

**VIBRAÇÕES LIVRES DE ESTRUTURAS PLANAS DE BARRAS SOB
TENSÕES INICIAIS CONSIDERANDO NÃO-LINEARIDADE
GEOMÉTRICA**

Fernando L.B. Ribeiro
Osni A. Marques
Vânia J. Karam

COPPE/UFRJ - Programa de Engenharia Civil
Caixa Postal 68506
21945 - Rio de Janeiro - RJ, Brasil

RESUMO

São apresentadas neste trabalho análises pelo Método dos Elementos Finitos de estruturas planas de barras considerando-se os efeitos de não-linearidade geométrica. Utiliza-se um elemento de pórtico capaz de representar configurações deformadas com grandes rotações. As análises consistem basicamente em obter a resposta estática não-linear da estrutura para determinados níveis de carregamento e seus correspondentes modos de vibração. Tal procedimento fornece uma relação direta entre a frequência natural da estrutura e um parâmetro de carga, possibilitando desta maneira uma avaliação da carga crítica e do modo de flambagem, através do critério de frequência nula.

ABSTRACT

In this work finite element analyses of plane frame structures are presented. A frame element capable of representing deformed configurations with large rotations is utilized. The analyses consist basically in obtaining the nonlinear static response of the structure for some levels of loading and their corresponding mode shapes. Such procedure leads to a direct relation between the natural frequency of the structure and a load parameter, making possible in this way, an evaluation of the critical load and the buckling mode through the zero frequency criterion.

INTRODUÇÃO

A análise de vibrações livres de um sistema estrutural submetido a um estado de tensões iniciais σ , consiste na resolução do problema de autovalor

$$(\underline{K}_T(\underline{u}^\sigma) - \omega^2 \underline{M}) \underline{u} = \underline{0} \quad (1)$$

sendo que ω corresponde às frequências naturais, \underline{M} a matriz de massa e \underline{u} aos autovetores ou modos de vibração. A matriz tangente \underline{K}_T depende do campo de deslocamentos \underline{u}^σ provocado pelas tensões iniciais.

Da análise não-linear sabe-se que a matriz de rigidez resulta da soma de três parcelas

$$\underline{K}_T = \underline{K}_0 + \underline{K}_\sigma + \underline{K}_u \quad (2)$$

Na equação acima, \underline{K}_0 é a própria matriz de rigidez da análise linear e \underline{K}_σ , frequentemente chamada de "matriz geométrica", depende do estado de tensões. A matriz \underline{K}_u é a única parcela que contém explicitamente os deslocamentos.

Pode-se mostrar que a matriz geométrica é proporcional ao carregamento da estrutura [1,2].

Em problemas relacionados com treliças, esfera sob pressão uniforme, e outros onde somente os esforços extensionais são preponderantes, os efeitos da parcela \underline{K}_u são desprezíveis e, nestes casos, a equação (1) toma a forma

$$(\underline{K}_T - \omega^2 \underline{M}) \underline{u} = (\underline{K}_0 + \lambda \underline{K}_\sigma - \omega^2 \underline{M}) \underline{u} = \underline{0} \quad (3)$$

onde λ é um parâmetro de carga.

Para frequências nulas, a equação (3) estabelece o problema clássico de estabilidade inicial

$$(\underline{K}_0 + \lambda \underline{K}_\sigma) \underline{u} = \underline{0} \quad (4)$$

onde \underline{K}_σ é avaliada pela solução linear do problema. Neste caso, o menor autovalor λ representa o parâmetro da carga crítica e \underline{u} o modo de flambagem.

Entretanto, se os efeitos de flexão forem relevantes, deve-se realizar a seguinte análise de autovalor

$$\underline{K}_T \underline{u} = (\underline{K}_0 + \lambda \underline{K}_\sigma + \underline{K}_u) \underline{u} = \underline{0} \quad (5)$$

ou, equivalentemente, determinar o parâmetro de carga para o qual a frequência se anula na equação

$$(\underline{K}_T - \omega^2 \underline{M}) \underline{u} = (\underline{K}_0 + \lambda \underline{K}_\sigma + \underline{K}_u - \omega^2 \underline{M}) \underline{u} = \underline{0} \quad (6)$$

ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO PARA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A formulação utilizada neste trabalho para a consideração de grandes deslocamentos baseia-se na teoria da "viga - coluna", adotando-se as aproximações propostas por JENNINGS [3]. Neste procedimento, utilizam-se duas transformações lineares, obtidas com o auxílio das Figuras I, II e III, para expressar um conjunto de deslocamentos básicos de elemento em termos de deslocamentos nodais.

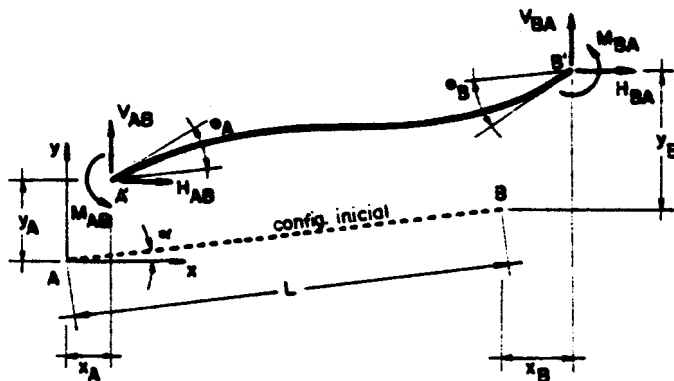


Figura I - Elemento no sistema global

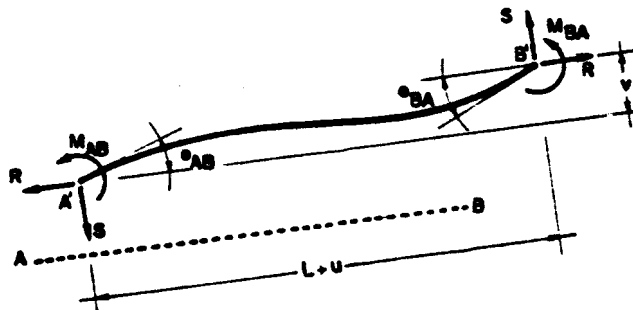


Figura II - Elemento no sistema intermediário

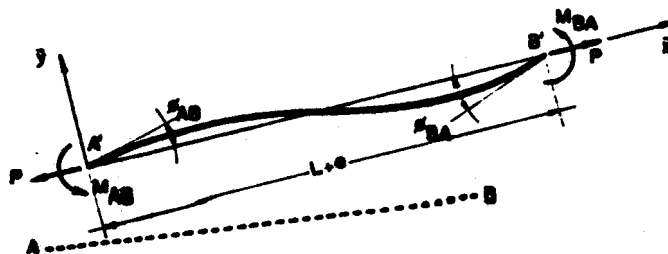


Figura III - Elemento no sistema básico

Desta forma, por meio de relações geométricas, a primeira transformação, do sistema global (Fig. I) para o sistema intermediário (Fig. II), adquire o seguinte aspecto

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta_{AB} \\ \theta_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ \theta_A \\ x_B \\ y_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ou

$$\underline{u}_I = T \underline{u}_G \quad (8)$$

Da mesma maneira, tem-se a segunda transformação, do sistema intermediário (Fig. II) para o sistema básico (Fig. III)

$$e = \sqrt{(L + u)^2 + v^2} - L \quad (9.a)$$

$$\phi_{AB} = \theta_{AB} - \text{arc tg} \left(\frac{v}{L + u} \right) \quad (9.b)$$

$$\phi_{BA} = \theta_{BA} - \text{arc tg} \left(\frac{v}{L + u} \right) \quad (9.c)$$

ou, em uma forma incremental

$$\begin{Bmatrix} de \\ d\phi_{AB} \\ d\phi_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L+u}{L+e} & \frac{v}{L+e} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{(L+e)^2} & -\frac{L+u}{(L+e)^2} & 1 & 0 \\ \frac{v}{(L+e)^2} & -\frac{L+u}{(L+e)^2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ d\theta_{AB} \\ d\theta_{BA} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ou ainda

$$\underline{du}_B = A \underline{du}_I \quad (11)$$

Assumindo-se que e seja pequeno quando comparado a L e adotando-se um polinômio do 3º grau para representar a deformada do elemento no sistema básico, a variação no comprimento devido ao curvamento é dada por

$$\int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx - L = \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \dots \right] dx - L$$

$$= \frac{L}{30} (2\phi_{AB}^2 - \phi_{AB}\phi_{BA} + 2\phi_{BA}^2) \quad (12)$$

Então, a força axial e os momentos de extremidade, obtidos pelo Teorema da Energia Potencial, associados ao sistema básico são expressos por

$$P = EA \left[\frac{e}{L} + \frac{1}{30} (2\phi_{AB}^2 - \phi_{AB}\phi_{BA} + 2\phi_{BA}^2) \right] \quad (13.a)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4PL}{30} \right) \phi_{AB} + \left(\frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} \right) \phi_{BA} \quad (13.b)$$

$$M_{BA} = \left(\frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} \right) \phi_{AB} + \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4PL}{30} \right) \phi_{BA} \quad (13.c)$$

Portanto, por diferenciação parcial das equações (13) com respeito às variáveis deslocamento, tem-se

$$\begin{Bmatrix} dP \\ dM_{AB} \\ dM_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{SIM.} & & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} de \\ d\phi_{AB} \\ d\phi_{BA} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ou

$$dP_B = K_B^E du_B \quad (15)$$

sendo

$$k_{11} = \frac{EA}{L} \quad (16.a)$$

$$k_{12} = \frac{EA}{30} (4\phi_{AB} - \phi_{BA}) \quad (16.b)$$

$$k_{13} = \frac{EA}{30} (-\phi_{AB} + 4\phi_{BA}) \quad (16.c)$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EAe}{30} + \frac{EAL}{300} (8\phi_{AB}^2 - 4\phi_{AB}\phi_{BA} + 3\phi_{BA}^2) \quad (16.d)$$

$$k_{23} = \frac{2EI}{L} - \frac{EAe}{30} + \frac{EAL}{300} (-2\phi_{AB}^2 + 6\phi_{AB}\phi_{BA} - 2\phi_{BA}^2) \quad (16.e)$$

$$k_{33} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EAe}{30} + \frac{EAL}{300} (3\phi_{AB}^2 - 4\phi_{AB}\phi_{BA} + 8\phi_{BA}^2) \quad (16.f)$$

os coeficientes da matriz de rigidez de elemento no sistema básico.

Considerando-se \underline{p}_I o conjunto de forças no sistema intermédio, que é equivalente a \underline{p}_B , tem-se, por trabalho virtual e pela expressão (11)

$$\underline{p}_I^T \underline{du}_I = \underline{p}_B^T \underline{du}_B = \underline{p}_B^T \underline{A} \underline{du}_I \quad (17)$$

ou

$$\underline{p}_I = \underline{A}^T \underline{p}_B \quad (18)$$

e, analogamente

$$\underline{p}_G = \underline{I}^T \underline{p}_I \quad (19)$$

sendo \underline{p}_G o conjunto de forças no sistema global.

A transformação de forças do sistema básico para o sistema intermediário, de forma incremental, é obtida pela diferenciação parcial da expressão (18) com respeito a forças e deslocamentos

$$d\underline{p}_I = \underline{A}^T d\underline{p}_B + \underline{D} \underline{du}_I \quad (20)$$

sendo

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ & d_{22} & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde

$$d_{11} = \frac{1}{(L+e)^3} \{-v^2(L+u)R + [2(L+u)^2 v^2] v S\} \quad (22.a)$$

$$d_{12} = \frac{1}{(L+e)^3} [-v^2 R - (L+u)^2 S] \quad (22.b)$$

$$d_{22} = \frac{1}{(L+e)^3} \{(L+u)[(L+u)^2 + 2 v^2] R - (L+u)^2 v S\} \quad (22.c)$$

Por intermédio das expressões (8), (11), (15), (19) e (20) obtém-se

$$d\underline{p}_G = \underline{I}^T (\underline{A}^T \underline{K}_B \underline{A} + \underline{D}) \underline{du}_G \quad (23)$$

sendo, portanto,

$$\underline{K}_G = \underline{I}^T (\underline{A}^T \underline{K}_B \underline{A} + \underline{D}) \underline{I} \quad (24)$$

a matriz de rigidez de elemento no sistema global, função da matriz de rigidez de elemento no sistema básico.

MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO DE PÓRTICO PLANO

Quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos como técnica aproximada de análise estrutural, a matriz de massa de um elemento é dada por

$$\underline{M}^E = \int_V \underline{N}^T \rho \underline{N} dV \quad (25)$$

sendo ρ a massa específica e N as funções de deslocamento. Esta matriz é dita consistente por ser obtida através das mesmas funções que possibilitam obter a matriz de rigidez de elemento [4]. Verifica-se que o emprego destas matrizes obtidas por soluções aproximadas conduzem a resultados que são análogos aos obtidos por soluções exatas [5].

No caso de um elemento de pórtico homogêneo de seção prismática de área A constante e comprimento L , a matriz de massa consistente tem o seguinte aspecto [1]

$$\underline{M}^E = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ \text{SIM.} & & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

A matriz de massa consistente pode, entretanto, ser diagonalizada [4] ou substituída por uma matriz discreta sem comprometimento das análises. Geralmente, os termos correspondentes a graus de liberdade de rotação têm muito pouca influência em análises envolvendo estruturas de barras.

APLICAÇÕES

Apresentam-se a seguir duas análises feitas através do Método dos Elementos Finitos do problema de vibrações livres sob tensões iniciais de estruturas planas aperticadas. Trata-se portanto de resolver o problema de autovalor definido pela Equação (6). Utiliza-se a matriz de rigidez de elemento definida em (24) e a matriz de massa definida em (26) em sua forma diagonalizada. Considerando-se em cada análise vários níveis de carregamento, foram obtidos gráficos relacionando a frequência natural da estrutura a um parâmetro de carga. Tais relações possibilitam, através do critério de frequência nula, um estudo preliminar da estabilidade da estrutura.

Aplicação 1

Nesta primeira aplicação utiliza-se um pórtico bi-rotulado cuja discretização é mostrada na Figura IV juntamente com o carregamento adotado. A Figura V mostra a variação do deslocamento vertical v no ponto A em função do parâmetro de carga λ . A Figura VI mostra a variação da primeira frequência natural da estrutura também como função de λ . Algumas configurações deformadas e seus respectivos modos de vibração são mostrados na Figura VII.

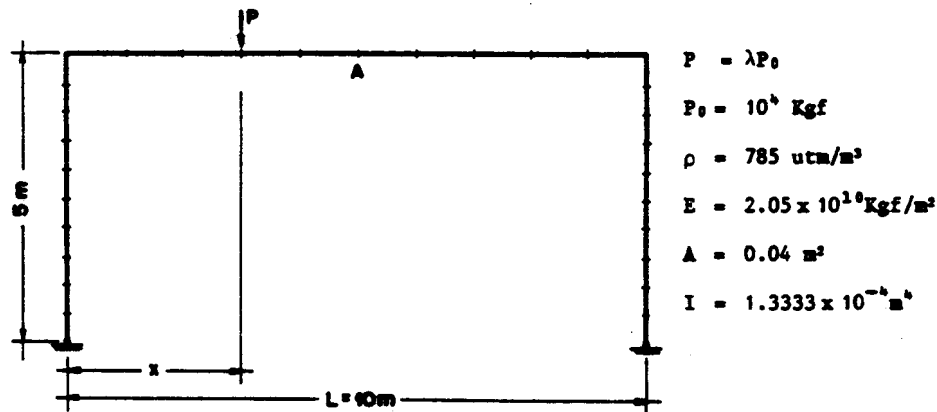


Figura IV - Discretização do pórtico

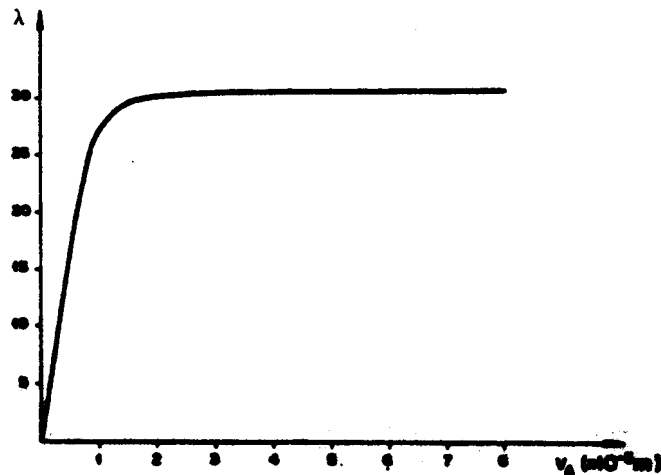


Figura V.a - Deslocamento no ponto A para $x/L = 0$

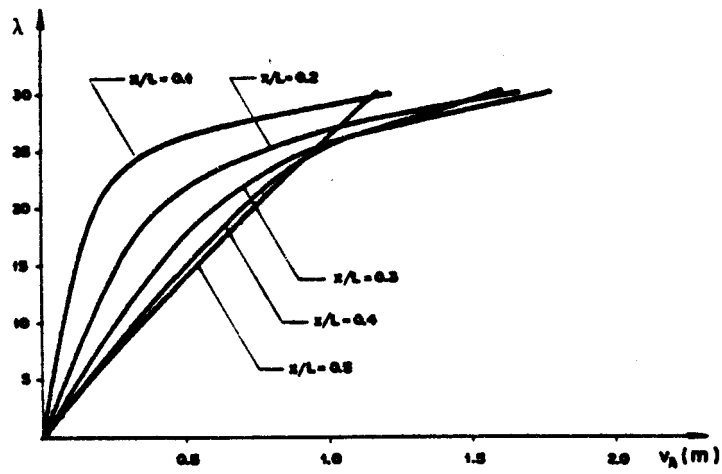


Figura V.b - Deslocamento no ponto A

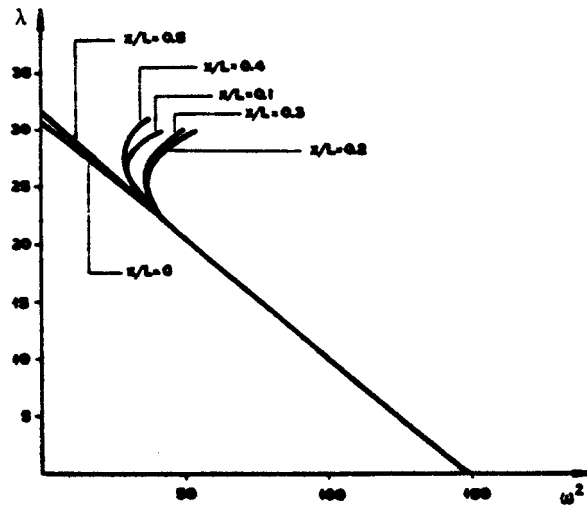


Figura VI - Variação da frequência natural

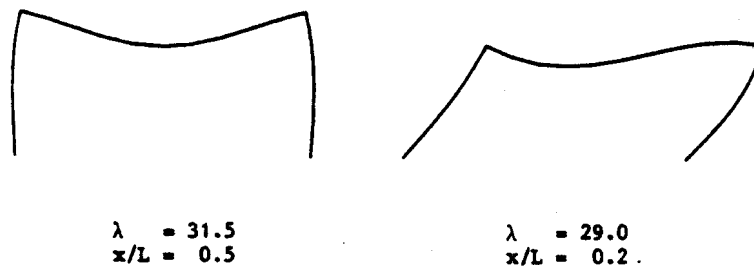


Figura VII.a - Deformadas

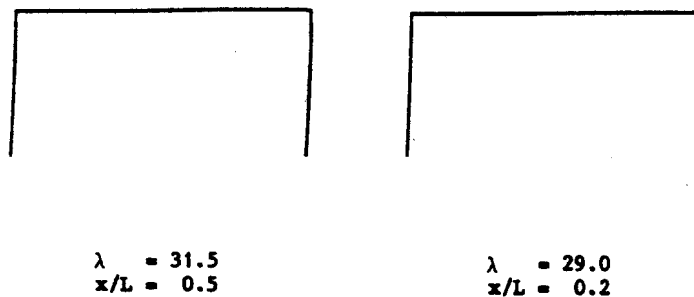
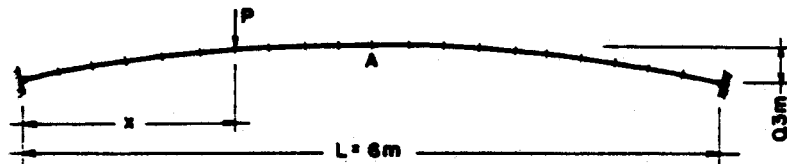


Figura VII.b - Modos de vibração

Aplicação 2

A discretização e o carregamento do arco bi-rotulado analisado nesta aplicação são mostrados na Figura VIII.

A Figura IX mostra a variação do deslocamento vertical v no ponto A e a Figura X a variação da frequência natural, ambas em função do parâmetro de carga λ . As configurações deformadas e os modos de vibração podem ser vistos na Figura XI.



$$\begin{aligned} P &= \lambda P_0 \\ P_0 &= 10^4 \text{Kgf} \\ \rho &= 785 \text{ utm/m}^3 \\ E &= 2.05 \times 10^{10} \text{Kgf/m}^2 \\ A &= 0.0225 \text{ m}^2 \\ I &= 4.2188 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Figura VIII - Discretização do arco

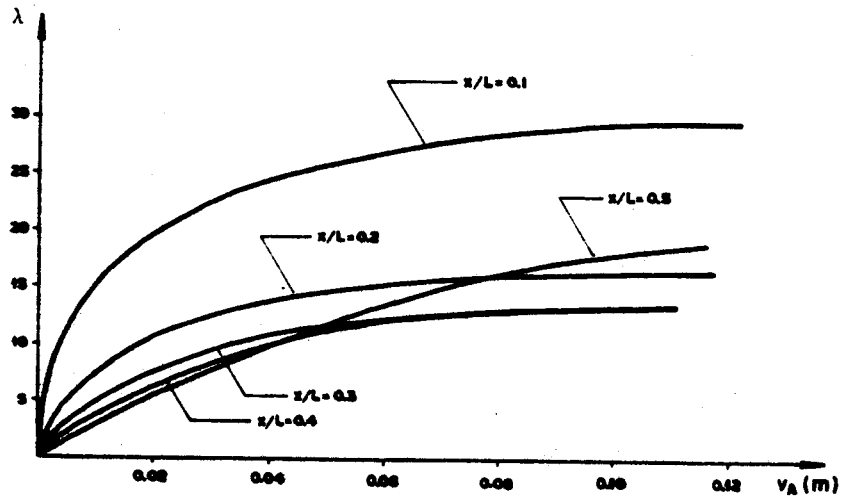


Figura IX - Deslocamento no ponto A

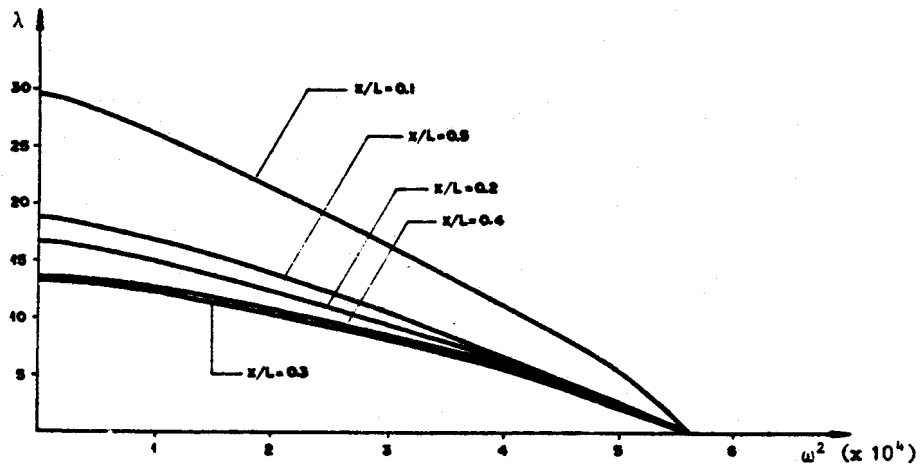


Figura X - Variação da frequência natural

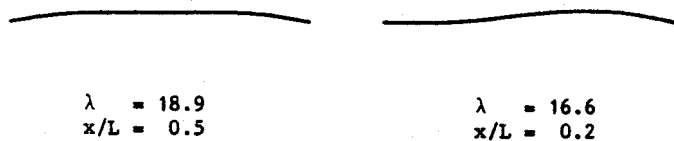


Figura XI.a - Deformadas

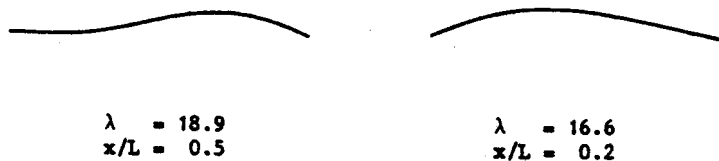


Figura XI.b - Modos de vibração

CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho um procedimento de análise do problema de vibrações livres sob tensões iniciais visando principalmente o estudo da estabilidade de estruturas através do critério de frequência nula.

Em alguns casos não foi possível avaliar a carga crítica segundo o critério adotado, uma vez que não se chegou a um valor próximo de zero para a primeira frequência da estrutura. Tal fato se deve a imposições geométricas causadas por determinadas configurações deformadas que fazem com que a estrutura tenha um acréscimo de rigidez.

É importante observar que as configurações deformadas aqui obtidas são meramente teóricas, uma vez que não foi considerada a não-linearidade física do material, e também que a presente formulação não é capaz de detectar pontos de bifurcação pré-críticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [2] Gallagher, R.H., "Finite Element Analysis Fundamentals", Prentice-Hall, 1975.
- [3] Jennings, A., "Frame Analysis Including Change of Geometry", Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, March, 1968.
- [4] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method", McGraw-Hill Book Company, Third Edition, 1977.
- [5] Venâncio Filho, F., "Aproximações para Análise Dinâmica no Método dos Elementos Finitos", Colóquio Franco-Brasileiro sobre Métodos Numéricos em Engenharia, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, Agosto de 1976.