1\, (c-1)\, (2\, c+1)}{6\, c}\, g\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.34) \\ R_2(g) = \dfrac{2\, B\, (c^2+c+1)}{r_1\, c^2\, (c-1)\, (2\, c+1)} + \dfrac{2\, r_1\, (c-1)\, (5\, c^3 + 6\, c^2 + 3\, c + 1)}{c^2\, (2\, c+1)}\, g. \end{cases}$$

Como en los casos anteriores, se tiene que $R_1(g) = q_C(g)$, $\forall g \geq -g_1$ y $q_C(g) < R_2(g)$, $\forall\ g < -g_1$.

REFERENCIAS.

[1] J. E. BOUILLET - M. SHILLOR - D. A. TARZIA, "Critical outflow for a steady-state Stefan problem", Applicable Analysis, To appear.

[2] G. GARGUICHEVICH - D.A. TARZIA, "The stationary two-phase Stefan problem with an internal energy and some related problems", To appear.

[3] D. KINDERLEHRER - G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[4] M. H. PROTTER - H. F. WEINBERGER, "Maximum principles in differential equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1967).

[5] D. A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases". Thèse de 3ème Cycle, Univ. Paris VI, 8 Mars 1979. C.R.Acad.Sc.Paris, 288A(1979), 941-944. Ver también "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27(1979/80), 145-156 y "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28(1980),73-89.

[6] D. A. TARZIA, "Una desigualdad para el flujo de calor constante a fin de obtener un problema estacionario de Stefan a dos fases", en Mecánica Computacional, Vol. 2, S. R. Idelsohn (Ed.), EUDEBA, Santa Fe (1985), 359-370. Ver también "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Comput. Mech., To appear.

[7] D. A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computacão Científica, Vol. 5, SBMAC-Soc. Brasileira Mat. Apl. Comput., Gramado (1987).