

SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS NO LINEALES DE AUTOVALORES
EN INESTABILIDAD BAJO CARGAS DEPENDIENTES DE DESPLAZAMIENTOS

Aníbal E. Mirasso

Laboratorio de Estructuras, Universidad
Nacional de Tucumán, Argentina

Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras, Universidad
Nacional de Córdoba, Argentina

RESUMEN

En problemas de inestabilidad bajo cargas dependientes de desplazamientos se generan problemas no lineales de autovalores, en los que el autovalor aparece elevado a exponentes enteros o no. En este trabajo se estudian técnicas iterativas de solución, en las que el problema no lineal es reducido a uno lineal a través de modificar la matriz de rigidez del sistema, o de modificar la matriz de carga-geometría. Por medio de ejemplos numéricos se muestra que la primer técnica tiene dificultades o no converge a la solución correcta cuando las soluciones lineales y no lineales difieren substancialmente, mientras que la segunda técnica converge adecuadamente.

ABSTRACT

Non linear eigenvalue problems occur in instability problems under loads which depend on the displacement field. Iterative techniques are investigated in this work for the solution of such problems, in which the non-linear equation is reduced to a linear one by means of modifications in the stiffness matrix of the structure, or in the load-geometry matrix. Numerical results show that the first technique presents difficulties or does not converge to the correct solution when the linear and non-linear solutions are substantially different, whereas the second technique presents adequate convergence characteristics.

1. INTRODUCCION

En la mayoría de los análisis de estabilidad estructural mediante el criterio energético se consideran modelos que conducen al sistema especializado de /1, 2/, es decir sistemas en los que las acciones externas dependen linealmente del llamado parámetro de carga. El equilibrio en un punto de bifurcación de la trayectoria fundamental, conduce en ese caso a un problema lineal de valores propios.

Cuando es necesario considerar la dependencia de las cargas con los desplazamientos, el sistema especializado es insuficiente. Tal es el caso de cargas que siempre actúan en forma normal a la superficie donde están aplicadas. Su tratamiento tradicional conduce a sobreestimaciones de la carga crítica /3, 7/. En estos problemas el potencial de las cargas es no lineal en el parámetro de carga, y como consecuencia de ello, para conocer el estado de equilibrio crítico, o de bifurcación, es necesario resolver un problema de valores propios no lineal.

En el presente trabajo se presentan algunas estrategias numéricas que resuelven este problema no clásico de valores propios. Así mismo se presentan los resultados obtenidos para distintos casos de interés en ingeniería estructural.

2. ESTRATEGIAS NUMERICAS EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE VALORES PROPIOS NO LINEALES

En forma matricial se puede expresar un problema de valores propios no lineal como

$$[\underline{K} - \lambda \underline{K}_{G1} - \underline{K}_{G2}(\lambda^p)] \underline{x} = 0 \quad (1)$$

donde p es un exponente real.

Se han propuesto distintas transformaciones sobre el sistema no lineal, que si bien lo linealizan, agregan algunas dificultades.

2.1 Técnicas con restricciones

En /8/ se propone la transformación

$$\lambda = \lambda_1 \quad (2)$$

$$\lambda^p = \lambda_2 \quad (3)$$

que aplicado sobre el sistema original conduce al sistema

$$[\underline{K} - \lambda_1 \underline{K}_{G1} - \underline{K}_{G2}(\lambda_2)] \underline{x} = \underline{0} \quad (4)$$

con la restricción

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 - \lambda_2^p = 0 \quad (5)$$

De esta manera se ha conseguido un problema lineal de valores propios en dos parámetros, con una restricción no lineal. Se resuelve (4) para distintos valores de λ_2 hasta que se verifica (5). Este proceso se esquematiza en la Figura 1, donde el punto C representa la solución buscada.

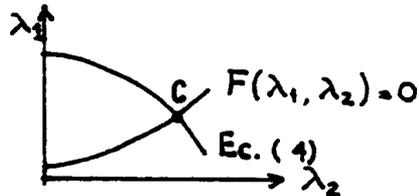


Figura 1. Valor propio lineal, con dos parámetros y una restricción no lineal.

Si se propone la transformación

$$\mu \underline{K}_{G1} = \lambda \underline{K}_{G1} + \underline{K}_{G2}(\lambda^p) \quad (6)$$

al aplicarla sobre (1) resulta,

$$[\underline{K} - \mu \underline{K}_{G1}] \underline{x} = \underline{0} \quad (7)$$

con la restricción

$$F(\mu, \lambda) = (\mu - \lambda) \underline{K}_{G1} - \underline{K}_{G2}(\lambda^p) = 0 \quad (8)$$

Se ha logrado un sistema tipo especializado, o de valores propios lineal en un único parámetro de carga, y un sistema de restricciones no lineales. Se debe resolver el problema lineal (7) moviéndose sobre el contorno del espacio $\mu-\lambda$, definido por (8), como se ilustra en la Figura 2.

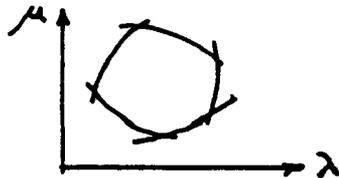


Figura 2. Valor propio lineal y restricciones no lineales.

2.2 Técnicas Iterativas

En /5/ se ha presentado una técnica basada en la proposición de un valor del parámetro de carga, descomposición de la matriz de rigidez total, y posterior análisis de los signos de los pivotes. Si todos los signos son positivos el equilibrio es estable, se incrementa el parámetro de carga un valor Δ ; hasta que aparece algún pivote negativo, y se disminuye el paso Δ , invirtiendo también su signo. Se opera de esa forma hasta conseguir disminuir el paso Δ a valores muy pequeños.

2.3 Técnica propuesta de Iteración sobre la Matriz de Rigidez.

Se presentan a continuación dos técnicas iterativas para resolver el sistema (1). Ambas resuelven directamente el problema no lineal, como una sucesión de problemas lineales. Se analizarán posteriormente resultados numéricos obtenidos con estas técnicas.

En la TÉCNICA DE ITERACION SOBRE K , se linealiza el sistema (1) proponiendo un valor inicial del parámetro de carga λ , con lo que es posible evaluar $K_{22}(\lambda^p)$ y así modificar la rigidez del sistema original. Se obtiene de esta forma, un problema clásico con rigidez modificada, cuya solución servirá como valor inicial de la próxima iteración. El sistema lineal a resolver en la etapa i -ésima es

$$\{ [K - K_{22}(\lambda_{i-1}^p)] - \lambda_i K_{21} \} \underline{x}_i = \underline{0} \quad (9)$$

Se finalizará el proceso iterativo cuando el error relativo entre dos iteraciones consecutivas sea menor que el error relativo fijado ϵ .

Este error relativo se mide mediante la diferencia entre autovectores de dos etapas sucesivas; o bien directamente sobre el autovalor. En este trabajo se ha adoptado como control de convergencia el error relativo en el autovalor, es decir

$$\epsilon_\lambda = | \lambda_{i-1} / \lambda_i - 1 | \quad (10)$$

con la condición

$$\epsilon_\lambda \leq \epsilon \quad (11)$$

Se debe destacar el cambio de rigidez del problema lineal a resolver en cada etapa iterativa. Si se usa en ellas

el Método de Iteración Vectorial /9/, es necesario factorizar la matriz de rigidez actualizada en cada etapa. Si se usa el Método de Iteración por Subespacios /9/, o el Algoritmo de Jacobi /9/, se corre el riesgo que la matriz de rigidez actualizada no sea definida positiva. Esto último es frecuente cuando la diferencia entre carga crítica de la formulación clásica y la no lineal es significativa.

2.4 Técnica Propuesta de Iteración sobre la Matriz de Carga-Geometría.

Si se escribe el sistema original (1) de la forma

$$\{ \underline{K} - \lambda [\underline{K}_{01} + \underline{K}_{02}(\lambda^{p-1})] \} \underline{x} = \underline{0} \quad (12)$$

es posible plantear un algoritmo iterativo que actualiza en cada etapa la matriz de carga-geometría o sea, reactualiza los esfuerzos de la trayectoria fundamental.

Se propone un autovalor inicial, con lo que quedan definidos los coeficientes de $\underline{K}_{02}(\lambda^{p-1})$, y se actualiza la matriz de carga-geometría del problema lineal así obtenido. En la i -ésima iteración el problema lineal a resolver es

$$\{ \underline{K} - \lambda_i [\underline{K}_{01} + \underline{K}_{02}(\lambda_i^{p-1})] \} \underline{x}_i = \underline{0} \quad (13)$$

Se logra convergencia cuando el error relativo es menor que el error relativo fijado ϵ , pudiéndose definir el error relativo ϵ_n de la misma forma que en la Iteración sobre la Matriz de Rigidez. En este trabajo se adoptó un error relativo en el autovalor como lo expresa la ecuación (10).

Nótese que se ha transformado el problema no lineal (1) en tantos problemas lineales (13) como iteraciones sean necesarias para obtener la convergencia de (11).

Estos problemas lineales mantienen todas las características de la formulación clásica del equilibrio crítico en un punto de bifurcación.

Se debe observar que si la no linealidad no solamente es en el autovalor, sino también en el autovector, es factible la utilización de este proceso iterativo en la resolución del problema, proponiendo inicialmente un autovalor y un autovector. En la etapa i -ésima el problema lineal a resolver será

$$\{ \underline{k}_i - \lambda_i [\underline{k}_{0i} + \underline{k}_{02}(\lambda_{i-1}^{p-1}, \underline{x}_{i-1})] \} \underline{x}_i = \underline{0} \quad (14)$$

2.5 Método de Transformación Directa.

Cuando en el sistema original (1), unicamente aparecen potencias enteras del autovalor, se puede encontrar un sistema lineal de valores propios cuya solución es la solución exacta del prolema no lineal.

Como se demuestra en /10/, es posible disminuir el máximo exponente E del autovalor a un exponente unitario, aumentando E veces el número de incognitas del sistema.

Sea el sistema no lineal

$$(\underline{k}_1 - \lambda \underline{k}_1 - \lambda^2 \underline{k}_2 \dots \dots - \lambda^E \underline{k}_E) \underline{x} = \underline{0} \quad (15)$$

donde E es el máximo exponente entero de λ .

Si se realizan en (15) las sucesivas sustituciones

$$\underline{x}_1 = \lambda \underline{x} \quad (16.1)$$

$$\underline{x}_2 = \lambda \underline{x}_1 \quad (16.2)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\underline{x}_{E-1} = \lambda \underline{x}_{E-2} \quad (16.3)$$

resulta

$$\underline{k} \underline{x} - \underline{k}_1 \underline{x}_1 - \underline{k}_2 \underline{x}_2 - \dots \dots - \underline{k}_E \lambda \underline{x}_{E-1} = \underline{0} \quad (17)$$

Se debe resolver simultaneamente (16) y (17), que en forma matricial es

$$(\underline{A} - \lambda \underline{B}) \underline{Z} = \underline{0} \quad (18)$$

donde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -\underline{k}_{E-1} & -\underline{k}_{E-2} & \dots & -\underline{k}_2 & -\underline{k}_1 & \underline{k} \\ \underline{I} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{I} & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{K}_E & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ & \underline{0} & \underline{0} \\ & & \underline{0} \\ & & \underline{0} & \underline{I} \\ & & \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{E-1} \\ \vdots \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_1 \\ \underline{x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

En algunos problemas, al escribir el sistema no lineal de la forma (15), las matrices de carga-geometría contienen muchos elementos nulos; e incluso en muchos casos resulta singular. Es así que al armar el sistema (18) puede originarse un sistema mal condicionado, siendo su solución muy sensible a pequeños cambios en los coeficientes del mismo.

3. RESULTADOS NUMERICOS.

Con el fin de ilustrar las técnicas descriptas en las secciones anteriores se presentan a continuación algunos ejemplos, cuyos resultados se comparan cuando es posible, con otras soluciones. En todos los casos el Problema Lineal se resolvió con el algoritmo de Iteración Vectorial /9/.

3.1 Depósito Elevado Axisimétrico.

Como se ilustra en las Figuras 3 y 4, el modelo adoptado es el de una ménsula, de material elástico lineal, con un sistema de cargas estaticamente equivalente a la acción del fluido almacenado. Se ha discretizado el problema usando la modalidad global del Método de Ritz. El planteo del equilibrio en la vecindad del punto de bifurcación conduce a los siguientes sistemas de valores propios no lineales, (ver Ref./12/):

Recipiente Cilíndrico

$$(\underline{K} - \lambda \underline{K}_{G1} - \lambda^2 \underline{K}_{G2}) \underline{x} = 0 \quad (22)$$

Recipiente Cónico

$$(\underline{K} - \lambda \underline{K}_{G1} - \lambda^{4/3} \underline{K}_{G2}) \underline{x} = 0 \quad (23)$$

Se ha tomado como referencia la carga crítica de Euler, es decir cuando las solicitaciones no dependen de los desplazamientos, a saber

$$P_E = EJ \frac{\pi^2}{(2L)^2} \quad (24)$$

Si se expresa la carga crítica del problema no lineal como una carga de tipo Euler equivalente, queda en evidencia la longitud de pandeo equivalente k , es decir

$$P_{Cr} = EJ \frac{\pi^2}{(kL)^2} \quad (25)$$

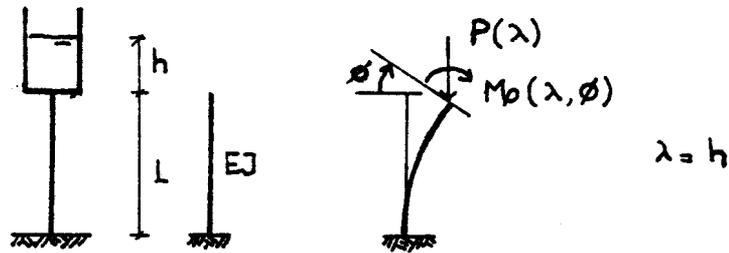


Figura 3. Modelo Adoptado para Recipiente Cilíndrico.

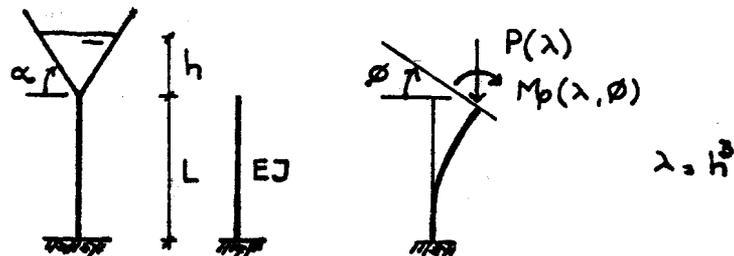


Figura 4. Modelo Adoptado para Recipiente Cónico.

Las Tablas Ia y Ib muestran la solución dada por el Método de Transformación Directa para el estado crítico de depósitos elevados cilíndricos. Se exigió un alto número de iteraciones para lograr un ϵ_λ suficientemente pequeño para considerar esa solución como exacta.

Para 50 iteraciones la Técnica de Iteración sobre K_0 dió un resultado similar al Método de Transformación Directa en 80 iteraciones. A su vez estos resultados son sumamente cercanos al considerado como exacto.

Es de destacar la gran disminución en el valor de carga crítica obtenida respecto a la solución clásica, debido a la alta dependencia de la carga con los desplazamientos.

La Técnica Iterativa sobre K alcanzó convergencia para un valor de carga crítica 5,3 veces superior a la carga de Euler. Es decir, su comportamiento fue totalmente ineficaz.

Las Tablas IIa y IIb presentan las soluciones obtenidas para un depósito elevado cónico. El bajo error relativo ϵ_λ alcanzado por el Método de Transformación Directa, permite tomar esta solución como exacta del problema no lineal. Es notable el bajo esfuerzo computacional requerido por la Técnica de Iteración sobre K_0 para alcanzar la solución dado por el Método de Transformación Directa.

Se debe observar la disminución que experimenta la carga crítica, respecto a la de Euler, al tener en consideración la dependencia de la carga con los desplazamientos.

La Técnica de Iteración sobre K presentó la dificultad de la presencia de un autovalor negativo. Por lo tanto, la imposibilidad de definir la potenciación del mismo en la siguiente etapa iterativa, al actualizar la matriz de rigidez.

Las Tablas III y IV muestran la convergencia del Método de Ritz para ambos depósitos. Se concluye que una solución con 3 o 4 funciones de Ritz, brinda prácticamente los valores de convergencia. Es por esto que en los análisis anteriores se adoptó ese número de funciones.

Tabla Ia. Depósito Elevado Cilíndrico. Estado Crítico
 Usando tres Funciones de Ritz.
 Datos: $EJ/L = 700(N)$, $R/L = 0.75$
 R: radio del cilindro.

TECNICA	P_r/P_e	k	MODO	Nº Iter.	ϵ_λ
ITERACION sobre \underline{K}	5,3	087	1. 0.271364 -0.07664	50	097E-4
ITERACION sobre $\underline{K_g}$	5,89E-2	8,24	1. -0.119387 +0.002381	50	041E-1
METODO TRANSFORMAC. DIRECTA	5,99E-2 (5,8E-2)	8,17 8,25	1. -0.1193142 +0.002378	500 (80)	05E-5 (045E-1)

Tabla Ib. Depósito Elevado Cilíndrico. Estado Crítico
 Usando Cuatro Funciones de Ritz.
 Datos: $EJ/L = 700(N)$, $R/L = 0.75$
 R: radio del cilindro

TECNICA	P_r/P_e	k	MODO	Nº Iter	ϵ_λ
ITERACION sobre \underline{K}	5,03	089	1. 0.238732 -0.06355 +0.02329	50	013E-3
ITERACION sobre $\underline{K_g}$	5,76E-2	8,33	1. -0.119239 0.0194394 -0.0128403	50	043E-1
METODO TRANSFORMAC. DIRECTA	5,88E-2 (5,64E-2)	8,25 (8,42)	1. -0.11977 0.019316 -0.013096	500 (70)	071E-4 (015E-1)

Tabla IIa. Depósito Elevado Cónico. Estado Crítico
Usando tres Funciones de Ritz.
Datos: $J/L = 700(N)$, $R/L = 0.75$
 $R: \text{tg}(\alpha)$

TECNICA	P_r/P_s	k	Modo	Nº Iter.	ϵ_λ
ITERACION sobre \underline{K}	En iter = 1, $\lambda_1 < 0 \therefore \nexists \lambda_1^p$				
ITERACION sobre \underline{K}_G	19,89E-2	4,49	1 -0.1113796 0.020960	12	036E-6
METODO TRANSFORMAC. DIRECTA	19,89E-2	4,49	1 -0.1113791 0.020959	208	074E-6

Tabla IIb. Depósito Elevado Cónico. Estado crítico
Usando Cuatro Funciones de Ritz
Datos: $EJ/L = 700(N)$, $R/L = 0.75$
 $R: \text{tg}(\alpha)$

TECNICA	P_r/P_s	k	Modo	Nº Iter.	ϵ_λ
ITERACION sobre \underline{K}	En iter = 1, $\lambda_1 < 0 \therefore \nexists \lambda_1^p$				
ITERACION sobre \underline{K}_G	19,40E-2	4,54	1 -0.1113655 0.017195 -0.0112795	12	060E-6
METODO TRANSFORMAC. DIRECTA	19,40E-2	4,54	1 -0.1113649 0.017195 -0.0112795	214	032E-6

Tabla III. Depósito Elevado Cilindrico.
Convergencia del Método de Ritz.
Usando Iteración sobre K_G .

Nº Func. RITZ	P_{cr}/P_k	k	MODO	Nº Iter.	E_λ
1	6,99 E-2	7,57	1	50	3,2 E-2
2	6,12 E-2	8,08	1 -0,1191623	50	3,5 E-2
3	5,89 E-2	8,24	1 -0,1193865 0,02381417	50	4,1 E-2
5	5,78 E-2	8,25	1 -0,1193375 0,0233533 -0,00137133 -0,0000864	50	4,1 E-2
6	5,77 E-2	8,33	1 -0,1186765 0,019541 -0,012832 -0,0000015 -0,0000099	50	4,3 E-2

Tabla IV. Depósito Elevado Cónico.
Convergencia del Método de Ritz
Usando Iteración sobre K_G .

Nº Func. RITZ	P_{cr}/P_k	k	MODO	Nº Iter.	E_λ
1	24,75 E-2	4,02	1.	11	5,3 E-6
2	20,8 E-2	4,39	1. -0,11063062	12	4,2 E-6
3	19,8 E-2	4,49	1 -0,1113796 0,0209601	12	3,6 E-6
5	19,84 E-2	4,49	1 -0,1113477 0,0208638 -0,001197372 -0,000049036	12	4,3 E-6
6	19,43 E-2	4,54	1 -0,1108611 0,017288 -0,0109828 -0,00000141 -0,0000087	12	3,2 E-6

3.2 Viga de Sección Angulo Bajo Carga de Agua.

Se obtienen cargas críticas para vigas de Sección Angulo, simplemente apoyadas en sus extremos y bajo la acción de carga de agua.

En la Ref./8/ y /12/ se detalla la formulación del modelo que se ha adoptado en este trabajo. La discretización se realiza por medio de la versión global del Método de Ritz. El planteo del equilibrio crítico conduce al sistema no lineal

$$(\underline{K} - \lambda \underline{K}_{G1} - \lambda^{3/2} \underline{K}_{G2}) \underline{x} = \underline{0} \quad (26)$$

Se ha obtenido valores de carga crítica para distintas variaciones de los esfuerzos en la trayectoria fundamental, teniendo siempre en consideración el peso propio de la estructura como un estado de esfuerzos independientes del parámetro de carga.

En la Tabla V se pueden observar los resultados correspondientes a esfuerzos constantes en la trayectoria fundamental. Resulta evidente el menor esfuerzo computacional de la Técnica de Iteración sobre \underline{K}_0 , frente a las otras técnicas para el mismo orden de error.

No se aprecian diferencias entre las Técnicas de Iteración sobre \underline{K} y \underline{K}_0 para el valor de momento crítico M_{cr} , ni para el modo de inestabilidad.

De la referencia /11/ se puede obtener una solución exacta para el problema clásico, es decir con carga que no depende de los desplazamientos. Para los datos de la Tabla V, de /11/ se tiene $M_{cr}=636$ KNm por lo que el efecto seguidor produce una disminución del orden del 20% en el momento crítico.

En /12/ se presenta un modelo continuo con solución exacta que para carga de agua conduce a $M_{cr}=522$ KNm.

En la Tabla VI se presentan los resultados obtenidos para una distribución de esfuerzos parabólicos en la trayectoria fundamental. Tomando como solución exacta la dada por el Método de Transformación Directa, se observa que la respuesta que brinda la Técnica de Iteración sobre \underline{K}_0 difiere de aquella en un 1%.

Para el mismo orden de error relativo ϵ_r que la solución exacta, la Técnica Iterativa sobre \underline{K}_0 exigió un

Tabla VI. Viga de Sección Angulo. Estado Crítico.
Distribución de Esfuerzos: Parabólica.
Funciones de Ritz: $\text{sen}(\pi x/L)$

TECNICA	$q_p \left[\frac{KN}{m} \right]$	MODO	Nº Iter.	ϵ_λ
ITERACION sobre K En iter=1, $\lambda < 0 \therefore \lambda \neq$				
ITERACION sobre K_0	9,99	L. -0.03641	11	0476 E-6
METODO TRANSFORM. DIRECTA	10,02	L. -0.027075	41	0278 E-6

Tabla V. Viga de Sección Angulo. Estado Crítico.
Distribución de Esfuerzos: Constante.
Funciones de Ritz: $\text{sen}(\pi x/L)$

TECNICA	$M_{cr} [KNm]$	MODO	Nº Iter	ϵ_λ
ITERACION sobre K_0	527,50	L. -0.05296	34	062 E-6
ITERACION sobre K_0	527,49	L. -0.05298	7	047 E-6
METODO TRANSFORM. DIRECTA	532,87	L. -0.03316	24	087 E-6

número de iteraciones mucho menor.

La Iteración sobre K se interrumpió en la segunda iteración al no quedar definida la potenciación del autovalor anterior que fue negativo.

Si se toma como solución del problema clásico de inestabilidad, el que de una discretización de la estructura por Bandas Finitas; que para un elemento superior al LO2 /13/ y con 8 bandas y un modo es $qcr=13.14$ KN/M, la disminución por el efecto seguidor de la carga es del orden del 31%.

4.CONCLUSIONES.

En base a los resultados presentados, se observa que la Técnica de Iteración sobre K sólo ha tenido un buen comportamiento cuando la carga crítica del sistema no lineal no se aleja demasiado de la correspondiente al problema clásico sin efecto de la carga seguidora. La actualización de la matriz de rigidez en cada etapa, cambia las características de los sistemas lineales a resolver, exigiendo un esfuerzo computacional extra. En algunos casos K puede dejar de ser definida positiva.

La Técnica de Iteración sobre K_0 no se ha mostrado sensible a diferencias entre las cargas críticas del problema no lineal y del sistema lineal. En todos los casos ha presentado una rápida convergencia, siendo esta convergencia a un estado muy cercano al exacto. En algunos casos converge a la solución exacta, aún con menor esfuerzo que el Método de Transformación Directa. Se debe destacar la buena convergencia de los autovectores. Se mantienen en todas las iteraciones las características de un sistema especializado.

El Método de Transformación Directa sí brinda la solución exacta del problema no lineal, presenta el inconveniente de aumentar el número de incógnitas del problema y el riesgo adicional de formar un sistema mal condicionado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a Silvia Raichman por su colaboración durante el desarrollo de este trabajo.

REFERENCIAS

1. Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, London, 1973.

2. Croll, J.G.A., Walker, A.C., Elementos de Estabilidad Estructural, Ed. Reverté, España, 1975.
3. Godoy, L.A. y Prato, C., Buckling of thin walled beams under water loading, J. Struc. Div., A.S.C.E, 110 (11), 2667-2676, 1984.
4. Feodosyev, V.I., Selected Problems in Strength of Materials, Ed. Mir, Moscú, 1977.
5. Almeida, F.J.P. e Rosas e Silva, R., Instabilidade de estruturas dependentes dos deslocamentos, VII Congr. Lat. Am. Metodos Computacionales en Ingeniería, Sao Carlos, SP, Brasil, 1986.
6. Jones Jr., R.F., Costello, M.G. and Reynolds, T.E., Buckling of pressure loaded rings and shells by the finite element method, Computers & Structures, 7, 267-274, 1977.
7. Loganathan, K., Chang, S.C., Gallagher, R.H., Abel, J.F. Finite element representation and pressure stiffness in shell stability analysis. Inter. Jour. Num. Meth. in Eng. 14, 1413-1429, 1979.
8. Godoy, L.A. y Prato, C., Inestabilidad de placas plegadas prismáticas por el método de bandas finitas, Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 3, 1, 77-90, 1987.
9. Bathe, K.J., Finite Element Procedure in Engineering Analysis, Prentice Hall Inc., 1982.
10. Wilkinson, R., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Press, 1967.
11. Meck, H.R., Instability of an angle section beam under an applied bending moment, Int. Journal Mechanical Sciences, 11, 199-207, 1969.
12. Mirasso, A.E., Inestabilidad de Estructuras Bajo Cargas Dependientes de Desplazamientos, Tesis Magister en Ing. Estructural, Universidad Nacional de Tucumán, 1988.
13. Raichman, S.R., Análisis Lineal y de Bifurcación de Placas Plegadas Prismáticas y No Prismáticas Usando una Banda Finita de Orden Superior, Tesis Magister en Ing. Estructural, Universidad Nacional de Tucumán, 1988.