

SIMULAÇÃO DA ENTRADA DE UM FLUIDO NEWTONIANO
EM UM DUTO POROSO LIMITADO POR DUAS SUPERFÍCIES PLANAS

Márcio A. Murad

Rogério M. Saldanha da Gama

Laboratório Nacional de Computação Científica
Rio de Janeiro - Brasil

Rubens Sampaio

Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - Brasil

RESUMO

Este trabalho visa simular a região de entrada do escoamento saturado de um fluido Newtoniano incompressível através de um meio poroso rígido homogêneo e isotrópico, limitado por duas placas planas paralelas impermeáveis. As equações que governam o fenômeno são advindas da Teoria Contínua de Misturas, onde o fluido e a matriz porosa são considerados como constituintes de uma mistura binária.

ABSTRACT

This work aims to simulate the development region of a saturated flow of an incompressible Newtonian fluid through a rigid homogeneous and isotropic porous medium, which is limited by two impermeable parallel plane plates. The equations which describe the phenomenon come from the continuum Theory of Mixtures, where the fluid and the solid are considered as constituents of a binary mixture.

1 - INTRODUÇÃO

Suponhamos que um fluido Newtoniano incompressível penetre pelo lado esquerdo com velocidade constante ($\underline{v} = (u_0, 0)$), em um duto formado por duas placas planas paralelas impermeáveis, conforme a figura 1. Para escoamento laminar, ao integrarmos as equações ordinárias do problema de Stokes, na região aonde o perfil de velocidade encontra-se plenamente desenvolvido ($x > L$), obtemos a clássica solução parabólica dada pela equação. (ver [2]).

$$\underline{v}(y) = 6u_0 \left(\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \underline{i}$$

O problema hidrodinâmico associado a região do desenvolvimento do escoamento $0 < x < L$ é conhecido em Mecânica dos Fluidos como problema da Graetz. Sua modelagem e simulação podem ser encontradas em [1], sendo esta última obtida mediante a resolução das equações de Navier-Stokes sem hipótese de camada limite.

O objetivo deste trabalho é simular o presente problema supondo agora que a região ($[0, \infty) \times [0, h]$) esteja preenchida por um material poroso rígido homogêneo e isotrópico. Para atingir este objetivo o fenômeno será modelado através da Teoria Contínua de Misturas, onde o fluido e o meio poroso serão tratados como constituintes contínuos de uma mistura binária, dotados de cinemáticas independentes com movimentos superpostos.

As formas integrais e pontuais das equações de balanço para uma mistura com n componentes podem ser encontradas em [3]. Em [4] é proposto uma teoria constitutiva no caso da mistura ser composta por um fluido Newtoniano incompressível e um sólido rígido homogêneo e isotrópico. Partindo desta teoria constitutiva, e da forma pontual das equações de continuidade e momentum, obtemos um sistema de equações elípticas. O objetivo aqui é resolvê-las para o problema em questão. O método numérico empregado para a obtenção da solução é o método dos volumes finitos.

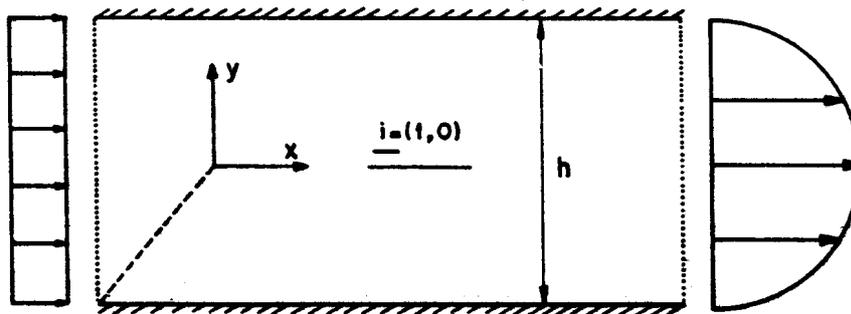


Figura 1 - Duto formado por duas placas planas

2 - MODELO EMPREGADO

2.1 - Cinemática

Postulamos que cada constituinte β_α , $\alpha = 1, 2$ é parte de uma variedade diferenciável isomorfa ao espaço euclidiano E. Os elementos de cada componente, denominadas partículas são denotadas por \underline{x}_α . Uma configuração de β_α é um homeomorfismo \underline{x}_α de β_α em E. O movimento de β_α é uma família uniparamétrica de configurações \underline{x}_α parametrizadas pelo tempo. A posição da partícula \underline{x}_α no tempo t é dada por

$$\underline{x}_\alpha = \underline{x}_\alpha(\underline{X}_\alpha, t) \quad ; \quad \alpha = 1, 2$$

A configuração de referência de β_α é uma configuração fixa \underline{K}_α . A posição da partícula em \underline{K}_α é dada por

$$\underline{x}_\alpha = \underline{K}_\alpha(\underline{X}_\alpha) \quad ; \quad \alpha = 1, 2$$

Para cada constituinte associamos uma densidade aparente ρ_α , definida pela razão local entre a massa do constituinte e o volume da mistura, e um de velocidade \underline{v}_α dado por

$$\underline{v}_\alpha = \frac{\partial \underline{x}_\alpha}{\partial t} \quad ; \quad \alpha = 1, 2$$

O gradiente de velocidade para cada constituinte é analogamente definido da forma

$$\underline{L}_\alpha = \text{grad } \underline{v}_\alpha \quad ; \quad \alpha = 1, 2$$

As derivadas materiais do campo escalar w e do campo vetorial \underline{w} associadas a cada constituinte são definidas por

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha w}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \text{grad } w \cdot \underline{v}_\alpha \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \\ \frac{d^\alpha \underline{w}}{dt} &= \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \text{grad } \underline{w} \cdot \underline{v}_\alpha \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned} \quad (1)$$

2.1 - Equações de Balanço

Na ausência de reações químicas entre os constituintes, e sob hipóteses de regularidade das funções envolvidas, as formas locais das equações de continuidade e momentum são expressas (ver [3]).

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho_\alpha \underline{v}_\alpha) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

$$\text{div } \underline{T}_\alpha + \underline{m}_\alpha + \rho_\alpha \underline{g} = \rho_\alpha \frac{d^\alpha \underline{v}_\alpha}{dt} \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (3)$$

onde \underline{T}_α e \underline{m}_α são respectivamente o tensor parcial de tensão e a força difusiva em cada constituinte, e g a aceleração da gravidade.

2.3 - Teoria Constitutiva

Quando a mistura binária é composta pela matriz porosa rígida homogênea e isotrópica e por um fluido Newtoniano incompressível as equações

constitutivas propostas para o tensor parcial da tensão \underline{T}_f , e para a força difusiva \underline{m}_f , no fluido são da forma (ver [4]).

$$\underline{T}_f = - p_f \underline{I} + 2 \Omega^2 \eta \lambda \underline{D}_f \quad (4)$$

$$\underline{m}_f = - \frac{\Omega^2 \eta}{K} \underline{v}_f - \frac{\Omega \eta D}{K} \text{grad } \Omega \quad (5)$$

onde D é o coeficiente da difusão, $\eta, p_f, \underline{v}_f$ e \underline{D}_f são respectivamente a viscosidade, pressão, velocidade e parte simétrica do gradiente de velocidade no fluido; Ω a fração de fluido, definida pela razão entre o volume de fluido e o volume da mistura, K a permeabilidade do meio poroso e λ uma constante que leva em conta a microestrutura deste. O fator " $\eta \Omega^2 \lambda$ " desempenha o papel de uma "viscosidade" para a constituinte fluido. Os termos que aparecem na dependência constitutiva para a força difusiva modelam respectivamente o atrito interno do fluido com o meio poroso (termo Darcyano) e o efeito de forças capilares predominantes em escoamentos insaturados. De (2), (3), (4) e (5) e sabendo que $\rho = \Omega \rho_f$ aonde ρ_f é a densidade real do fluido suposta constante, vem que:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div} (\Omega \underline{v}_f) = 0 \quad (6)$$

$$\rho_f \Omega \frac{d\underline{v}_f}{dt} = \text{grad } p_f + 2 \lambda \eta \text{div} (\Omega^2 \underline{D}_f) + \rho_f \Omega \underline{g} - \frac{\Omega^2 \eta \underline{v}_f}{K} - \frac{\Omega \eta D}{K} \text{grad } \Omega \quad (7)$$

3 - PROBLEMA PROPOSTO

Com as devidas simplificações, as equações (6) e (7) modelam o problema de Graetz proposto anteriormente.

Para escoamento saturado valem as hipóteses

$$\Omega = \phi \quad (8)$$

$$p_f = \phi p \quad (9)$$

onde ϕ é a porosidade, suposta constante, e p uma pressão aplicada a mistura. De (1), (6), (7), (8) e (9), desprezando a gravidade, e aplicando as hipóteses de regime permanente, obtemos as equações que modelam o problema da forma.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\phi \rho (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = - \phi \frac{\partial p}{\partial x} + \phi^2 \eta \lambda (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - \frac{\phi^2 \eta u}{K}$$

$$\phi \rho (u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = - \phi \frac{\partial p}{\partial y} + \phi^2 \eta \lambda (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) - \frac{\phi^2 \eta v}{K}$$

onde $\underline{V} = (u, v)$

Introduzindo os adimensionais

$$u^* = u/u_\infty, \quad v^* = v/u_\infty; \quad x^* = 2x/h, \quad y^* = 2y/h$$

$$Re_\lambda = \rho_f u_\infty h / 2\lambda \eta \phi; \quad Re_K = 2\rho_f u_\infty K / \eta \phi h, \quad p^* = p / \rho u_\infty^2$$

Obtemos o problema adimensionalizado com a seguinte forma

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (10)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_\lambda} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{u^*}{Re_K} \quad (11)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re_\lambda} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{v^*}{Re_K} \quad (12)$$

Sujeito às condições de contorno

$$u^*(x^* = 0, y^*) = 1, \quad v^*(x^* = 0, y^*) = 0$$

$$u^*(x^*, y^* = 0) = v^*(x^*, y^* = 0) = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*}(x^*, y^* = 1) = v^*(x^*, y^* = 1) = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}(x^* \rightarrow \infty, y^*) = v^*(x^* \rightarrow \infty, y^*) = 0 \quad (13)$$

A condição (13) só pode ser aplicada a escoamentos que possam ter o perfil "plenamente desenvolvido".

4 - O MÉTODO NUMÉRICO EMPREGADO

O método numérico utilizado para a obtenção da solução do sistema é o método dos volumes finitos [5]. O procedimento usual é integrar as equações (10), (11) e (12) nos volumes de controle indicados nas figuras 2, 3 e 4.

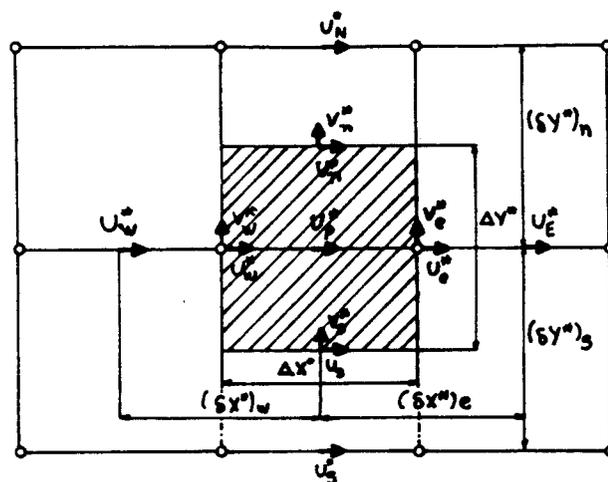


Figura 2 - Volume de controle utilizado na integração da equação de momentum para a componente u^*

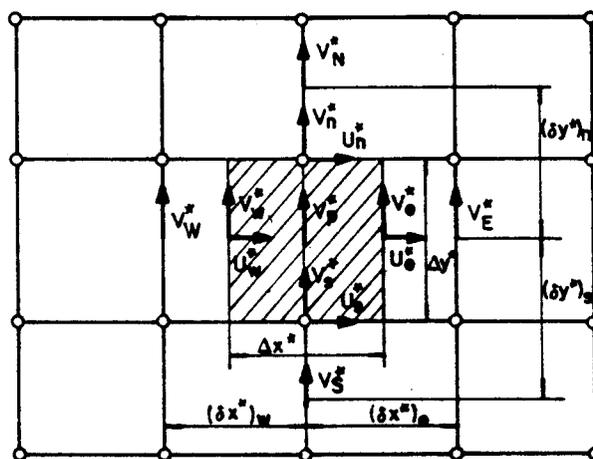


Figura 3 - Volume de controle utilizado na integração da equação de momentum para a componente v^*

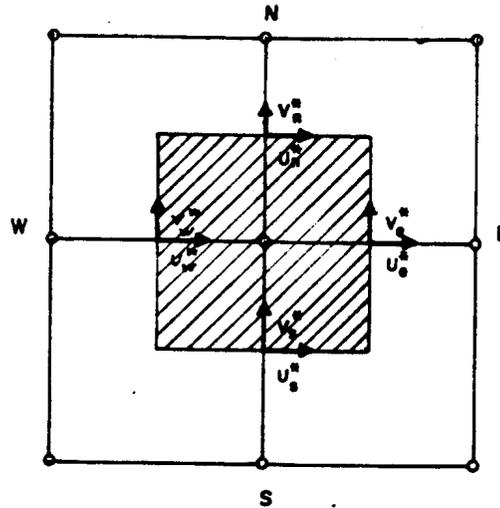


Figura 4 - Volume de controle utilizado na integração da equação da continuidade

Supondo o termo de fonte $-u^*/Re_K$ constante em cada volume de controle, e adotando a hipótese de uniformidade dos fluxos convectivo e difusivo nas faces, obtemos a formulação discreta de (10) da forma

$$\begin{aligned}
 a_p u_p^* &= a_E u_E^* + a_W u_W^* + a_N u_N^* + a_S u_S^* + (p_p^* - p_E^*) \Delta y^* \\
 a_E &= \frac{\Delta y^*}{Re_\lambda (\delta x^*)_e} A (|\rho_f u_e^* (\delta x^*)_e Re_\lambda|) + \max (-\rho_f u_e^* \Delta y^*, 0) \\
 a_W &= \frac{\Delta y^*}{Re_\lambda (\delta x^*)_w} A (|\rho_f u_w^* (\delta x^*)_w Re_\lambda|) + \max (\rho_f u_w^* \Delta y^*, 0) \\
 a_S &= \frac{\Delta x^*}{Re_\lambda (\delta y^*)_s} A (|\rho_f v_s^* (\delta y^*)_s Re_\lambda|) + \max (\rho_f v_s^* \Delta x^*, 0) \quad (14) \\
 a_N &= \frac{\Delta x^*}{Re_\lambda (\delta y^*)_n} A (|\rho_f v_n^* (\delta y^*)_n Re_\lambda|) + \max (-\rho_f v_n^* \Delta x^*, 0) \\
 a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\Delta x^* \Delta y^*}{-Re_K}
 \end{aligned}$$

Sendo que adotando-se o esquema Power-Law, a função A é dada da forma [5].

$$A(|x|) = \max (0, (1 - 0,1 |x|^5))$$

De uma maneira análoga, a formulação discreta de (11) é dada por

$$a'_P v^*_P = a'_E v^*_E + a'_W v^*_W + a'_N v^*_N + a'_S v^*_S + b + (p^*_P - p^*_N) \Delta x^* \quad (15)$$

onde os coeficientes a'_P , a'_E , a'_W , a'_N e a'_S são dados por (14), com grandezas avaliadas no volume de controle da figura 3.

Para a equação da continuidade obtemos

$$(u^*_P - u^*_W) \Delta y^* + (v^*_P - v^*_S) \Delta x^* = 0 \quad (16)$$

O algoritmo empregado para a resolução do sistema é denominado SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations [5]). Seu princípio baseia-se em estimar o campo inicial de pressão p^*_0 e corrigi-lo de tal forma que as velocidades u^*_0 e v^*_0 associados a p^*_0 obtidas através de (14) e (15), satisfaçam a equação da continuidade (16). Supondo que a pressão corrigida é da forma

$$p^* = p^*_0 + p' \quad (17)$$

onde p' é chamada correção de pressão. Então as fórmulas de correção de velocidades são dadas por (ver [5])

$$u^* = u^*_0 + \frac{\Delta y^*}{a_p} (p'_P - p'_E) \quad (18)$$

$$v^* = v^*_0 + \frac{\Delta x^*}{a_p} (p'_P - p'_N) \quad (19)$$

Substituindo (18) e (19) em (16), obtemos a equação discreta para a correção de pressão p' da forma

$$a''_P p'_P = a''_E p'_E + a''_W p'_W + a''_N p'_N + a''_S p'_S + b \quad (20)$$

onde os coeficientes são dados por

$$a''_E = \frac{\rho_f \Delta y^*}{a_p} \quad a''_W = \frac{\rho_f \Delta y^*}{a_w}$$

$$a''_N = \frac{\rho_f \Delta x^*}{a_p} \quad a''_S = \frac{\rho_f \Delta x^*}{a_s}$$

$$a''_P = a''_E + a''_N + a''_W + a''_S$$

$$b = [(u^*_0)_W - (u^*_0)_P] \Delta y^* + [(v^*_0)_S - (v^*_0)_P] \Delta x^*$$

Apresentamos agora a sequência de operações para a resolução do sistema.

4.1 - Algoritmo SIMPLE

- i) Estime o valor inicial do campo de pressão, p_o^*
- ii) Resolva as equações de momentum (14) e (15) para obter u_o^* e v_o^*
- iii) Resolva a equação de correção de pressão (20)
- iv) Calcule a pressão p^* pela adição de p' a p_o^*
- v) Calcule u^* e v^* através das equações de correção de velocidades (18) (19)
- vi) Trate a pressão corrigida p^* como novo chute inicial p_o^* , volte a ii, e repita o procedimento até obter convergência

5 - RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados foram obtidos para um domínio retangular $[0,40] \times [0,1]$ utilizando-se uma malha uniforme (80×50) . Nas figuras a seguir estes aparecem parametrizados por Re_K , com $Re_\lambda = 100$.

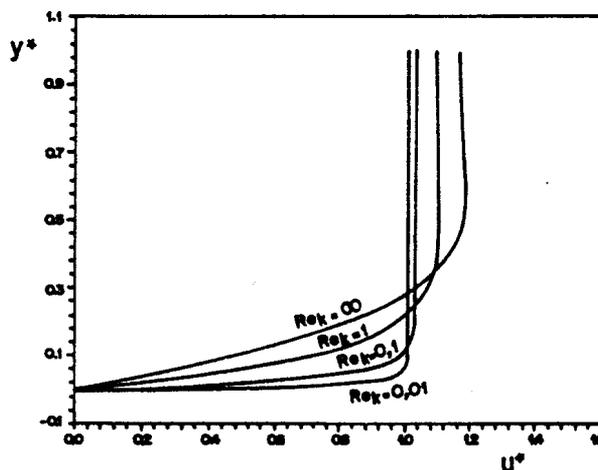


Figura 5 - Perfil u^* em $x^* = 1.59$

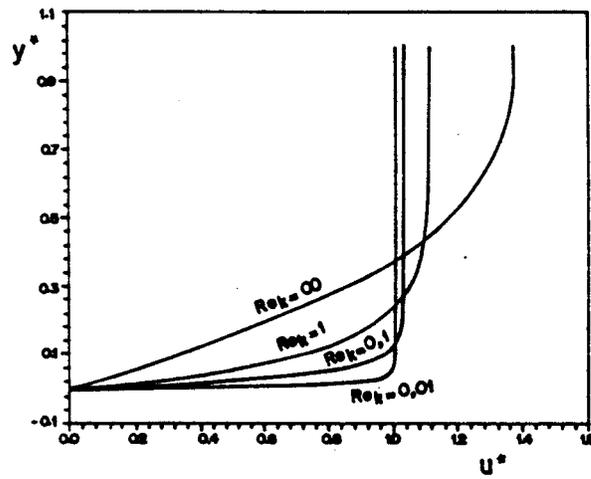


Figura 6 - Perfil u^* em $x^* = 6.67$

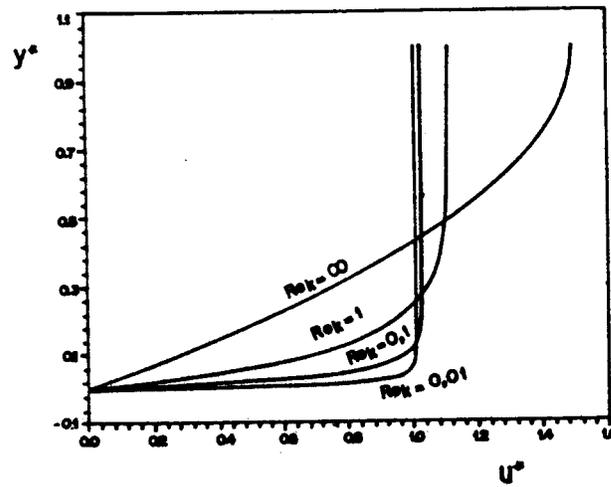


Figura 7 - Perfil u^* desenvolvido

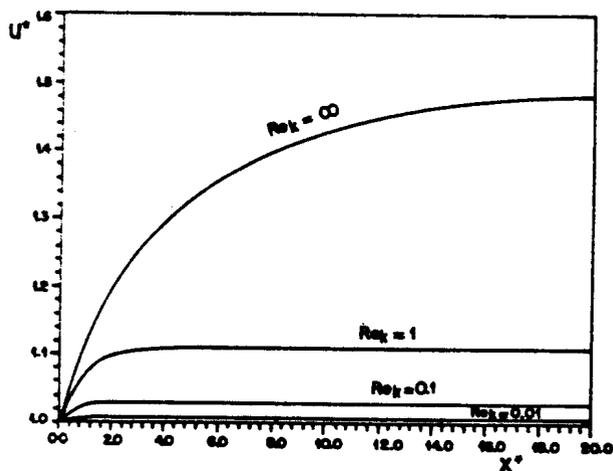


Figura 8 - Perfil u^* na linha de centro como função de x^*

6- DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

É importante salientar que a velocidade encontrada sob o ponto de vista de Teoria de Misturas difere daquela abordada sob o enfoque de Mecânica dos Fluidos Clássica, uma vez que a velocidade do constituinte fluido é na realidade uma média tomada numa região contendo um certo número de poros. Por meio desta caracterização faz sentido interpretar os perfis obtidos como solução do sistema de E.D.P.

Observamos que a medida que aumenta a compactidade do meio poroso, o qual está associado com a diminuição do parâmetro Re_k , mais rápido o escoamento desenvolve-se. Portanto ocorre uma redução do comprimento de desenvolvimento, ao ser este definido para uma determinada norma.

REFERÊNCIAS

- [1] Wang, Y.L., and Longwell, P.A., "Laminar flow in the inlet section of parallel plates". A.I.C.H. E Journal, Vol. 10, pp. 323-329, 1964.
- [2] Schlichting, H., "Boundary layer-theory" McGraw-Hill, New York, 1968.
- [3] Atkin, R.J. and Craine, R.E., "Continuum theories of Mixtures: Basic theory and historical development", Q.J. Mech. Appl. Math vol. XXIX, pp 209-243, 1976

[4] Williams, W.O. - "Constitutive equations for flow of an incompressible viscous fluid through a porous medium". Q.J. Appl. Math., vol 34, pp 255-267, 1978.

[5] Patankar, S.V. - "Numerical heat transfer and fluid flow" McGraw - Hill, New York, 1980.