

Minimização de Banda e Perfil de Matrizes de Rigidez de Estruturas

M. Inês G. Santos
Ademar G. Groehs

Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil
Universidade Federal do RGS
Porto Alegre - RS - Brasil

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um algoritmo para minimizar o perfil e a banda da matriz de rigidez de uma estrutura. Para isto é realizada inicialmente uma reordenação de elementos seguida de uma ordenação de nós de acordo com o processo de eliminação seguido em um método de solução tipo "FRONTAL". O algoritmo foi testado em diversos microcomputadores com sucesso.

ABSTRACT

An algorithm is presented with the aim of minimize the profile and bandwidth of structural stiffness matrices. An element reordering is initially performed and then the new nodal order is obtained using the elimination process known as FRONTAL SOLUTION. The algorithm was successfully used in several microcomputers.

INTRODUÇÃO

A aplicação do método dos Elementos Finitos resulta em um sistema de equações da forma:

$$K U = P$$

onde K é a matriz de rigidez da estrutura de ordem N , U são os deslocamentos generalizados e P é o vetor de cargas, ambos de dimensão N . Muitas vezes, a dimensão N pode corresponder a centenas ou até milhares de equações. Este fato leva a dois importantes problemas que são o tamanho de memória necessária para armazenar K , U , P e o tempo de processamento necessário para resolver o sistema.

Basicamente existe dois enfoques para abordar estes problemas: um está baseado na simetria e esparsidade da matriz K e procura evitar o armazenamento e operações com zeros (esquema tipo Banda e/ou Perfil) [1]. O outro é o chamado método Frontal [2] que está baseado no fato que a eliminação das incógnitas no sistema $KU = P$, não precisa esperar até que toda a matriz K e o vetor P estejam completos. Isto implica que apenas uma parte do total de equações N precisa estar na memória, em um dado instante.

Quando os esquemas tipo Banda e/ou Perfil são utilizados, a memória do computador e o tempo de processamento dependem do tamanho da Banda e do Perfil. Neste caso, ambos, estão relacionados diretamente, com a ordem dos nós na malha de Elementos Finitos.

No caso da utilização do esquema Frontal, a memória e o tempo de processamento dependem do tamanho do "Front", que está ligado a ordem dos elementos e não dos nós, como no caso anterior.

Na maioria dos programas de E.F. disponíveis, tanto os nós como os elementos são gerados automaticamente, através de geradores de malhas. Isto torna impossível controlar a sequência de geração de nós ou elementos de modo a minimizar a Banda Perfil ou Front. Para resolver este problema foram desenvolvidos um grande número de algoritmos para reordenar nós e/ou elementos.

Um dos métodos, mais amplamente utilizado, para reordenação nodal é o de Cuthill-McKee (CM) [3] que está baseado na teoria dos grafos. Este método requer a criação de uma lista de adjacências que contém, para cada nó da estrutura, a lista de nós adjacentes (ligados através de um elemento). A memória e o trabalho envolvido para determinação da lista de adjacências pode ser extremamente grande. A memória, para elementos de ordem superior, pode, inclusive, exceder ao tamanho da matriz de rigidez K . Uma melhoria deste método foi apresentada por A. George [4] com o objetivo de minimizar o perfil sem alterar a Banda. Este algoritmo modificado foi denominado de Reverse Cuthill-McKee (RCM). Outro método, também bastante utilizado, é devido a Gibbs et al. [5] (GPS). Está baseado na teoria dos grafos e utiliza o conceito de nós pseudo-periféricos para a escolha de dois nós de partida. Com

Descrição do Algoritmo

Para melhor descrever o algoritmo, vamos definir alguns conceitos e notações:

Grau de um nó (ND) - é o número de nós ligados a este nó através de um elemento.

Grau de um elemento (ED) - é a soma dos graus de todos os nós ligados a este elemento.

Grau ponderado de um nó (WND) $|12|$ - é a soma dos ND dos nós ligados a este nó.

Grau ponderado de um elemento (WED) $|12|$ - é o grau de um elemento calculado usando o WND de seus nós.

Estrutura de nível do elemento L(E) - Iniciando com um elemento ou um conjunto de elementos como nível 1, os níveis subsequentes são formados a partir de uma estrutura de grafo para elementos. Assim o nível $i + 1$ contém todos os elementos ligados aos elementos contidos no nível i .

A figura 1 mostra uma estrutura de nível de elementos. Os números 1 a 5 indicam a que nível pertence cada elemento (5 níveis).

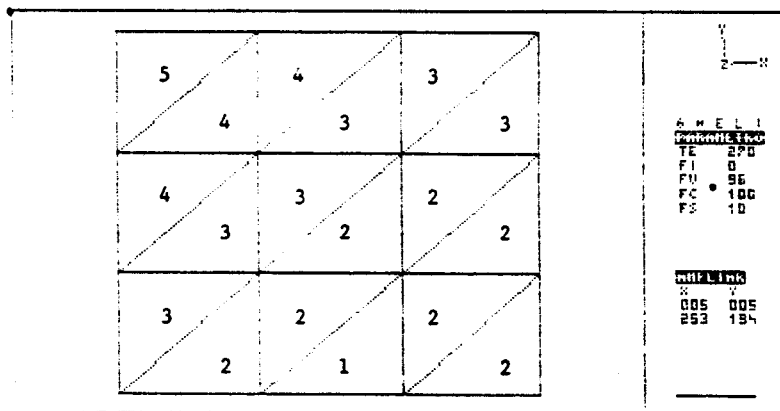


Fig. 1 - Estrutura de nível para uma estrutura com 18 elementos.

O algoritmo proposto está baseado no algoritmo PFM onde a numeração dos nós é feita seguindo a mesma sequência de eliminação de uma solução tipo FRONTAL. O algoritmo está desenvolvido em duas etapas. Na primeira é feita uma conveniente ordenação de elementos, e, na segunda, é feita a ordenação de nós segundo o critério acima exposto.

A ordenação de elementos é feita através da geração de uma estrutura de níveis de elementos $|14|$. Os elementos do nível i são numerados antes dos elementos do nível $i + 1$. Dentro de um mesmo nível, primeiro são numerados os elementos adjacentes ao elemento de menor número do nível anterior em ordem crescente de WED.

Cada vez que um elemento é numerado, significa que ele entrou no FRONT, bem como os nós a ele ligados. Verifica-se, então, quais os nós do FRONT que completaram suas equações e se lhes atribui um novo número, retirando-os do FRONT.

Quando não houver mais nenhum nó no FRONT significa que todos já foram renumerados.

Na figura 2 apresenta-se uma estrutura com 9 elementos onde está indicado a numeração original. Na figura 3 aparece a estrutura de nível de elementos com raiz no elemento 1. Os super índices correspondem aos novos números dos elementos. A tabela da figura 4 dá para cada nó original o seu novo número de ordem.

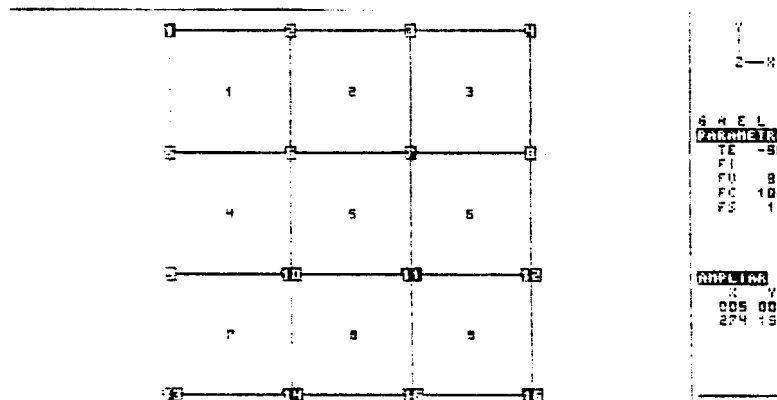


Fig. 2 - Estrutura com os elementos e sua numeração original.

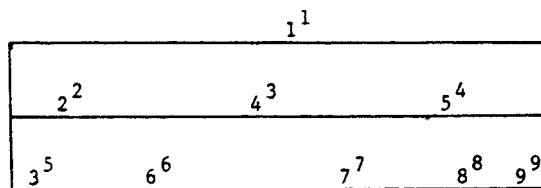


Fig. 3 - Estrutura de níveis para o exemplo da Fig. 2. O super índice corresponde a ordem do elemento após reordenação

NÓ ORIGINAL	NÓ REORDENADO
1	1
2	2
3	5
4	6
5	3
6	4
7	7
8	8
9	9
10	11
11	13
12	14
13	10
14	12
15	16
16	15

Fig. 4 - Nova numeração dos nós para o exemplo da Fig. 2.

Para a construção da estrutura de nível da figura 2, foi preciso iniciar por um determinado elemento. A escolha do elemento ou elementos iniciais, é feita, automaticamente, no programa. A eficiência do algoritmo de reordenação depende, em parte, desta escolha.

A escolha do elemento inicial é feita através da escolha de um nó inicial. A dificuldade em encontrar o nó inicial deve-se ao fato que, para um dado problema, vários nós poderiam ser usados. Para saber qual o melhor, são realizadas a reordenação e julgando, segundo um determinado critério.

No presente algoritmo utiliza-se três nós iniciais, de acordo com o sugerido no algoritmo PFM. No entanto, no PFM, para determinar os nós iniciais foi utilizado a estrutura de níveis de nós, enquanto que neste algoritmo utiliza-se a estrutura de níveis de elementos.

IMPLANTAÇÃO DO ALGORÍTMO

A implantação do algoritmo requer os seguintes passos:

- 1 - Determina-se para cada nó e elemento da estrutura o WND e WED respectivamente.
- 2 - Determina-se os 3 nós iniciais.
 - 2.1 - Primeiro nó inicial (N1) é o que tiver o menor WND.
 - 2.2 - Utilizando como raiz o elemento ou elementos ligados a N1, constrói-se uma estrutura de nível de elementos L1(E). Determina-se o nó de menor WND que pertença ao último nível de L1(E). Este será o segundo nó inicial (N2).
 - 2.3 - Constrói-se uma estrutura de nível de elementos tomando-se os elementos ligados a N2 como raiz L2(E). O terceiro nó inicial será retirado do último, nível de L2(E) que contenha nós que, também, estejam no último nível de L1(E). Somente os nós que estejam no último nível de L1(E) serão considerados. Dentre esses nós toma-se o de menor WND.
- 3 - Para cada nó inicial, determina-se a estrutura de nível de elementos, tomando-se, como raiz, os elementos ligados ao nó inicial. Numera-se os elementos nível a nível da seguinte maneira:
 - 3.1 - Numera-se os elementos da raiz (nível 1) em ordem crescente de WED.
 - 3.2 - Para cada nível subsequente, numera-se, em ordem crescente de WED, os elementos adjacentes ao elemento de menor número do nível anterior. A seguir, repete-se o processo, para os elementos adjacentes ao próximo elemento de menor número

mero do nível anterior, e, assim, sucessivamente. Quando todos os elementos do presente nível estiverem renumerados, passa-se ao nível seguinte e reinicia-se o processo.

3.3 - Para a reordenação de elementos obtida em 3.2, faz-se uma reordenação de nós da seguinte maneira:

3.3.1 - Adiciona-se ao FRONT todos os nós ligados ao elemento 1.

3.3.2 - Numera-se os nós que se completaram retirando-os do FRONT.

3.3.3 - Adiciona-se ao FRONT os nós do próximo elemento determinado pela ordenação de 3.2.

3.3.4 - Repete-se 3.3.2 e 3.3.3 até que todos os nós estejam renumerados.

3.4 - Determina-se a Banda e o Perfil para a numeração obtida em 3.3.

4 - Seleciona-se a numeração que produz a menor Banda.

ESQUEMA DE ARMAZENAMENTO

Como o algoritmo foi desenvolvido para rodar em microcomputador, procurou-se minimizar, ao máximo, a memória necessária. Os principais arranjos utilizados são:

LC - contém a conectividade dos elementos. A dimensão deste arranjo é igual ao número de elementos vezes o número máximo de nós por elemento da estrutura.

LIN,QLN - LIN contém a lista de elementos ligados a cada nó. QLN é o arranjo apontador de LIN. A dimensão de QLN é igual ao número de nós da estrutura.

GWND - contém, para cada nó, o grau ponderado do nó. Dimensão é igual ao número de nós.

GWED - contém para cada elemento, o grau ponderado do elemento. Dimensão é igual ao número de elementos.

NB - contém os elementos, de um determinado nível, da estrutura de nível de elementos. Dimensão é igual ao número máximo de elementos em um mesmo nível.

NF - contém a numeração final dos elementos. Dimensão - igual ao número de elementos.

NIN - contém a numeração final dos nós. Dimensão igual ao número de nós.

RESULTADOS

O algoritmo proposto foi testado usando o sistema GAELI. Os exemplos das figuras 5-13, foram rodados em microcomputadores compatíveis com o PC-XT, PC-AT e PC-386. Todos com disco rígido e coprocessador aritmético. O algoritmo foi codificado em MS-FORTRAN e compilado com a versão 4.0.

Na tabela I, apresenta-se os resultados obtidos para Banda e Perfil com o algoritmo proposto indicado na tabela como GAELI. Também estão indicados valores obtidos com outros algoritmos encontrados na bibliografia.

A tabela II apresenta-se os tempos de processamento, para os mesmos exemplos (1 a 9), nos três tipos de computadores (PC-XT, PC-AT, PC-386).

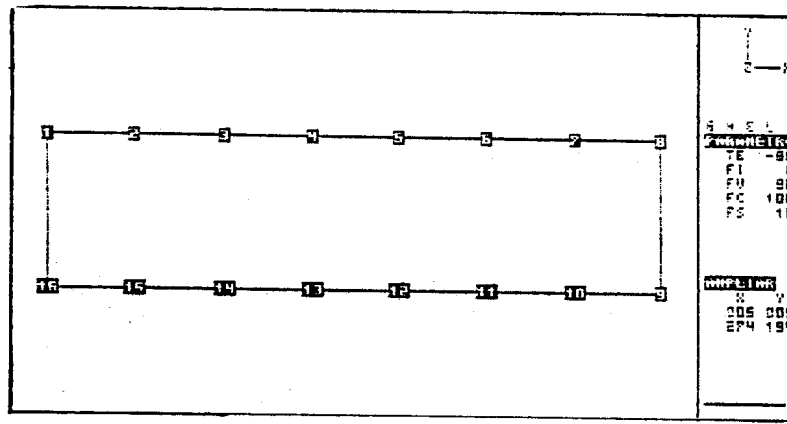


Fig. 5 - EXEMPLO 1 - Estrutura com 16 nós e 16 barras

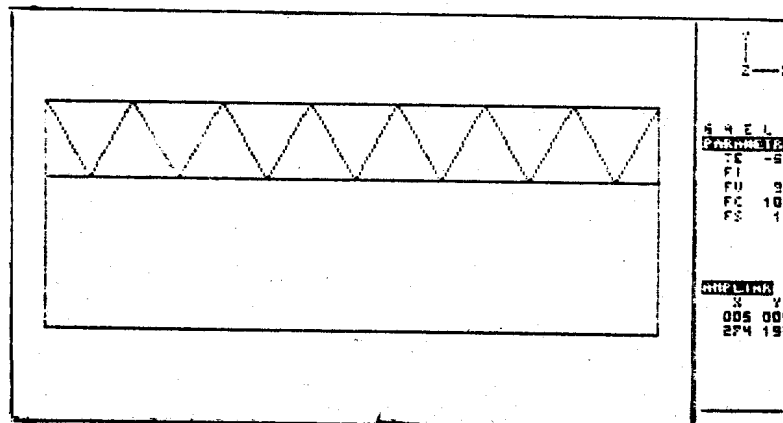


Fig. 6 - EXEMPLO 2 - Estrutura com 19 nós e 34 barras

EXEMP.	N. Nós	N. Elem	Banda				Perfil			
			CM	GROOMS	RAZ.	GAELI	CM	GPS	RCH	GAELI
1	16	16	3	3	4	3	45	45	45	45
2	19	34	5	5	6	5	80	80	80	76
3	45	85	6	7	8	8	249	249	249	249
4	20	17	10	9	8	9	121	111	99	100
5	141	58	26	-	-	26	2560	2027	1579	1496
6	72	32	--	33	-	32	--	--	--	1377
7	56	58	22	19	24	20	817	758	776	747
8	116	84	13	--	--	16	984	892	941	886
9	449	889	--	--	--	39	---	---	---	9622

Tabela I - Valores obtidos para banda e perfil com algoritmo proposto (GAELI).

EXEMPLO	TEMPO DE PROCESSAMENTO EM SEGUNDOS		
	PC - XT	PC - AT	PC - 386
1	0,22	0,11	0
2	0,44	0,16	0
3	1,15	0,39	0,11
4	0,33	0,11	0
5	1,32	0,44	0,11
6	1,92	0,66	0,17
7	1,43	0,50	0,11
8	2,14	0,71	0,16
9	----	----	0,99

Tabela II - Tempos gastos pelo algoritmo em diversos microcomputadores.

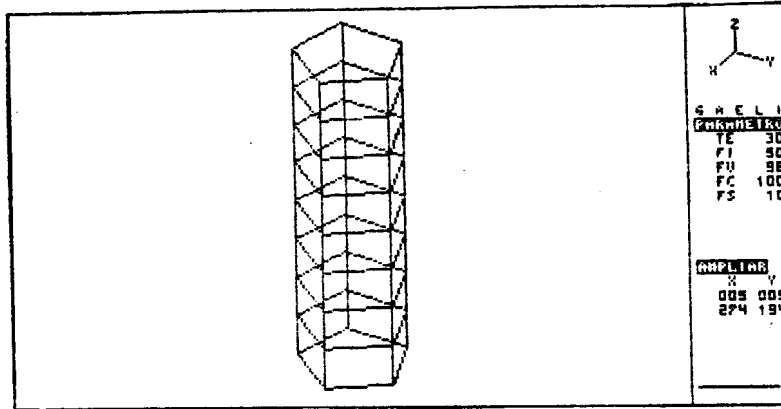


Fig. 7 - EXEMPLO 3 - Estrutura com 45 nós e 85 barras

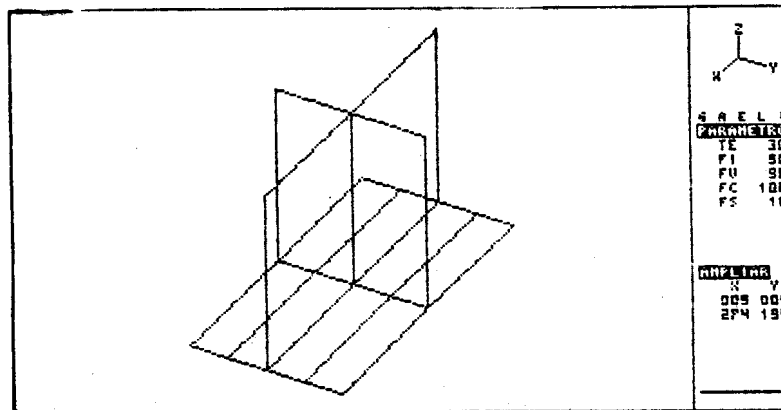


Fig. 8 - EXEMPLO 4 - Estrutura com 20 nós e 17 elementos. 8 elementos retangulares e 9 barras.

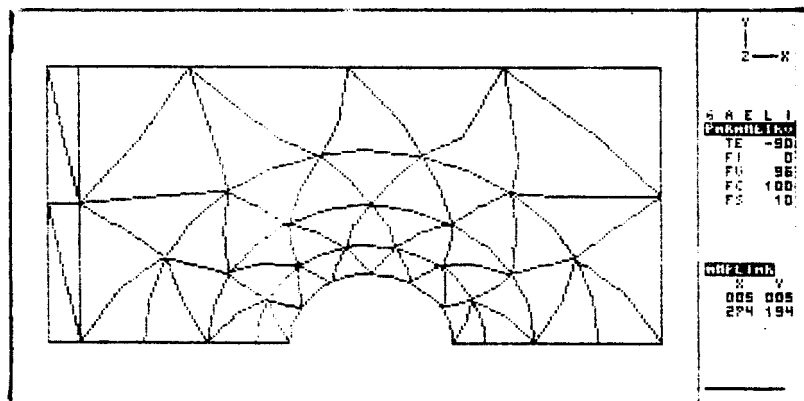


Fig. 9 - EXEMPLO 5 - Estrutura com 141 nós e 58 elementos triangulares de 6 nós.

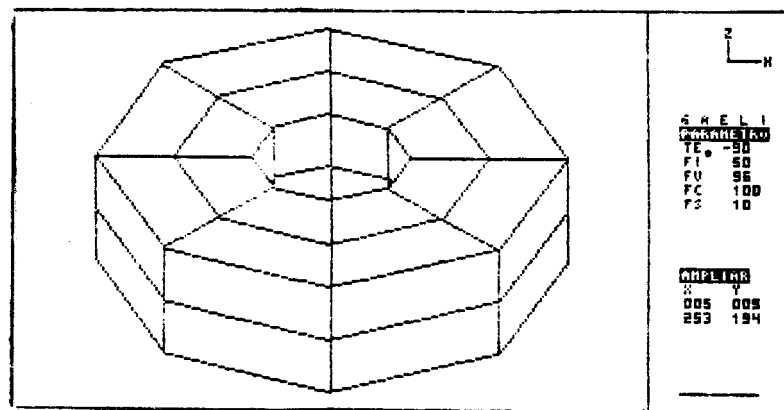


Fig. 10 - EXEMPLO 6 - Estrutura com 72 nós e 32 elementos tridimensionais com 8 nós.

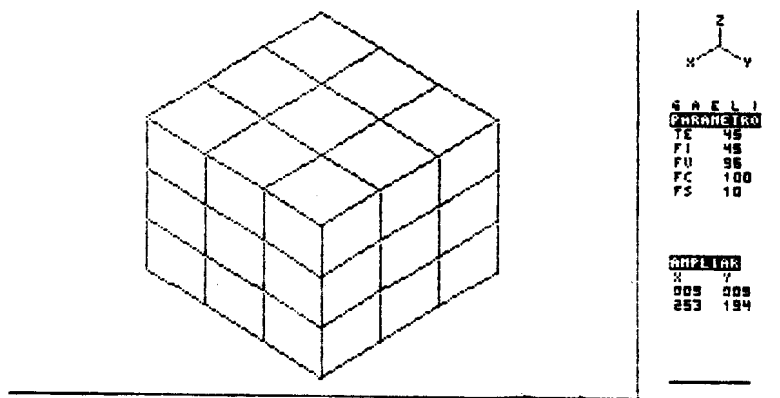


Fig. 11 - EXEMPLO 7 - Estrutura com 56 nós e 58 elementos tridimensionais com 8 nós.

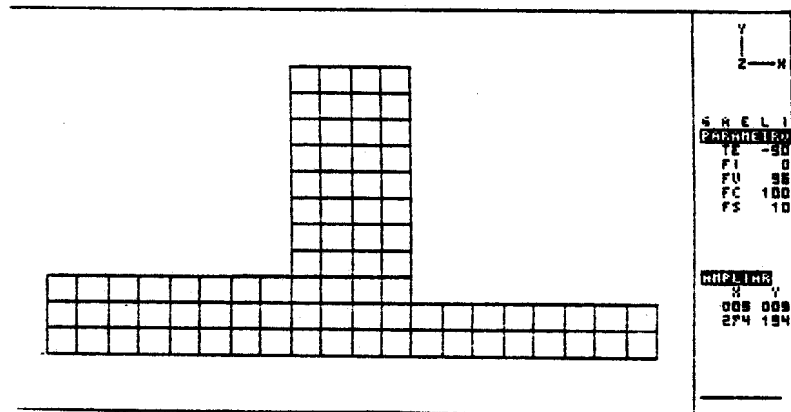


Fig. 12 - EXEMPLO 8 - Estrutura com 116 nós e 84 elementos retangulares.

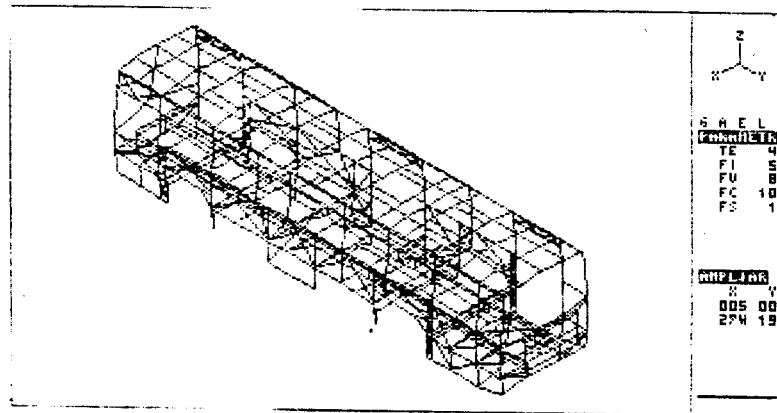


Fig. 13 - EXEMPLO 9 - Estrutura com 449 nós e 889 barras do pórtico espacial.

CONCLUSÃO

O algoritmo proposto mostrou-se eficiente para ser usado em programas de Elementos Finitos que rodam em microcomputadores. Ele satisfaz dois critérios essenciais para programas deste tipo que são: a economia de memória e o tempo de processamento. Além do mais produz, como resultado uma redução de Banda e Perfil que pode ser considerada mais que razoável. O algoritmo proposto pode ser usado tanto para reordenação nodal (produto final) como para reordenação de elementos (etapa intermediária), podendo, portanto, ser acoplado com soluções tipo "SKYLINE" e/ou Banda ou com soluções tipo "FRONTAL".

AGRADECIMENTOS

"A FINEP, CNPq e CAPES ficam os agradecimentos pelo suporte financeiro que permitiram a realização deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

- [1] | WILSON, E.L.; BATHE, K.J.; HERTY, W.P. - Direct Solution of Large Systems of Linear Equations Computers & Structures, Vol. 4, pp - 363 - 372 (1974).
- [2] | IRONS, B. - A Frontal Solutions Program for Finite Element Analysis. INT. J. Numer. Methods engng 2,5 - 32 (1970).
- [3] | CUTHIL, E. e Mckee, J. "Reducing the Bandwith of Sparse Symmetric Matrix', Proc. ACM Nat. Conf. New York (1969).
- [4] | GEORGE A., Computer Implementation of the Finite Element Method. Tech. Rep. STAN - CS - 71 - 208. Computer Science Dept. Stanford Univ. (1971).
- [5] | GIBBS N., Poole W., Stoctmeyer, An Algorithm for reducing the Bandwith and profile of a sparse matrix. SIAM J. Numer. Anal. 13, (2) (Abril 1976).
- [6] | GROOMS H.R., 'Algorithm for matrix bandwith reduction'. J. Struct. Div., ASCE 98 (ST1) 203 - 214 (1972).
- [7] | AKMAR, G. DHATT G., 'An automatic node relabelling scheme for minimizing a matrix on network bandwith'. Int. J. Num. Meth. Engng, 10, 787 - 797 (1976).
- [8] | COLLINS, R.J. 'Bandwith reduction by automatic renumbering'. Int. J. Num. Meth. Engng, 6, 345 - 356 (1973).
- [9] | BYKAT, A. 'A note on an element ordening scheme Int. J. num. Meth. Engng, 11, 194-198 (1977).
- [10] | RAZZAQUE, A. 'Automatic reduction, of frontwith for finite element analysis'. Int. J. Num. Meth. Engng 15 - 1315-1324 (1980).
- [11] | PINA H.L.G. - 'An Algorithm for frontwidth reduction' - Int. J. Num. Meth. Engng. 17, 1539 - 1546 (1981).
- [12] | HOIT, M., WILSON F.L., 'An Equation Numbering Algorithm based on a Minimum FRONT criteria - Int. J. Num. Meth. Engng. 16, 225-239 (1983).
- [13] | GROEHS, A., SANTOS, M.I., - Geração de Malha no Sistema GAELI Colloquia'88 - CEDEX - MADRID ESPANHA - 1988.
- [14] | SILVESTER P.P., AUDA H.A., - 'A Memory Economic Frontwidth Reduction Algorithm - Int. J. for Num. Meth. Engng. 20, 733 - 743 (1984).
- [15] | GROEHS, A.G., SANTOS, M.I. - Esquema Integrado para Análise de Estruturas em microcomputador - Colloquia'88 - CEDEX MADRID ESPANHA - 1988.