

DETERMINACION DEL LA SUPERFICIE LIBRE, PERFILES DE PRESION Y VELOCIDAD SOBRE VERTEDEROS, POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITO.

Moyano Javier I. • Idelsohn Sergio R.
Grupo de Mecánica Computacional INTEC CONICET Argentina

RESUMEN

Utilizando el método de elementos finitos, para una formulación flujo potencial, se plantea un algoritmo de búsqueda de superficie libre, basado en lograr presión próxima a cero en superficie, y una técnica de mallas adaptativa que permite corrigiendo la geometría inicial.

Sabemos que la función, que define la geometría, de la superficie libre, en los casos que vamos a contemplar, es una curva suave continua.

En el presente trabajo, se plantea la utilización, de una función del tipo SPLINE, para la aproximación, de la geometría de superficie libre, de esa forma, se obtiene en cada iteración, una superficie con la continuidad adecuada.

Para la determinación del mapa de presiones, en el dominio analizar, se utiliza la ecuación de Bernoulli. Para ello obtiene las velocidades del fluido a partir de un análisis potencial del mismo.

Se muestra la metodología de su aplicación como así también los resultados obtenidos y comparación con ensayos hidráulicos.

INTRODUCCION

Debido a la geometría usualmente utilizada en los perfiles vertederos tenemos que; para el fluido circulante (agua) rugosidad y velocidades normalmente puestas en juego, desarrolla una capa límite, como la que muestra la figura [1]. De la misma se puede observar que en la cresta del perfil, que es el lugar de mayor interés en cuanto a su determinación geométrica presiones actuantes, es bastante aceptable aplicar una formulación para un flujo potencial como la siguiente:

1.1

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \rho F - \nabla p$$

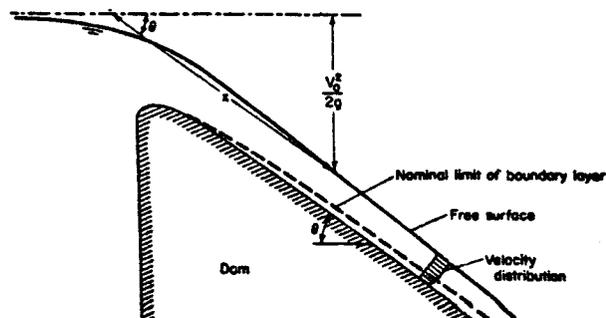


figura [1]

Se utiliza un elemento de 4 nodos con un grado de libertad por nodo, correspondiente al potencial en cada uno de ellos. La función de base del elemento es lineal.

En una formulación, como la planteada en 1.1 la velocidad es igual a la variación del potencial en una determinada dirección.

$$1.2 \quad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

En nuestro caso, nos interesa conocer la velocidad, en la superficie libre, para poder de esa manera evaluar la presión. Esta se calcula de la siguiente manera:

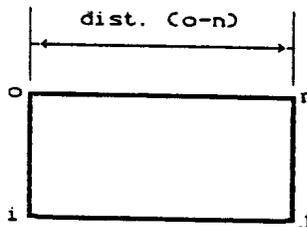


figura [2]

$$1.3 \quad v_x = \frac{\phi_o - \phi_n}{\text{dist. (o-n)}}$$

LA ECUACION DE BERNOULLI EN EL PROBLEMA PROPUESTO

La ecuación 2.1 nos muestra la ecuación de Bernoulli

$$2.1 \quad \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g * z = C$$

para $P = 0$ podemos escribir :

$$2.2 \quad C = \frac{v^2}{2} + g * Z$$

donde

- ρ = densidad del agua.
- C = constante calculada en el punto de la superficie libre más alejado.
- v = velocidad de aproximación
- g = aceleración de la gravedad
- Z = altura de la superficie libre a la referencia.

Para el cálculo de la presión en cada punto, despejamos P de 2.1

$$2.3 \quad P = \frac{\rho}{g * CC - \frac{V^2}{2} - g * Z}$$

V = derivada del potencial en la dirección del elemento

ALGORITMO PARA LA MODIFICACION DE LA SUPERFICIE LIBRE

En una malla como la de la figura 3 definimos:

- Una superficie fija, sobre la cual, se encuentran los nodos que llamaremos fijos: los que no modifican su posición, por ende debajo de dicha superficie, la malla no será modificada.

- Una superficie libre, cuyos nodos, están posibilitados desplazarse, hacia arriba o hacia abajo, sobre una línea que un nodo de la superficie fija, con un nodo de la superficie libre la que denominaremos recta de control.

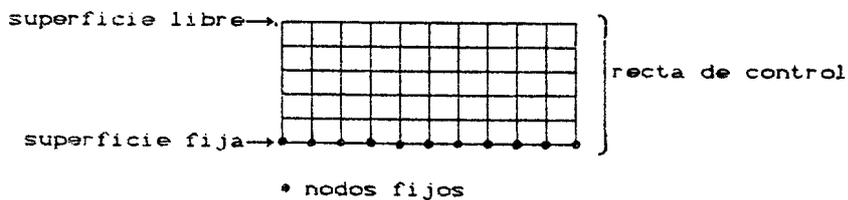


figura [3]

En la figura [4], tenemos representada una recta de control. Sobre la misma, calculamos el factor de peso W del lado del elemento, con respecto a la longitud total de la recta de control.

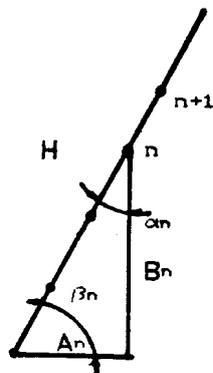


figura [4]

$$3.1 \quad W_{nx} = \frac{A_n}{\gamma_n * H}$$

$$3.2 \quad W_{ny} = \frac{B_n}{\gamma_n * H}$$

Si $\alpha_n > \beta_n$ luego $\gamma_n = \alpha_n$ sino $\gamma_n = \beta_n$

Estos factores de peso, son los que nos permitirán, en las siguientes iteraciones redefinir la malla, con una proporción de los elementos similar a la original. Esto se lo puede hacer de la siguiente manera.

$$3.3 \quad A_n = W_{nx} * \gamma_n * H$$

$$3.4 \quad B_n = W_{ny} * \gamma_n * H$$

Para el control de la posición de la superficie libre, se realiza el siguiente análisis.

En la figura [5] se representa la última capa de elementos. A través de esa capa de elementos, se supone que circula un determinado caudal Q_0 que está dado por la expresión:

$$3.5 \quad Q_0 = V_\phi * H_0$$

Q_0 = Caudal por elemento

V_ϕ = Velocidad calculada de $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ en la superficie libre para ese elemento.

H_0 = Altura del elemento.

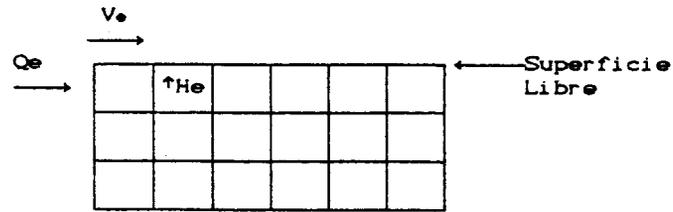


figura [5]

De la expresión 2.2 podemos escribir :

$$3.6 \quad V_{po} = ((C - g * Z) * 2)^{\frac{1}{2}}$$

Donde V_{po} , es la velocidad que debería tener una partícula sobre la superficie libre, para satisfacer la condición de presión igual a cero en dicha superficie, y Z la cota promedio superior del elemento como muestra la figura [6]

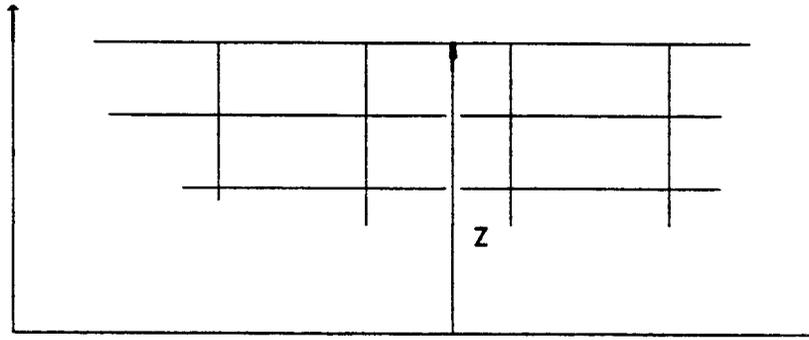


figura [6]

Por lo tanto, para mantener ese mismo caudal Q_0 , debemos suponer que la altura del elemento deberá cambiar en función de la variación de la velocidad. A partir de esta consideración calculamos una nueva altura del elemento.

$$H_{en} = \frac{Q_0}{V_{po}}$$

El valor de la diferencia.

$$D = H_{en} - H_0$$

es el incremento que se le suma a H en la próxima iteración.

Con todos los nodos de la superficie libre incrementados, se obtiene una curva, que no tiene continuidad en la intersección de dos elementos. Para lograr una mayor continuidad se pasa una función SPLINE por algunos de los puntos, que se los utilizará como guía.

El resto de los puntos de la superficie, se los calcula de tal manera que pertenezcan a una curva continua.

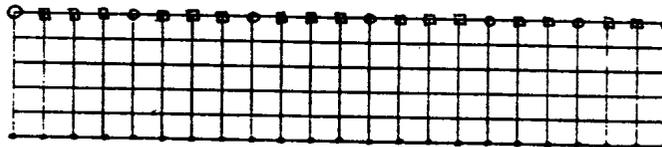
Sobre esos puntos, se calcula una nueva longitud H para cada recta de control. Luego, se recalculan nuevamente, las alturas de los elementos, proporcionales a la nueva H y se realiza otra iteración, que consiste en calcular, una distribución de potenciales para la nueva geometría.

Este procedimiento continúa hasta lograr presión en la superficie dentro de un cierto ϵ próximo a cero.

PUNTOS DE CONTROL Y PUNTOS INTERPOLADOS

Como se vio anteriormente, la presión en la superficie libre es verificada en nodos a los que denominaremos de control. Estos son el último nodo de las rectas de control, pero no todos los nodos de la superficie libre deben ser puntos de control, ya que de acuerdo a pruebas efectuadas en esa condición, se vio que el algoritmo diverge, debido a que la superficie libre progresa en forma desordenada, o sea con nodos que se desplazan en forma errática, respecto a la forma que debería tener una superficie libre.

Dicha curva debe ser suave y continua, por lo tanto, lo que se implementó, es la aproximación de la misma con una función de tipo SPLINE cúbico, la que dispone de una derivada 2da continua. En esta condición, nos queda nuestra superficie libre con una cantidad de puntos a los que llamamos de control, los que serán desplazados a otra posición, por la verificación de la presión en la superficie; y otra cierta cantidad de puntos, cuya ubicación va a estar definida por la función SPLINE. De tal manera que los puntos de control, conserven su posición, impuesta por el algoritmo de control, y el resto de los nodos, serán interpolados como lo muestra la figura [7].



- Nodos de control.
- Nodos interpolados con SPLINE.
- Nodos fijos.

Figura [7]

De acuerdo a la geometría a modelar, es adecuado colocar un nodo de control, cada 2 interpolados, como mínimo, de manera que los puntos interpolados, puedan copiar una curva con derivada segunda continua.

RESULTADOS NUMERICOS

ANALISIS DE LA SUPERFICIE LIBRE ALREDEDOR DE UN DESNIVEL
El modelo propuesto en la figura [8], analizado con el presente algoritmo, despues de 8 iteraciones toma una configuración como la indicada en la figura [9]

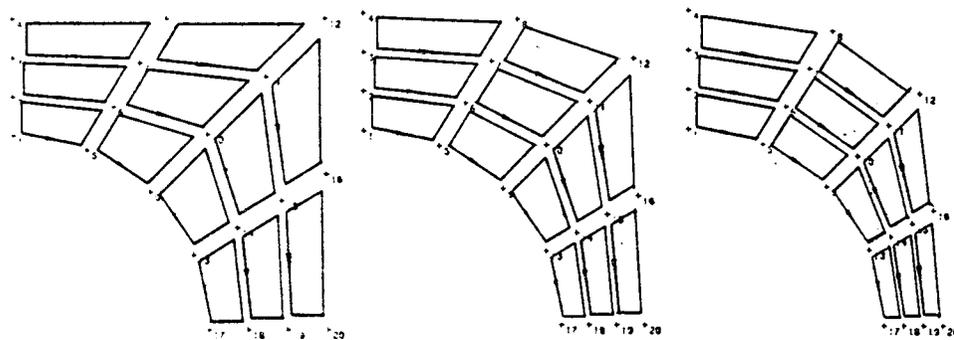


Figura [8]

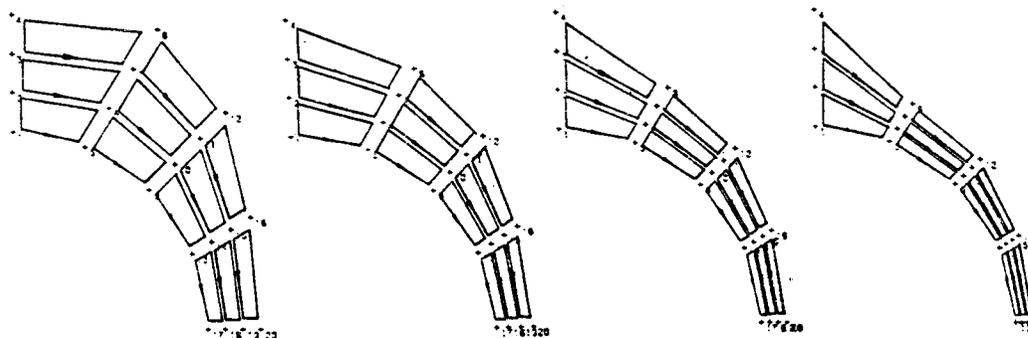


Figura [9]

ANALISIS DE LA SUPERFICIE LIBRE EN UN VERTEDERO TIPO SPILLWAY

En la figura [10], se muestra el modelo del vertedero analizado. El mismo se realizó, con un perfil de la superficie libre evaluado mediante formulas empíricas, que se obtienen de mediciones de vertederos.

A partir de dicho modelo, el algoritmo converge en pocas iteraciones, ya que la proximidad a la superficie libre es bastante buena. Las figuras [11] y [12], representan las líneas isopresión obtenidas por la ecuación 2.3 propuesta. Las q muestran claramente zonas, de presión cero, negativas, hidrostáticas en el resto del modelo, fuera de la zona del vertedero.

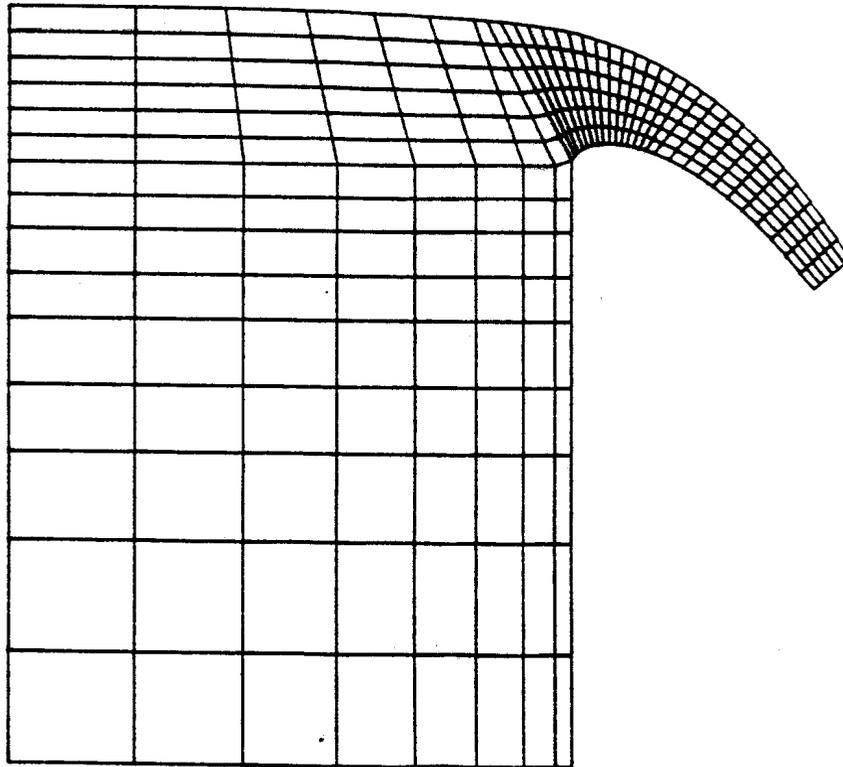


Figura [10]

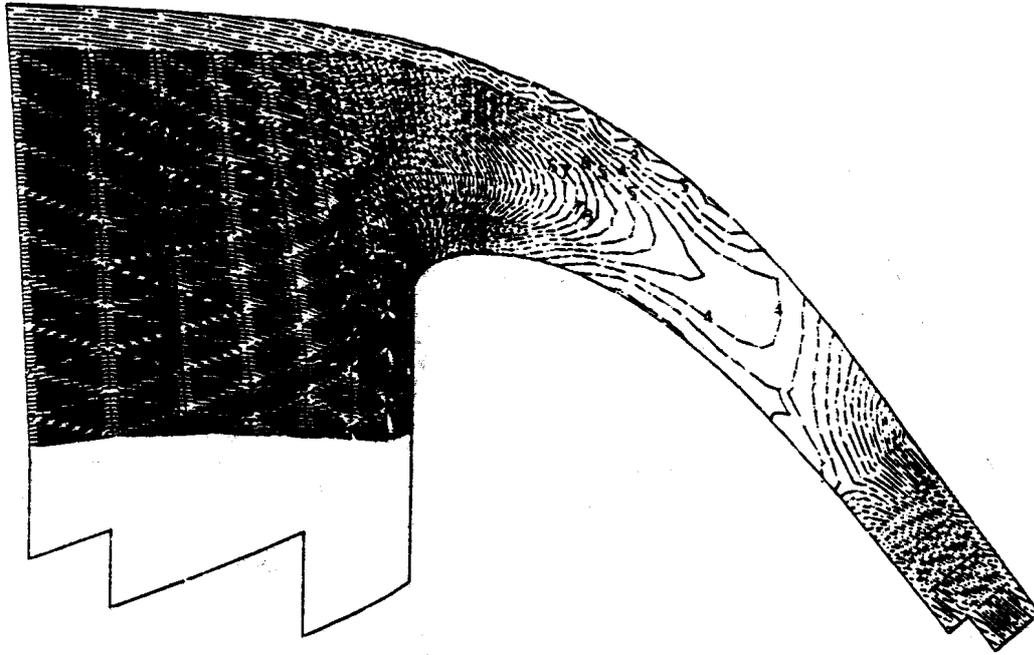


figura [11]

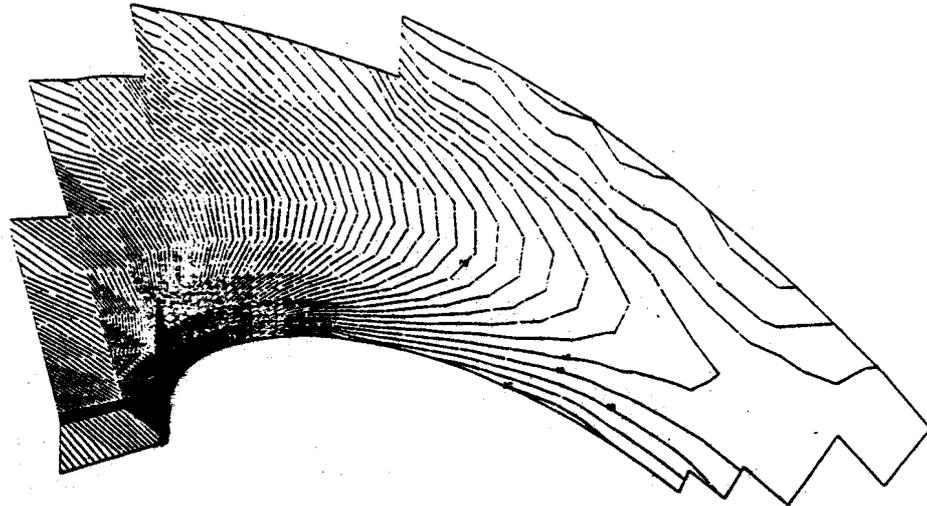


figura [12]

Las figuras [13] y [14] muestran la comparación entre resultados obtenidos por medición [13] y los resultados numéricos [14]. Cabe destacar que las geometrías comparadas no son exactamente iguales, pero la forma es como muestra la figura [15].

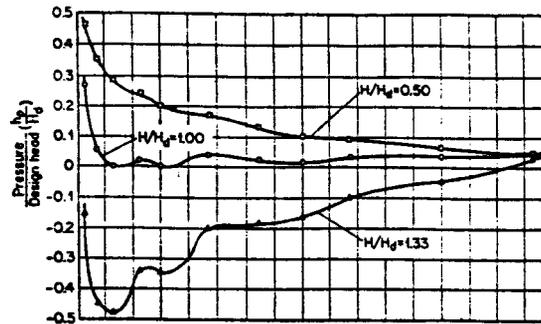


Figura [13]

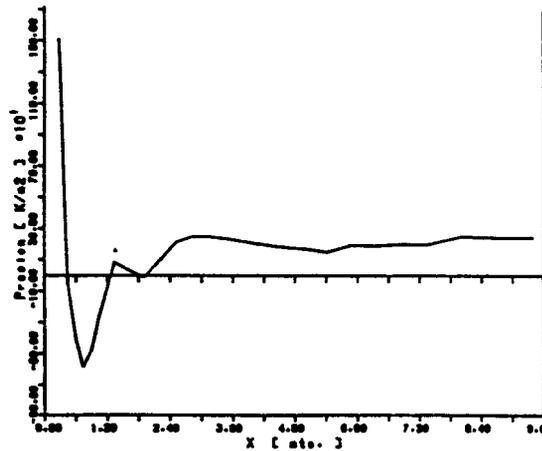


Figura [14]

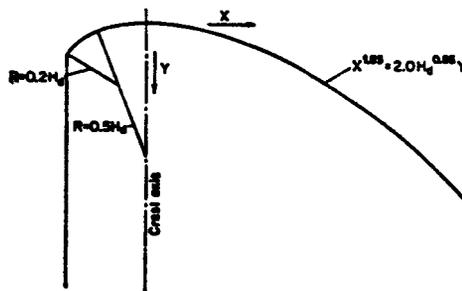


Figura [15]

Con el fin de evaluar el grado de convergencia del método, se planteo el mismo modelo, pero con una superficie inicial bastante alejada de la superficie libre final, figura [16]. Siendo los resultados obtenidos similares a los anteriores.

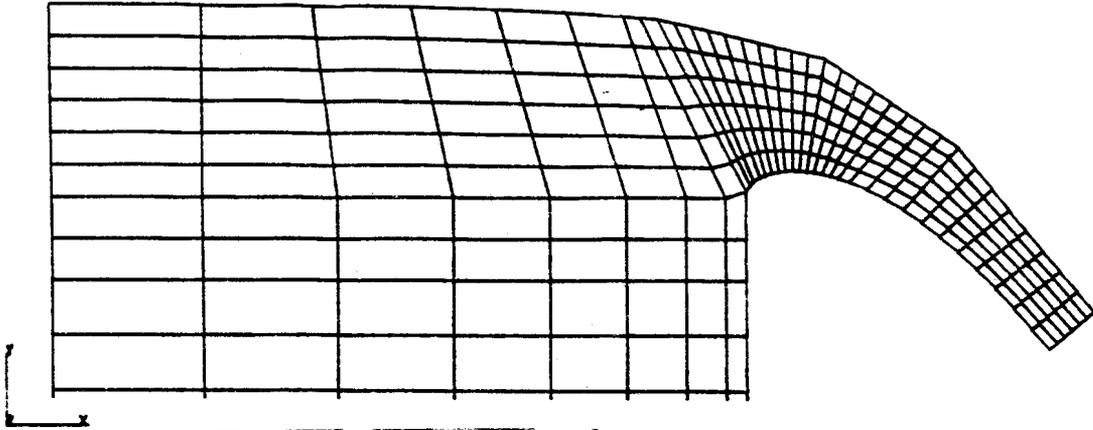


figura [16]

Ademas se realizaron distintas ubicaciones de los nodos de control, y también distintas cantidades de los mismos, con el fin de evaluar su influencia y la importancia de ello.

CONCLUSIONES

La utilización de funciones SPLINE para la aproximación de la superficie libre, mejora notablemente la convergencia para la obtención de la misma.

En los ejemplos propuestos se muestra que solo es necesario, algunos nodos de control para el manejo de las funciones SPLINE, y que el resto de los nodos se lo puede obtener por una interpolación interna.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Chow, Ven Te Ph.D. "OPEN-CHANNEL HYDRAULICS" McGRAW-HILL 1959.
- [2] "S.A.M.C.É.F. (Système d'Analyse des Milieux Continus par la Methode des Elements Finis) Manuels D'utilisation.
- [3] Zienkiewicz O. C. "The Finite Element Method, Third Edition" McGRAW-HILL
- [4] Pinder George F. Gray, William G. "Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology" American Press.
- [5] King, H. W. "Handbook of Hydraulics; For the solution of Hydraulics problems" McGRAW-HILL
- [6] Melsheimer E. S. and Murphy, T. E. "U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, CE, Investigations of various shape of the Upstream Quadrant of the crest of High Spillway. Hydraulic Laboratory Investigation" Research Report H-70-1, Vicksburg, Miss. , January 1970.
- [7] "Flow Characteristics on the ogee Spillway." ASCE Hydraulics division, Journal, Vol 83 (december 1957)
- [8] Schlichting, H. "Boundary Layer Theory" McGRAW-HILL 1960