

UN MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA FLUJO DE MATERIALES
ALMACENADOS EN SILOS

Mario A. Diez¹

Luis A. Godoy²

Departamento de Estructuras, Universidad
Nacional de Córdoba, Argentina

RESUMEN

Se estudia el flujo de materiales almacenados en silos (tanto sean cohesivos como friccionales), a fin de evaluar presiones ejercidas sobre las paredes de la estructura. Las ecuaciones constitutivas del material almacenado se modelan como un fluido viscoplástico, en el que la plasticidad esta gobernada por el criterio de Drucker-Prager. La solución se obtiene a través de la analogía entre flujo viscoplástico y elasticidad no lineal incompresible. Se discretizan las ecuaciones mediante elementos bidimensionales y de simetría de revolución. Se aplica el modelo a la determinación de presiones en silos verticales.

ABSTRACT

The flow of bulk materials stored in silos (either cohesive or frictional materials) is studied in order to determine pressures on the walls of the silo. The constitutive equations considered for the material stored are modelled as a viscoplastic fluid, in which plasticity is governed by the Drucker-Prager criterion. The solution is obtained via an analogy between visco-plastic flow and non-linear incompressible elasticity. The resulting equations are discretized by means of a finite elements in which nodal unknowns are velocities. Two-dimensional and axisymmetric elements have been implemented. The model is applied to the evaluation of pressures in vertical silos.

¹ALUMNO (CONICET)

²INVESTIGADOR (CONICET)

1. INTRODUCCION

Durante el vaciado de un silo el material que ha sido previamente comprimido en la tolva, en la etapa de llenado, comienza a fluir a través del orificio de salida desarrollándose sobrepresiones sobre las paredes que varían según la altura y cuyos máximos valores se ubican en la zona de transición tolva-cilindro [1]. Flujos en masa o canalizados pueden ocurrir, en general para un mismo material ensilado dependiendo solo de las condiciones geométricas del silo (ángulo de inclinación de la tolva, tamaño de la abertura de descarga, rugosidad de las paredes), donde toda la masa desciende uniformemente en el primer caso y, en cambio, únicamente fluye un cilindro central mientras el resto permanece en reposo en el flujo canalizado. Consecuentemente las presiones durante el vaciado ejercidas por el material a granel sobre las paredes del silo, dependerán fundamentalmente del tipo de flujo [2].-

Desde el año 1895 en que Janssen [3] obtuvo una solución analítica cerrada para evaluar presiones estáticas de llenado en silos cilíndricos hasta nuestros días, numerosas fórmulas han sido propuestas [4, 5, 6], aunque la mayoría de éstas resuelven el problema durante el llenado con mayor o menor precisión. Según esta forma tradicional de cálculo, las presiones de diseño que ocurren durante el vaciado pueden obtenerse incrementando las presiones de llenado por ciertos coeficientes, cuyos valores -propuestos por cada autor- han sido determinados generalmente en forma experimental [7, 8].-

Debemos destacar a Jenike [9], quien en el año 1961 obtuvo información suficiente desarrollada enteramente en forma experimental para el diseño de plantas de almacenaje a partir de la teoría de flujo. Por otra parte y en conocimiento de los autores, solo hay un trabajo que simula en forma numérica el proceso de descarga de un silo: fue publicado en 1984 por Haussler "et al" [10], el mismo analiza el transitorio entre el instante de apertura de la boca de descarga y el primer segundo de un silo cargado con arena. Haussler "et al" han debido forzar las dimensiones geométricas como así también la forma de abertura para poner de manifiesto el fenómeno buscado a tal punto que el silo analizado no tiene utilidad práctica.-

El presente trabajo, en cambio, permite analizar flujos másicos numericamente en estados estacionarios durante el proceso de descarga de un silo.

2. MODELO DE FLUJO

2.1. Hipótesis fundamentales

Antes de comenzar con el desarrollo de las ecuaciones constitutivas, haremos una breve reseña de las tres hipótesis básicas adoptadas y que dan validez a la formulación usada.

* Flujo Visco-Plástico. Entre otros, Jenike [9] ha observado que los sólidos a granel exhiben propiedades elasto-plásticas y viscosas similares al modelo de Bingham y presentan además puntos de fluencia inferior y superior de la misma forma que un acero dulce.

* Material Incompresible Durante el Flujo. Se muestra en [11] que para deformación plana y axisimétrica, el ángulo formado por el vector tasa de deformación y el eje de tensiones cortantes graficado en un campo (σ, τ) es pequeño, del orden de 1° a 2° ; por lo tanto se lo puede considerar nulo, lo cual implica que durante el flujo el sólido puede ser asumido como incompresible.

* Regimen Estacionario. El flujo estacionario es obtenido en un campo gravitatorio cuando la tasa del trabajo de las fuerzas externas es igual a la tasa del trabajo plástico. Si la tasa del trabajo externo resultara menor, el sólido dejará de fluir y en cambio, fluirá con pulsaciones para disipar la energía cuando la tasa externa resulte superior a la tasa del trabajo plástico [11].

2.2. Formulación básica y relaciones constitutivas. Aspectos generales

En un volumen aislado de fluido las tensiones internas definidas a través de σ_{ij} deben estar en equilibrio con las fuerzas másicas b_j , que incluyen las fuerzas inerciales correspondientes. Además, en las fuerzas externas las tensiones deben estar en equilibrio con las fuerzas por unidad de superficie t_j [12].

$$\begin{aligned} L^s \sigma_{ij} + b_j &= 0 && \text{en } \Omega \\ G \sigma_{ij} &= t_j && \text{en } S \end{aligned} \quad (1)$$

donde L y G son operadores conocidos.

Usando relaciones variacionales y aplicando velocidades virtuales δu , se puede escribir la ecuación equivalente como

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^T \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_j^T b_j d\Omega + \int_S \delta u_j^T t_j dS \quad (2)$$

En la expresión anterior $\delta \dot{\epsilon}$ define la velocidad de deformación virtual.

$$\delta \dot{\epsilon}_{ij} = L \delta u_j \quad \text{y} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = L u_j \quad (3)$$

En procesos con grandes velocidades de deformación donde el material sigue un comportamiento plástico o visco-plástico, la componente elástica de velocidad de deformación puede despreciarse. Para tales problemas, la relación constitutiva que define un flujo viscoso no Newtoniano incompresible, puede ser expresada en la forma Euleriana como suma de dos componentes [13].

$$\sigma_{ij} = \sigma_n \delta_{ij} + 2 \mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

donde la tensión media (o presión) σ_n será

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -p \quad (5)$$

y la viscosidad μ depende solo de la tasa de deformación.

La ecuación (4) puede ser escrita alternativamente como

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} S_{ij} \quad (6)$$

en la cual S_{ij} son unicamente las componentes desviadoras de tensión (implica que $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$).

Para un material visco-plástico podemos escribir con algún grado de generalidad la expresión de Perzyna [14]

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (7)$$

que para el caso de flujo no asociado y adoptando una ley de tipo exponencial para ϕ

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma \langle (F)^n \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (8)$$

γ representa el parametro de fluidez que es una constante del material, y

$$F = F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (9)$$

representa la superficie de fluencia plástica. En este trabajo se ha usado la notación

$$\langle F \rangle = F \quad \text{si} \quad F \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle F \rangle = 0 \quad \text{si} \quad F < 0$$

Se puede observar claramente que cuando $\gamma \rightarrow \infty$ la ecuación (8) define un comportamiento de un material ideal perfectamente plástico.

2.3. Criterio de Plasticidad

Los materiales a granel tienen un comportamiento similar a un sólido rígido-plástico de Coulomb [9]

Comparando las Fig. 1. y 2. se observa que debería modificarse el modelo de sólido rígido-plástico de Coulomb de manera tal que para valores pequeños de σ , la superficie de fluencia se desvie de la línea recta. Por otra parte, la superficie de fluencia termina en un punto definido "E", cuya

posición depende del grado de consolidación del material y por ende su densidad. Se puede observar por último, que la posición de la superficie de fluencia no es constante, sino función del grado de consolidación.-

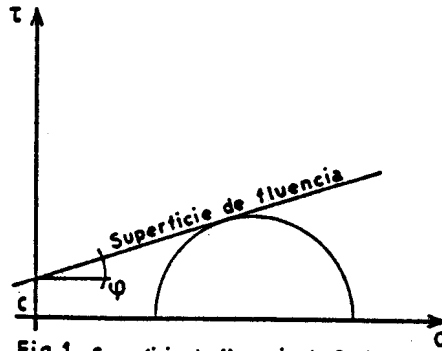


Fig.1 Superficie de fluencia de Coulomb de un sólido.

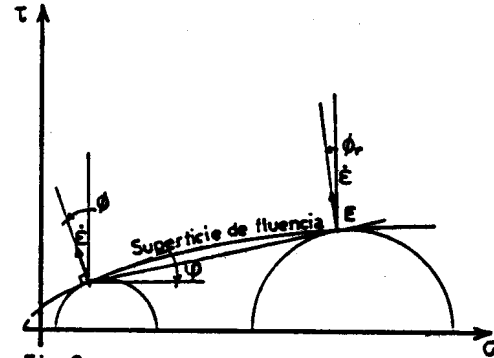


Fig.2 Superficie de fluencia de un material a granel.

En el presente trabajo no se introducen estas modificaciones y se supone como primera aproximación una densidad constante del material en toda la masa. Se emplea además la ley de DRUCKER y PRAGER que ofrece una buena aproximación a la ley de Coulomb, dada la ventaja algebraica de su utilización, como así también su generalidad de poder representar tanto materiales puramente friccionales como cohesivos. Esta ley de Drucker y Prager se puede expresar de la forma [15]

$$F = 3 \alpha' \sigma_e + J_2^{1/2} - k \quad (10)$$

donde

$$\alpha' = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}$$

el ángulo de fricción ϕ y la cohesión c son las constantes que definen cada material ensilado. El segundo invariante del tensor desviador

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (11)$$

relaciona la componente del tensor desviador cuyo valor será

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (12)$$

Derivando la expresión (10) con respecto a las tensiones cortantes reemplazando en (8) para $F \geq 0$ y adoptando $n=1$ resulta

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \gamma (3 \alpha' \sigma_{kk} + J_2^{1/2} - k) \frac{1}{2} \frac{1}{J_2^{1/2}} S_{ij} \quad (13)$$

igualando ahora los segundos miembros de las expresiones (6) y (13)

$$\frac{1}{2} \mu S_{ij} = \gamma (3 \alpha' \sigma_{kk} + J_2^{1/2} - k) \frac{1}{2} \frac{1}{J_2^{1/2}} S_{ij} \quad (14)$$

Simplificando esta última expresión (14) y sacando común denominador resulta:

$$\frac{1}{\mu} = \gamma \left(1 + \frac{3 \alpha' \sigma_{kk}}{J_2^{1/2}} - \frac{K}{J_2^{1/2}} \right) \quad (15)$$

Definiendo el invariante del vector velocidad de deformación.

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (16)$$

se obtiene a partir de la igualdad (11)

$$J_2^{1/2} = \mu \dot{\epsilon} \quad (17)$$

Reemplazando finalmente este valor en (15)

$$\mu = \frac{1}{\gamma} + \frac{k}{\dot{\epsilon}} - 3 \frac{\alpha' \sigma_{kk}}{\dot{\epsilon}} \quad (18)$$

Esta última expresión define la viscosidad equivalente de materiales que fluyen sin cambios de volumen y representa un problema NO LINEAL. Obsérvese que μ depende de la solución (\bar{v}, σ_p) y adviértase además la generalidad de la misma, puesto que es posible representar tanto a un problema puramente viscoso anulando el segundo y tercer término, como así también un comportamiento puramente plástico haciendo $\gamma = \infty$ en el primer término.-

Por otra parte es posible obtener una expresión idéntica a la utilizada para extrusión de metales desarrollado por Ofiate [16], quién ha adoptado una superficie plástica de Von Mises, anulando el último término de la expresión (18) que depende únicamente de la componente friccional del material.-

3. IMPLEMENTACION DEL MODELO DE FLUJO

3.1. Analogía entre fluido viscoso y sólido elástico incompresible

Comparando la relación constitutiva (4) con la correspondiente a un sólido elástico incompresible, se observa que ambas expresiones resultan idénticas si se reemplazan las tasas de deformaciones en (4) por deformaciones. Además, como la ecuación de equilibrio de sólido es idéntica a la de fluidos viscosos cuando se desprecian los términos inerciales, es posible concluir que las soluciones de sólidos pueden ser identificadas como soluciones de fluidos viscosos asumiendo que los desplazamientos obtenidos representan velocidades en el flujo como así también las deformaciones (infinitesimales) como tasas de deformación.-

En el contexto del presente trabajo, se ha limitado la formulación a problemas bidimensionales de deformación plana y axisimétricos.-

3.2. Incompresibilidad via penalización

La ley constitutiva (4) puede escribirse también, separando las componentes desviadoras y volumétricas de la forma

$$\sigma = 2 \mu D^s + D^v \sigma_v \quad (19)$$

donde D^S y D^V son las matrices desviadoras y volumétricas.-

Introduciendo esta última expresión en la ecuación (1) de velocidades virtuales obtenemos

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^T 2\mu D^S \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ii}^T D^V \sigma_{\theta\theta} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_j^T b_j d\Omega + \int_S \delta u_j^T t_j dS \quad (20)$$

La técnica de penalización ha sido utilizada en este trabajo para satisfacer la condición de incompresibilidad [17]

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \dot{\epsilon}_v = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha} \approx 0 \quad (21)$$

donde α es un número suficientemente grande (parámetro de penalización) La tensión media (o presión) puede ser eliminada como incógnita en la ecuación (20) y colocada en función de $\dot{\epsilon}_{ii}$ así tenemos

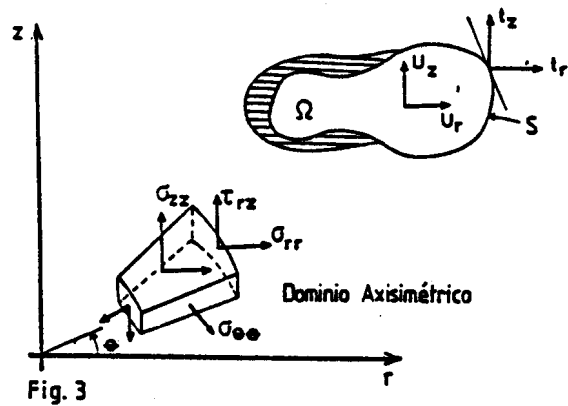
$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij}^T 2\mu D^S \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ii}^T D^V \alpha \dot{\epsilon}_{ii} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_j^T b_j d\Omega + \int_S \delta u_j^T t_j dS \quad (22)$$

4. DISCRETIZACION EMPLEANDO EL MEF

4.1. Formulación discretizada

Especializando ahora la formulación general de flujo al caso axisimétrico (o deformación plana como caso particular), y adoptando por conveniencia una formulación matricial para tensiones y tasas de deformación definidas en coordenadas r-z (Fig. 3)

$$\begin{aligned} \sigma^T &= (\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \tau_{rz}, \sigma_{\theta\theta}) \\ \dot{\epsilon}^T &= (\dot{\epsilon}_{rr}, \dot{\epsilon}_{zz}, \dot{\gamma}_{rz}, \dot{\epsilon}_{\theta\theta}) \end{aligned} \quad (23)$$



Expresando las velocidades en la forma clásica de elementos finitos en función de sus valores nodales

$$\begin{aligned} u &= N \underline{a} \\ \dot{\underline{a}} &= \underline{B} \dot{\underline{a}} \end{aligned} \quad (24)$$

donde \underline{B} es la matriz de velocidades de deformación y N las funciones de forma para cada elemento. Introduciendo esta discretización en la ecuación (22) se obtiene

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \underline{B}^T 2\mu D^s \underline{B} 2\pi r dr dz + \alpha \int_{\Omega} \underline{B}^T D^v \underline{B} 2\pi r dr dz \right) \underline{a} - \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{b} 2\pi r dr dz - \\ & - \int_S \underline{N}^T \underline{t} 2\pi r ds = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Nótese que en general esta última ecuación es NO-LINEAL teniendo en cuenta la expresión (18)

$$\mu = \mu(\underline{a}) \quad (26)$$

El sistema de ecuaciones resultantes puede ser escrito en forma matricial el cual resulta bandedado y simétrico de la forma

$$K(a) a - f_b - f_s = 0 \quad (27)$$

donde la matriz de rigidez $K(a)$ es la suma de las componentes desviadoras y volumétricas

$$K(a) = K_1(a) + \alpha K_2 \quad (28)$$

donde

$$K_1(a) = \int_{\Omega} B^T 2\mu D^S B 2\pi r dr dz \quad (29)$$

$$K_2 = 2\alpha \int_{\Omega} B^T D^V B \pi r dr dz$$

$$f_b = 2\pi \int_{\Omega} N^T b r dr dz$$

$$f_s = 2\pi \int_{\Sigma} N^T s r ds$$

(30)

Las últimas expresiones representan los términos de cargas

$$f = f_b + f_s \quad (31)$$

Puede observarse que cuando el parámetro de penalización α aumenta, la ecuación (27) se reduce a

$$K_2 a = \frac{f}{\alpha} \approx 0 \quad (32)$$

Esta última es equivalente a exigir que la matriz K_2 sea singular. La INTEGRACION REDUCIDA sobre la componente volumétrica ha sido utilizada en este trabajo [12].-

El sistema no lineal de ecuaciones (27) se resuelve en forma iterativa a partir de un valor de viscosidad inicial propuesto μ_0 y por consiguiente

$$K^n = K(u_0)$$

donde el campo de velocidades se obtiene resolviendo el sistema

$$\underline{a}^n = K_{n-1}^{-1} f \quad (33)$$

y el proceso se repite hasta alcanzar una convergencia prefijada ϵ (usualmente $\epsilon = 0.01$). Es de destacar que el método de iteración directo converge generalmente en pocas iteraciones, debido a las características de las condiciones de contorno del problema, en las que normalmente se prescriben las velocidades en una serie de puntos.-

4.2. Elementos implementados

En el presente trabajo, elementos cuadriláteros de 8 nudos o bicuadráticos de 9, pueden ser utilizados tanto para el análisis axisimétrico como para deformación plana. Fig. 4.

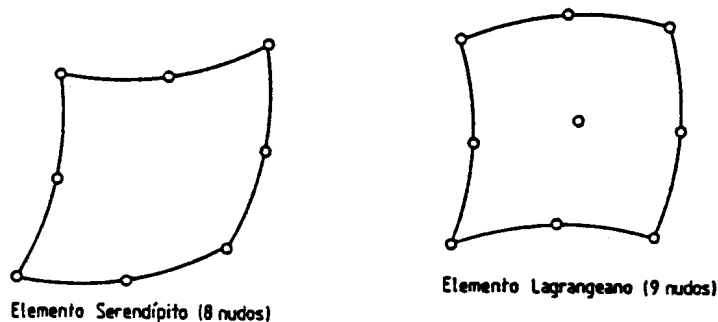


Fig. 4. Elementos Bi-dimensionales Isoparamétricos Parabólicos

En ambos elementos, la integración numérica de la matriz de rigidez (suma de la componente desviadora y volumétrica), puede ser obtenida en forma Reducida (2x2 Gauss) para las dos componentes o Selectiva (3x3) para la desviadora y (2x2) para la componente volumétrica.

5. RESULTADOS NUMERICOS

5.1. Flujo plano en una celda horizontal

En este ejemplo se estudia el vaciado de una celda horizontal llena con harina de trigo [18]. Las características geométricas y mecánicas del problema se muestran en la Fig. 5.a. Para el análisis se han utilizado 16 elementos Lagrangeanos de 9 nodos con Integración Selectiva [16] y se ha supuesto además, que el material no tiene rozamiento alguno con las paredes de la celda. En la Fig. 5.b se muestra el campo de velocidades obtenidas, donde se puede observar la presencia de una zona muerta por efecto de la singularidad de la tolva.-

5.2. Flujo axisimétrico en un silo vertical

Se ha analizado un problema con simetría de revolución utilizando los mismos datos del ejemplo anterior. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. 6.a como así también el campo de velocidades resultante afinando la malla de E.F. en la Fig. 6.b. Puede observarse en este análisis que la velocidad de salida es aproximadamente cuatro veces mayor que la de entrada.-

5.3. Flujo axisimétrico en un silo vertical con tolva cónica

En este último ejemplo se analiza el flujo de vaciado de un silo vertical mediante un análisis axisimétrico, con tolva de descarga de forma cónica. La geometría como así también las características mecánicas del problema se muestran en la Fig. 7.a. Dado que en el estado actual no es posible tratar condiciones inclinadas de borde, se coloca una capa delgada de elementos con viscosidad cien veces menor en orden de magnitud representando de esta manera rozamientos nulos entre el material y la pared del silo. Las velocidades obtenidas se grafican en la Fig. 7.b y como puede observarse ha desaparecido la zona muerta del ejemplo anterior.-

6. CONCLUSIONES

Las soluciones de problemas de Flujo plástico o visco-plástico en estados estacionarios presentados en este trabajo, obviamente abren las puertas a un vasto campo de aplicaciones. Procesos de vaciado de celdas horizontales o silos verticales, como así también estudios de movimiento de suelo, en los que el material queda definido por las constantes: fricción interna y cohesión, pueden ser abordados con la formulación presentada;

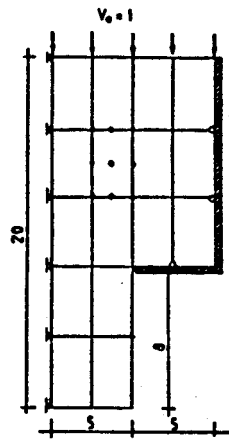
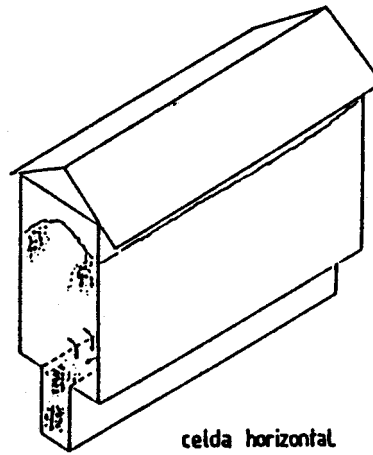


Fig. 5.a



celda horizontal

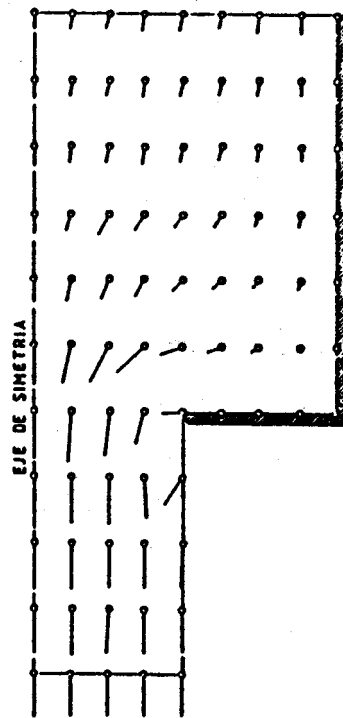


Fig. 5.b CAMPO DE VELOCIDADES

Angulo de fricción = 27°
Cohesión = 0.12 Kg/cm^2
Paredes sin Fricción
Elementos bi-cuadráticos
Integración Selectiva
Modelo: DEFORMACION PLANA

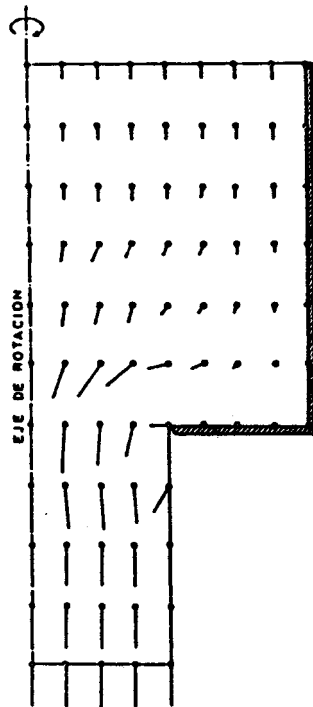
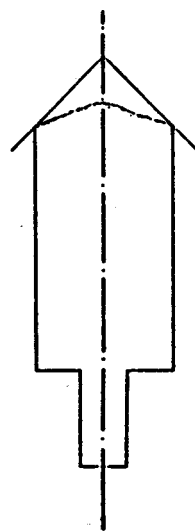


Fig. 6.a. VELOCIDADES PARA MALLA I



SILO VERTICAL

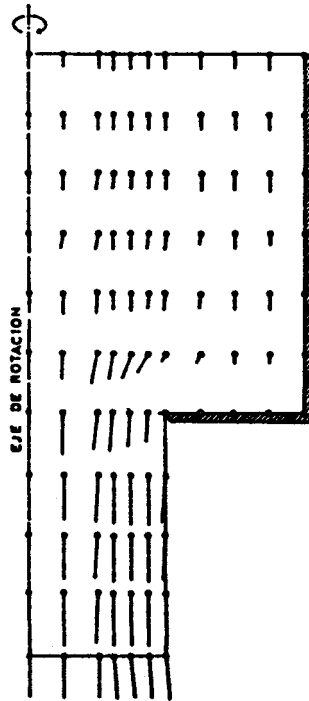
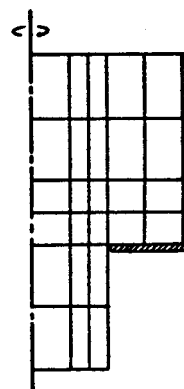


Fig. 6.b. VELOCIDADES PARA MALLA II



MALLA II

ANALISIS AXISIMETRICO

Integración Selectiva

Malla I 16 Elementos

Malla II 26 Elementos

Elementos con 9 nudos

Angulo de Fricción = 27°

Cohesión = $0,12 \text{ Kg./cm}^2$

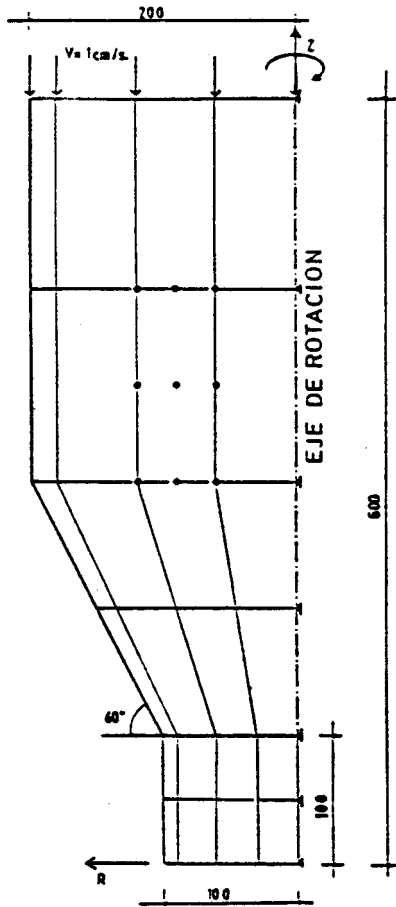


Fig. 7. a.

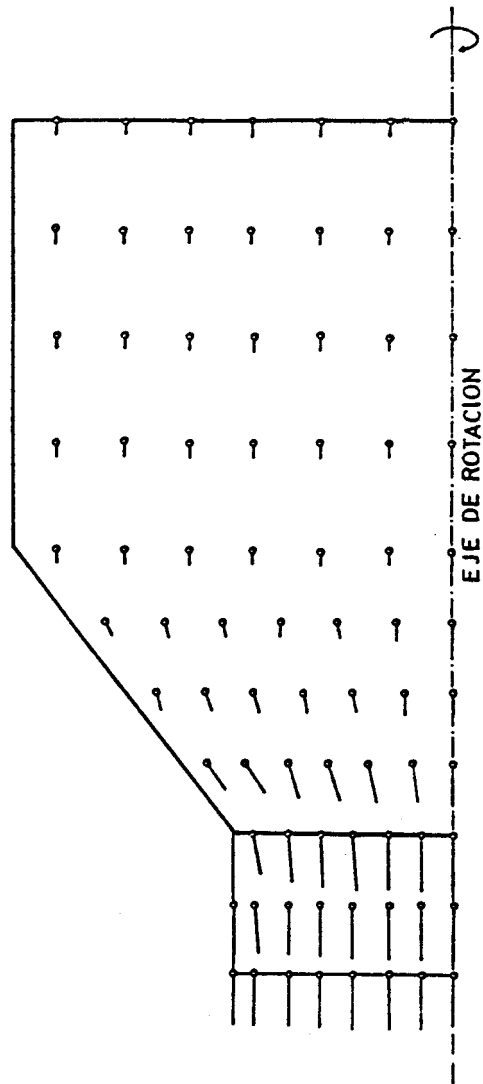


Fig. 7. b. CAMPO DE VELOCIDADES

ANALISIS AXISIMETRICO
24 Elementos con 9 Nudos
Integración Selectiva
Angulo de Fricción = 27°
Cohesión = 0.12 Kg./cm²

aunque aún son necesarios algunos refinamientos para la aplicación práctica.

El primero de ellos está relacionado con la inclusión de efectos friccionales en el contorno, a fin de hacer un estudio comparativo de resultados obtenidos con otros métodos.

El segundo se refiere a la obtención experimental del coeficiente de viscosidad μ , que como se mostró, depende de la tasa de deformación y por ende de la velocidad impuesta.

Finalmente se podría extender el presente trabajo al caso tri-dimensional para solucionar problemas en entresilos, donde los métodos tradicionales no son aplicables.

7. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo forma parte de un programa de investigación financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas (CONICET) y por el Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Provincia de Córdoba (CONICOR).

8. REFERENCIAS

1. D. Nanninga, Gibt die übliche Berechnungsart der Drucke auf die Wände und den Boden von Silobauten Sichere Ergebnisse de Ingenieur, Vol. 44 , (1956).
2. A. W. Jenike, Storage and Flow of Solids, Bulletin N° 123 of the Utah Engineering Experiment Station, (1960).
3. H. A. Janssen, Versuche über Getreidedruck in Silozellen, Vol 39, pp. 1045 - 49 , (1895).
4. I. Roberts, Determination of the vertical and lateral pressure of granular substances, Proceedings, Royal Society London,

Vol. 36, pp. 225 - 240, (1984).

5. M. Reimbert and A. Reimbert, Silos: Theory and Practice, Trans. Tech. Publications, (1976).
6. J. Ravenet, Silos, teoría, investigación, construcción. Editores Técnicos Asociados, S.A., Barcelona, (1977).
7. H. B. Marbeck; M. G. Goyal; G. L. Nelson and M. G. Singh, Dinamic overpressures in model bins during emptying, ASAE Michigan, (1977).
8. J. Ravenet, Sobrepresiones en las paredes de los silos debido al vaciado y efectos producidos por la forma de tova y excentricidad del vaciado, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Barcelona, (1974)
9. A. W. Jenike; P. J. Elsey and R. H. Woolley, Flow Properties of Bulk Solids, Proceedings A.S.T.M., Vol. 60, pp. 1168 - 1181. (1960).
10. U. Haussler and J. Eibl, Numerical Investigations on Discharging Silos, Journal of Engineering Mechanics, 110, 957 - 971. (1984)
11. A. Jenike and R. Shield, On the Plastic Flow of Coulomb Solids Beyond Original Failure, Journal of Applied Mechanics, 4, pp. 599 - 602, (1939).
12. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, Mc. Graw Hill, London pp. 697 - 703 (1977)
13. O. C. Zienkiewicz and P. N. Godbole, Viscous, Incompressible Flow with Special Reference to Non-Newtonian (Plastic) Fluids, Finite Element Method in Flow Problems, Edited by R. Gallagher J.T. Oden, C. Taylor and O. C. Zienkiewicz, Chap. 2, Wiley, New York, (1975).

14. P. Perzyna, Fundamental Problems in Visco-Plasticity. Recent advances in Applied Mechanics, Chap 9, pp 243 - 377. Academic Press, New York (1966).
15. O. C. Zienkiewicz and I. C. Corneau, Visco-Plasticity -- Plasticity and Creep in Elastic Solids -- a Unified Numerical Solution Approach. Int. J. Num. Meth. in Engng., 8, pp 821 - 845 (1974).
16. E. Olate, Plastic Flow of Metals, I. Thermal Coupling Behaviour. II. Thin Sheet Forming. Ph. D. Thesis, University College of Swansea, (1978).
17. T.J. Hughes, The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, PRENTICE-HALL, INC, Englewood cliffs, New Jersey, 07632.
18. C. Calil Jr., Sobrepresiones en las paredes de los silos para almacenamiento de productos pulverulentos cohesivos. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Barcelona, (1983).