

ELEMENTOS FINITOS EN LA INTERACCION
FLUIDO-ESTRUCTURA DE CAÑERIAS

Damián Escobar, Ph.D.

Ingeniero Senior, TECHINT S.A.C. e I.
Afectado a Empresa Nuclear Argentina de Centrales
Eléctricas
Buenos Aires, Argentina

RESUMEN

Se desarrolla un algoritmo de elementos finitos para estudiar la respuesta transitoria y la estabilidad dinámica de sistemas de cañerías tridimensionales conductoras de flujos de fluidos. La formulación desarrollada tiene en cuenta la interacción de la estructura con el fluido conducido. Se determinan soluciones transitorias mediante un método de integración directa. Las condiciones de estabilidad se determinan de dos formas: evaluando el comportamiento de atenuación de las respuestas o inspeccionando los diagramas de Argand. Se comparan soluciones analíticas, que muestran el comportamiento de estabilidad de una cañería ménsula con un soporte intermedio, con resultados experimentales.

ABSTRACT

The transient response and dynamic stability of three-dimensional pipe structures conveying fluid flows is studied using a general finite element algorithm. The formulation developed herein takes into account the dynamic interactions between the structures and the conveying fluid. Transient solutions are obtained by employing a direct integration approach. Stability conditions are determined in two different forms, evaluating the attenuation behaviors of the transient responses or inspecting the Argand diagrams. The analytical results of the stability behaviors of a cantilevered pipe with a movable intermediate support are compared with available experimental data.

INTRODUCCION

Durante varios años el estudio de la interacción de sistemas de cañerías conductoras de fluidos ha sido un tema de actualidad para la ingeniería. La mayoría de los primeros estudios estuvieron dedicados a analizar las propiedades de la ecuación diferencial que describe el movimiento de sistemas estructura fluido, y a encontrar los límites de estabilidad en función de la velocidad del fluido y de otros parámetros del sistema. Un gran número de publicaciones estudian el problema para distintas condiciones de borde y distintas condiciones de flujo. El gran avance de la cibernética en los últimos tiempos ha influido notablemente en el desarrollo de métodos numéricos.

El foco de esta publicación está dirigido a los métodos numéricos usados en la respuesta transitoria y en las condiciones de estabilidad de la interacción flujo cañería. Primero se presenta un breve resumen de los métodos empleados en la solución general del problema. A continuación se muestra el desarrollo de un algoritmo en elementos finitos que describen el comportamiento dinámico del sistema de cañerías conductoras de fluidos. El algoritmo tiene en cuenta la interacción entre la cañería y el flujo del fluido. El mismo está diseñado a estudiar estados de respuestas estables y/o transitorios, como consecuencia tiene la capacidad de estudiar las transiciones a través de las zonas de estabilidad.

RESEÑA HISTORICA

En las tres últimas décadas se han dado a conocer numerosos resultados analíticos concernientes a los problemas de interacción. Los métodos de análisis empleaban principalmente dos tipos de recursos matemáticos similares, la expansión de series y la representación modal. Debido a esto, los análisis estaban restringidos a determinadas condiciones de borde, geometría del sistema y de las fuerzas excitatrices. El problema principalmente se reducía a obtener los límites de estabilidad para un determinado modo de vibración. A medida que la geometría y la fuerza excitatriz eran más complejas se requerían de sofisticados métodos numéricos para llevar a cabo los cálculos. Ante esta situación es más conveniente usar directamente un método numérico para resolver la totalidad del problema sin tener que recurrir a la expansión modal.

Uno de los primeros trabajos sobre el análisis dinámico de cañerías conductoras de fluidos se realizaron a fines de la década de 1940, como consecuencia de las vibraciones observadas en la línea de cañería trans-arábica. La primera contribución substancial la hicieron Ashley y Haviland [1],

quienes consideraron una viga simplemente apoyada como modelo. Sin embargo Feodos'yev [10] probó que la ecuación diferencial que ellos formularon estaba incompleta. Consecuentemente derivó una versión correcta del modelo de una cañería recta conductora de fluidos. Housner [16] estudió el mismo problema pero usando el principio de Hamilton para derivar la ecuación diferencial. Independientemente, Housner y Feodos'yev encontraron que para velocidades altas, tubos simplemente apoyados pueden pandearse, como le sucede a una columna elástica sometida a compresión axial. Una solución aproximada de la ecuación diferencial la encontró Long [19], usando una serie de expansión exponencial. También realizó experimentos de tubos simplemente apoyados, y empotrado en un extremo y libre en el otro. Un estudio más general lo llevó a cabo Nicrdson [22], quien usó la teoría de cáscaras para formular la ecuación diferencial. Incluyó en el modelado del fenómeno las deformaciones axiales, radiales y perimetrales de la cáscara. Las ecuaciones generales las redujo a la ecuación de una viga. Obtuvo soluciones analíticas y resultados numéricos para varios casos de caños--viga simplemente apoyados. Para este tipo de casos, otro autor, Handelman [14], mostró con un estudio de la estructura de la ecuación diferencial la naturaleza de las frecuencias para dos rangos de velocidades del flujo.

Benjamin [5] estudió la dinámica de un sistema de tubos articulados conductores de fluidos y como un caso particular, el de un caño-ménsula con infinitos grados de libertad. Usó las ecuaciones de Lagrange para derivar la ecuación de movimiento. En otro artículo Benjamin [6] llevó a cabo trabajos experimentales para corroborar su modelo matemático. Mediante el uso de modelos esquemáticos, pudo observar dos formas de inestabilidad: pandeo y oscilaciones amplificadas (flutter). Paidousis y sus asociados [12, 13, 15, 23, 24] estudiaron las respuestas de cañerías considerando diferentes parámetros, tales como: presión interior y fuerzas gravitacionales. Esencialmente la solución se basa en la expansión modal y los resultados principalmente muestran las regiones de estabilidad en función de la velocidad del flujo y otros parámetros estructurales. A pesar de emplear expansión modal, necesita de cálculos numéricos para obtener soluciones.

Naguleswaran y Williams [20] mostraron que los puntos a lo largo de un tubo conductor de un flujo fluido vibran con diferentes ángulos de fase. Este hecho se lo atribuye al término de la ecuación diferencial con derivadas parciales mixtas. También mostraron la influencia de la presión interior en la frecuencia de vibración. El movimiento no-lineal tridimensional de tubos articulados con simetría rotacional han sido analizados por Bajaaj y Sethna [2, 3], quienes también estudiaron los movimientos tridimensionales para tubos continuos empotrados en un extremo y libre en el otro con simetría de rotación; además encontraron las soluciones de las bifurcaciones oscilatorias.

Diferentes métodos numéricos se han desarrollado, tanto para tratar las dificultades matemáticas envueltas en el tratamiento de las características básicas de los sistemas, como para resolver las complejidades físicas de los mismos. Entre los primeros métodos numéricos que trataron la interacción de fluido-estructura se encuentran: la discretización de la ecuación diferencial [11], series de Fourier [25] y métodos de integración [8].

Un algoritmo basado en una formulación de integración ha sido presentada por Ting y otros [26, 27, 28]. La ventaja de este método es su independencia de la geometría, las condiciones de borde y de las propiedades físicas del sistema. Es de fácil implementación y eficiente desde el punto de vista computacional. Liu [18] usó este método para formular la ecuación de movimiento de un caño helicoidal conductor de un fluido.

MODELO CON ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos se ha usado exitosamente durante los últimos veinticinco años para resolver toda clase de problemas de ingeniería. Esta técnica numérica se usa para resolver una amplia gama de problemas físicos. En la presente se empleará para encontrar la respuesta dinámica de un sistema estructural de cañerías sujetas a fuerzas inducidas por flujos de fluidos.

Para modelar el sistema se han hecho algunas hipótesis simplificatorias. Cuando el largo de un caño es mucho mayor que la dimensión de su sección transversal, las propiedades detalladas del flujo, tales como turbulencia y flujos secundarios, son insignificantes comparadas con el flujo principal, por lo tanto las mismas no son consideradas en el análisis.

Las fuerzas de fricción entre el flujo y las paredes del tubo se cancelan y por lo tanto no es necesario considerarlos. Si la presión en el outlet del tubo es igual a cero, se puede asumir que la presión del fluido tiene un efecto despreciable en la respuesta dinámica del sistema de cañerías.

Se asume para el caño un comportamiento uniaxial, elástico, lineal y con pequeñas deformaciones. Sin embargo hay que notar que la presente formulación puede extenderse sin mayores dificultades a estructuras planares y volumétricas incluyendo flujos pulsantes, grandes deformaciones y no linealidades.

El sistema de cañerías se modela con elementos finitos. Las matrices M , C y K , matrices de masa, amortiguamiento y

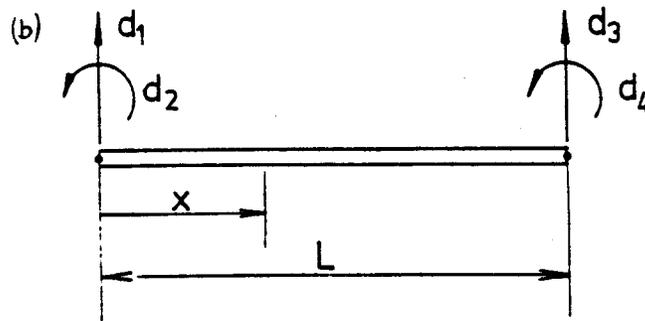
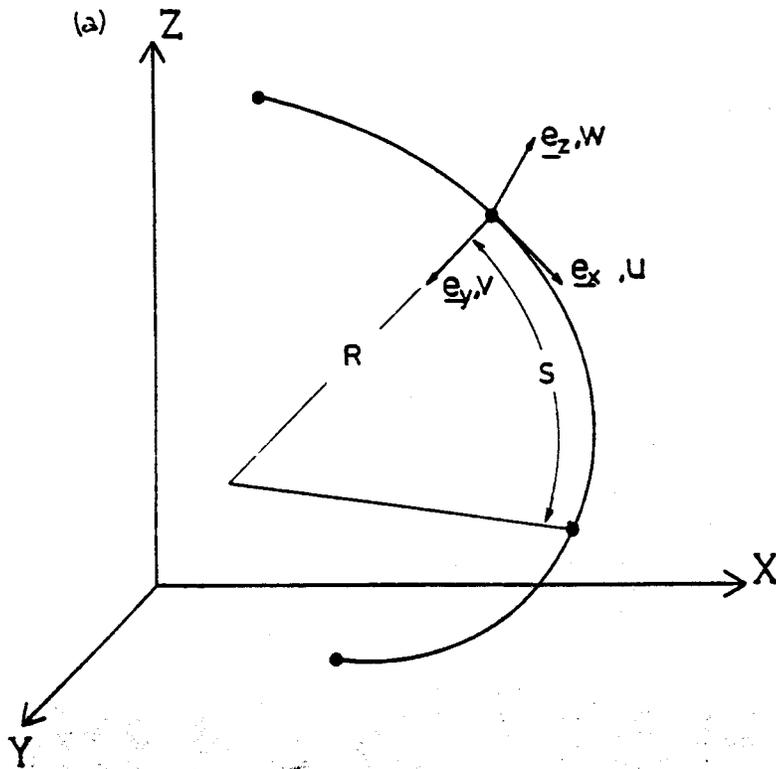


Fig.1 (a) Cañería general; (b) Elemento caño con cuatro grados de libertad.

rigidez respectivamente, representan las propiedades dinámicas y características físicas de todo el conjunto de elementos. La ecuación de movimiento del sistema es:

$$M \ddot{D} + C \dot{D} + K D = F, \quad (1)$$

donde los símbolos D , \dot{D} , \ddot{D} , y F representan los vectores de desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza respectivamente. Cada una de estas matrices se obtiene ensamblando las correspondientes matrices de los elementos.

Los efectos de la interacción fluido-estructura se modelan como fuerzas externas. La segunda ley de movimiento de Newton relaciona estas fuerzas con la aceleración transversal del flujo [26]. Reemplazando en la ecuación de fuerza de un elemento queda:

$$f(t) = \int_0^1 N g ds = \int_0^1 N m \left[g - \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right] ds, \quad (2)$$

donde $f(t)$ es la fuerza en el elemento inducida por la masa del fluido, N es a matriz de formas modales, g la carga distribuida actuante en el elemento, m la masa del flujo por unidad de longitud, g la matriz de la aceleración de la gravedad y $x(t)$ el vector de desplazamiento del flujo.

Consideremos un elemento caño general tridimensional (Fig.1a). Los desplazamientos de un punto genérico del caño se denotan con u , v y w , correspondientes con las coordenadas locales x , y , z . Teniendo en cuenta estos sistemas de coordenadas, el vector aceleración de una partícula de fluido se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \left(\ddot{v} + 2 \frac{v}{R} \dot{u} + 2 \frac{v}{r} \dot{u} - \frac{v^2}{R^2} v - \frac{v^2}{r^2} v + \frac{A}{R} u + \frac{A}{r} u + \frac{v^2}{R} \right. \\ & \left. + \frac{v^2}{r} \right) e_y + \left(\ddot{u} - 2 \frac{v}{R} \dot{v} - \frac{A}{R} v - \frac{v^2}{R^2} u - \frac{v^2}{r^2} w + A \right) e_x \\ y & \quad + \left(\ddot{w} - 2 \frac{v}{r} \dot{v} - \frac{A}{r} v - \frac{v^2}{Rr} u - \frac{v^2}{r^2} w + A \frac{R}{r} \right) e_z. \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{u} = & u_{,t} + v u_{,s} & \dot{v} = v_{,t} + v v_{,s} & \dot{w} = w_{,t} + v w_{,s} \\ \ddot{u} = & u_{,tt} + 2 v u_{,st} + v^2 u_{,ss} + A u_{,s} \\ \ddot{v} = & v_{,tt} + 2 v v_{,st} + v^2 v_{,ss} + A v_{,s} \\ \ddot{w} = & w_{,tt} + 2 v w_{,st} + v^2 w_{,ss} + A w_{,s}. \quad (4) \end{aligned}$$

donde R es el radio de curvatura, que por simplicidad se asume constante, T el radio de torsión, V y A la velocidad y aceleración del flujo. El símbolo $(.)$ representa la derivada respecto del tiempo y el símbolo $(,st)$ la segunda derivada parcial respecto de s y t .

En la referencia [9] se encuentra una detallada derivación del presente algoritmo, aquí sólo se presenta una breve descripción de la derivación.

Substituyendo Ec.(3) y (4) en Ec.(2), y expresando los desplazamientos del elemento en función de los desplazamientos nodales d y las funciones de forma N , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$M^* \ddot{d} + c^* \dot{d} + k^* d = f^*, \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} M^* &= M + M^* & c^* &= c + c^* \\ k^* &= k + k^* & f^* &= f + f^* \end{aligned} \quad (6)$$

$$m_t = \int_0^1 m_f \left(\frac{N_x}{L} \frac{N_x^T}{L} + \frac{N_y}{L} \frac{N_y^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_z^T}{L} \right) ds, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} c_t &= \int_0^1 2 m_f \left(V \left(\frac{N_x}{L} \frac{N_{t,x}^T}{L} + \frac{N_y}{L} \frac{N_{t,y}^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_{t,z}^T}{L} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{V}{L} \left(\frac{N_x}{L} \frac{N_y^T}{L} - \frac{N_y}{L} \frac{N_x^T}{L} \right) - \frac{V}{L} \left(\frac{N_x}{L} \frac{N_z^T}{L} - \frac{N_z}{L} \frac{N_x^T}{L} \right) \right) ds, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_t &= \int_0^1 m_f \left(V^2 \left[\frac{N_x}{L} \frac{N_{xx}^T}{L} + \frac{N_y}{L} \frac{N_{yy}^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_{zz}^T}{L} \right] \right. \\ &\quad + A \left[\frac{N_x}{L} \frac{N_{t,x}^T}{L} + \frac{N_y}{L} \frac{N_{t,y}^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_{t,z}^T}{L} \right] - \frac{V^2}{L} \left[\frac{N_x}{L} \frac{N_{t,y}^T}{L} + \frac{N_y}{L} \frac{N_{t,x}^T}{L} \right] \\ &\quad - 2 \frac{V^2}{L} \left[\frac{N_y}{L} \frac{N_{t,z}^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_{t,y}^T}{L} \right] - \frac{V^2}{L} \left[\frac{N_x}{L} \frac{N_{t,z}^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_{t,x}^T}{L} \right] \\ &\quad - \frac{V^2}{L} \left[\frac{N_y}{L} \frac{N_{t,y}^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_{t,z}^T}{L} \right] - \frac{A}{L} \left[\frac{N_x}{L} \frac{N_y^T}{L} + \frac{N_y}{L} \frac{N_x^T}{L} \right] \\ &\quad \left. - \frac{A}{L} \left[\frac{N_x}{L} \frac{N_z^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_x^T}{L} \right] - \frac{V^2}{L} \left[\frac{N_x}{L} \frac{N_z^T}{L} + \frac{N_z}{L} \frac{N_x^T}{L} \right] \right) ds, \quad (9) \end{aligned}$$

$$f_t = \int_0^1 m_f \left[A \frac{N_x}{L} + \frac{V^2}{L} \frac{N_y}{L} + R \frac{A}{L} \frac{N_z}{L} \right] ds. \quad (10)$$

Cabe destacar que el modelo de la estructura de cañerías con elementos finitos dado por las Ecs. (10) - (15) es muy general. Sin embargo, por simplicidad se asume que el flujo de fluido se comporta como una masa continua de partículas que se mueven a lo largo del eje longitudinal del caño. Con esta hipótesis el desarrollo es "exacto" para sistemas modelados con elementos viga. Un modelo de cáscara que incluye deformaciones anulares y deformaciones de las paredes del tubo se puede implementar agregando grados de libertad adicionales al elemento caño tridimensional, sin tener que cambiar los modelos del flujo y de la estructura. La interacción entre ambos pueden modelarse independientemente uno del otro, así cada parte del modelo se puede mejorar o cambiar de acuerdo a las distintas necesidades.

La ecuación del movimiento del sistema se obtiene ensamblando la ecuación 5 de todos los elementos caños del sistema, detallada a continuación:

$$M^* \ddot{D} + C^* \dot{D} + K^* D = F^* \quad (11)$$

Las matrices coeficientes de la Ec. (11) son dependientes del tiempo, por lo tanto esta es una ecuación diferencial matricial con coeficientes variables. La variabilidad la introducen los cambios de velocidad y la aceleración del flujo. Para el caso particular del flujo de velocidad constante, los coeficientes matriciales son también constantes.

La integración numérica directa de la ecuación diferencial es una técnica sencilla para encontrar la respuesta dinámica transitoria. En este estudio se emplea el método implícito de Newmark [21]. Una expansión modal requeriría un gran número de modos para tener en cuenta altas frecuencias de vibraciones que son de importancia para este problema.

CANOS RECTOS CON FLUJO A VELOCIDAD CONSTANTE

A continuación la formulación desarrollada en el punto anterior se aplica a caños rectos con velocidad de flujo constante. De esta manera los resultados pueden compararse con resultados de teorías existentes y con datos experimentales.

La masa de flujo se puede considerar como una masa uniformemente distribuida a lo largo del caño. Si bien el fluido está en movimiento, la cantidad de fluido que sale del caño es igual a la que entra y, por lo tanto, la masa de flujo que permanece en el caño es constante con respecto al tiempo, si la velocidad se mantiene. Para este caso las matrices coeficientes de la Ec. (8) se reducen a:

$$\underline{u}^e = \underline{u} + \underline{u}_T = \underline{u} + u_T \int_0^1 \underline{N}_x \underline{N}_x^T dx \quad (12)$$

$$\underline{e}^e = \underline{e} + \underline{e}_T = \underline{e} + 2 u_T \int_0^1 \underline{N}_x \underline{N}_{x,x}^T dx \quad (13)$$

$$\underline{k}^e = \underline{k} + \underline{k}_T = \underline{k} + u_T \int_0^1 \underline{N}_x \underline{N}_{x,x}^T dx. \quad (14)$$

Para evaluar las integrales anteriores hay que seleccionar un tipo de elemento con sus correspondientes funciones de forma. Si se elige un elemento viga de cuatro grados de libertad con una función desplazamiento cúbica (Fig.1b), el vector nodal del elemento toma la siguiente forma

$$\underline{d}^T = \{ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \},$$

donde d_1 y d_3 son los desplazamientos transversales de los nodos y d_2 y d_4 las rotaciones. Las funciones de forma se pueden escribir como:

$$\underline{N}^T x = \{ N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \}, \quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} & N_2 &= 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \\ N_3 &= -x + 2 \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} & N_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo Ec.(15) en Ec.(13) y (14) y llevando a cabo la integración se obtiene:

$$\underline{e}_T = \frac{u_T}{30} \begin{bmatrix} -30 & -4L & 30 & -4L \\ 6L & 0 & 6L & -L^2 \\ -30 & -4L & 30 & 6L \\ 6L & L^2 & -4L & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$k_r = \frac{\rho_f v^2}{30L} \begin{bmatrix} -36 & -33L & 36 & -3L \\ -3L & -4L^2 & 3L & L^2 \\ 36 & 3L & -36 & 33L \\ -3L & L^2 & 3L & -4L^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

m_r tiene la misma forma que m . Las matrices m , c , y k se encuentran en cualquier libro de elementos finitos.

Debe notarse que la matriz k_r no es simétrica. Además todos los elementos de esta matriz excepto k_{r24} y k_{r42} tienen signos opuestos a los elementos correspondientes de K (matriz de rigidez de la cañería sin fluido). La matriz k_r es proporcional al cuadrado de la velocidad. A medida que la velocidad aumenta el valor absoluto de los elementos de la matriz k_r aumentan rápidamente, disminuyendo así la rigidez total del sistema. Cuando la rigidez efectiva del sistema se acerca a cero, los desplazamientos de la cañería empiezan a diverger. Las contribuciones de m_r y c_r a la inestabilidad del sistema no son tan significativas porque: la matriz de masa es independiente de la velocidad, y los elementos de la diagonal de c_r , que son los principales contribuyentes a la matriz de amortiguamiento son cero. El efecto de amortiguamiento proviene de los elementos ubicados fuera de la diagonal, los cuales tienen una sensibilidad mayor a los modos de vibración más altos.

La matriz c_r es antisimétrica. Esta antisimetría junto con la disimetría de k_r se pueden interpretar físicamente de la siguiente forma: en un tubo simplemente apoyado la máxima deflexión no estará en el medio del tramo, sino se ubicará en un punto entre el centro y el apoyo hacia el cual se dirige el flujo. Mientras mayor sea la velocidad, el punto de máximo desplazamiento se verá más desplazado del centro en la dirección del flujo.

CONDICIONES DE ESTABILIDAD

Un sistema se vuelve inestable cuando el flujo de fluido alcanza una velocidad crítica. Se pueden definir dos modos típicos de inestabilidad: pandeo y flutter. En el modo de pandeo los desplazamientos del caño crecen rápidamente sin oscilaciones, en forma similar a lo que sucede con una columna sometida a la carga axial crítica por pandeo. Esta inestabilidad es típica en caños con ambos extremos empotrados, ambos extremos articulados o uno empotrado y el otro articulado.

En este trabajo la velocidad crítica se determina por medio de dos técnicas distintas. Un método se basa en el análisis de los autovectores complejos del sistema. La otra técnica es analizando la atenuación de la respuesta transitoria. Con ambas se pueden encontrar tanto la velocidad crítica como el modo de inestabilidad.

El análisis de los autovectores solo es válido para sistemas lineales con coeficientes constantes. Para sistemas no lineales o con coeficientes variables se debe usar la integración numérica para así evitar complejidades y dificultades analíticas. La exactitud de la integración numérica va a depender del método empleado y de la naturaleza del problema físico.

El método de los autovectores da las condiciones de estabilidad para un modo específico, mientras que la integración directa incluye todos los modos, siempre que el paso de integración sea lo suficientemente pequeño. Por lo general, para cañerías con una geometría sencilla, un modo domina el estado crítico. Debido a esto, la velocidad crítica y su correspondiente frecuencia dan valores muy cercanos con ambos métodos.

Una de las mayores ventajas de la integración directa es que con ella se puede obtener la historia completa de la respuesta de desplazamientos. También es posible observar en forma continua el cambio de respuesta durante el estado crítico. Otra ventaja es que se puede obtener la solución correcta sin previo conocimiento del modo de inestabilidad. Un tercer modo de inestabilidad como es la interface entre fluter y pando, es detectado con la integración directa.

Análisis de Autovalores

Las ecuaciones homogéneas del movimiento se pueden expresar como

$$M^* \ddot{D} + C^* \dot{D} + K^* D = 0. \quad (18)$$

Considerando un flujo interno de velocidad constante, la Ec.(18) se transforma en una ecuación matricial con coeficientes constantes. La solución de la Ec.(18) se puede escribir de la siguiente forma

$$d(t) = \bar{d} e^{\lambda t} \quad (19)$$

Sustituyendo la Ec.(19) y sus derivadas en el Ec.(18) da como resultado

$$[K^* + i\lambda C^* - \lambda^2 M^*] \bar{d} = \bar{0}. \quad (20)$$

Para que la solución no sea trivial, el determinante de los coeficientes debe ser cero. La resolución de este determinante no está estandarizado en los paquetes de software convencionales. Por lo tanto, la Ec.(18) se reformula como un sistema de primer orden de la siguiente manera

$$\dot{q} = A q, \quad (21)$$

donde

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad A = \begin{bmatrix} \Phi & I \\ -\frac{e}{m} \frac{d-1}{c} & \frac{1}{m} \frac{d-1}{c} \end{bmatrix}$$

Φ es la matriz nula e I la matriz identidad. El problema de autovalores asociado con la Ec.(21) se puede expresar como

$$\det [A - \lambda I] = 0 \quad (22)$$

Esta es una forma lineal de un problema de autovalores que puede ser resuelto por cualquier subrutina standard. El sistema de n grados de libertad tiene $2n$ valores complejos de λ .

Del análisis de los λ se determina la estabilidad del sistema. El sistema es estable cuando todas las componentes reales de los autovectores son negativas. Si al menos una componente real de un autovector es positiva, el sistema se vuelve inestable. Cuando esto sucede hay dos posibilidades para el autovector con componente real positiva que la componente imaginaria sea distinta a cero, para cuyo caso el modo de inestabilidad es flutter o que la componente imaginaria sea cero en cuyo caso el modo de inestabilidad es pandeo.

Analisis de Estabilidad por Interpretación de la Respuesta Transitoria

La respuesta transitoria fue hallada usando el método β de Newmark con $\beta=0.5$. Este método no introduce ningún tipo de distorsiones en la amplitudes. Otras herramientas numéricas como diferencias finitas centrales, o los métodos de Houbolt y Gurtin pueden introducir amortiguamiento numérico [18].

El sistema es estable cuando la respuesta transitoria oscila con amortiguamiento o con cero amortiguamiento

Fig.7c, 4b). El sistema es inestable por pandeo cuando diverge sin oscilaciones (Fig.4f); si diverge con oscilaciones el sistema es inestable por flutter (Fig.7g).

La condición de estabilidad de un sistema se obtiene monitoreando la envolvente de los picos del histograma de oscilaciones, para un punto en particular. La envolvente se interpola con una función exponencial simple que tiene la siguiente forma:

$$A_t = A_0 e^{-ct}, \quad (23)$$

donde c es el decremento logaritmico de la respuesta. La respuesta va a ser amortiguada si c es positivo. Si con el aumento de la velocidad del flujo, c cambia de signo esto indica inestabilidad por flutter. La constante c se evalúa para distintas velocidades de flujo. La velocidad critica se encuentra interpolando la velocidad del flujo correspondiente a $c=0$.

La inestabilidad por pandeo se identifica por la respuesta sin oscilaciones, pasado el estado critico es una vibración divergente con frecuencia cero. Desde el punto de vista numérico este estado se puede reconocer facilmente, ya que el periodo de vibración se vuelve muy largo o los desplazamientos son casi constantes con respecto al tiempo.

VERIFICACIONES NUMERICAS

Caños Ménsula

El programa de elementos finitos descripto se probò comparando sus resultados con los resultados experimentales obtenidos por Jendrzajczyk y Chen [17] en Argonne National Laboratory, U.S.A. Ellos experimentaron tubos rectos con diferentes condiciones de borde. Solamente, dos de todos los tubos ménsula ensayados experimentaron inestabilidad, los resultados de estos casos se muestran en la Tabla 1 como casos a y b.

En la Tabla 1 se comparan la velocidad critica del flujo y las frecuencias de oscilación que se obtienen de los experimentos, de otras teorías desarrolladas [7 y 12] y del algoritmo con elementos finitos expuestos en este trabajo. La concordancia entre las dos teorías y los resultados experimentales es muy buena.

TABLA 1									
C A S O	Velocidad Crítica [m/s]			Frecuencia Natural [Hz]			Frecuencia de Vel. Crítica [Hz]		
	Exp.	Teor.	E.F.	Exp.	Teor.	E.F.	Exp.	Teor.	E.F.
a	25.0	24.9	25.4	1.7	1.74	1.75	12.0	12.9	13.0
b	30.7	31.4	29.2	2.1	2.14	2.16	14.5	16.0	15.4

Tubo Ménsula con un Soporte Móvil Intermedio

Se estudió la estabilidad de un tubo de longitud L fijo en un extremo y con un soporte móvil a lo largo del mismo, ubicado a una distancia l del extremo fijo (Fig. 2) En la Fig. 3 se muestran las características de estabilidad, que dependen de la posición del soporte móvil. Para valores de l/L chicos el comportamiento del tubo es similar a la de un tubo empotrado en un extremo y libre en el otro, cuyo modo de inestabilidad es flutter. Para valores de l/L mayores, el modo predominante de inestabilidad es el pandeo, de igual forma que para un tubo empotrado en un extremo y articulado en el otro. Es de especial interés el valor de l/L para el cual el modo de inestabilidad cambia de pandeo a flutter.

Los resultados de los experimentos realizados por Jendrzejczyk y Chen se compararon con los resultados analíticos obtenidos con el método de elementos finitos. La concordancia es muy buena para valores bajos de l/L , para los cuales el tubo se vuelve inestable por flutter, ver Fig. 3. Sin embargo para valores de l/L más altos la concordancia no es tan buena, aunque las tendencias de las curvas son similares. La discrepancia entre los resultados puede estar dada por las dificultades en la colección de los datos de velocidad crítica por pandeo, y por las simplificaciones del modelo, como es la exclusión de las fuerzas gravitacionales y la presión interior.

Se presentan a continuación los resultados numéricos del tubo con soporte intermedio para tres casos extremos, a saber: $l/L = 0.0, 1.0$ y 0.357 . Los resultados de la integración numérica se comparan con los del análisis de autovectores.

La Fig. 4 muestra la historia de la respuesta de desplazamiento del punto medio del tubo, para el caso $l/L = 1.0$. En la secuencia la velocidad normalizada V/V_{cr} varia de 0.

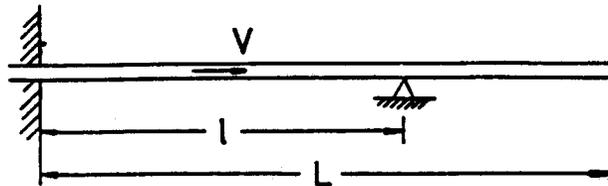


Fig.2 Cañería ménsula con un soporte móvil intermedio.

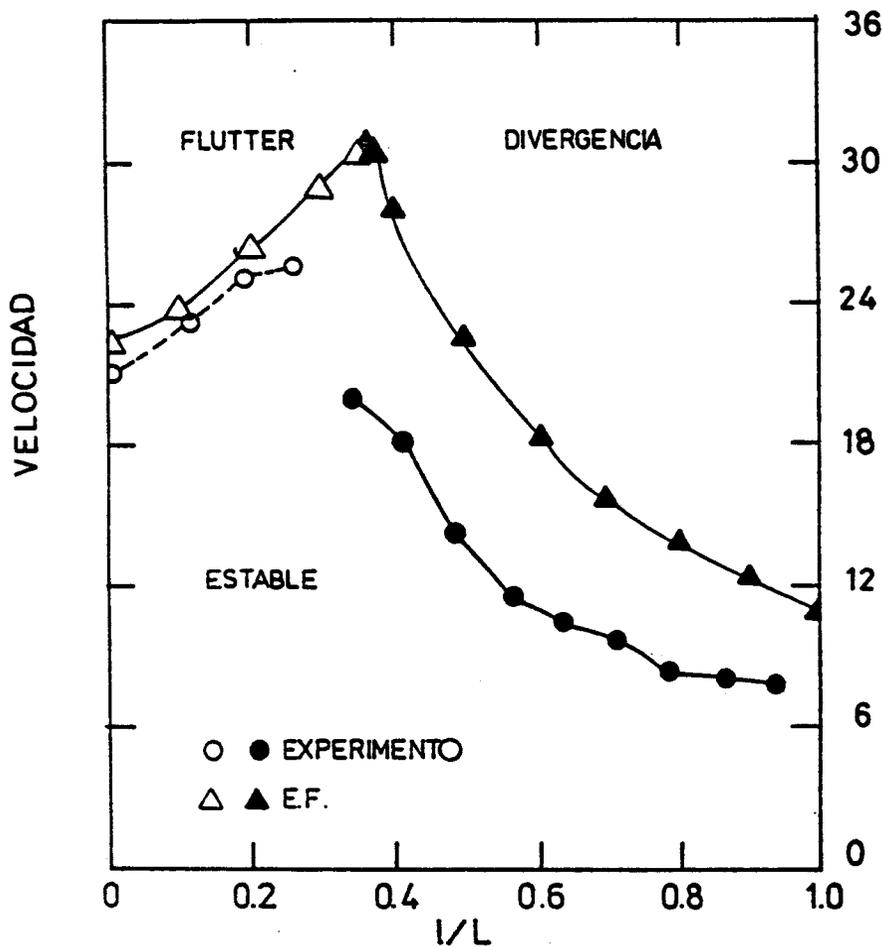


Fig.3 Velocidad crítica para un caño con soporte móvil.

0.5, 0.97, 0.995, 1.0 a 1.007. Ambos métodos dieron el mismo resultado para la primera velocidad crítica V_{cr} . La respuesta de desplazamientos se obtuvo por integración directa. Para perturbar el sistema se le impusieron los desplazamientos correspondientes a la deformada estática, con un desplazamiento de 10^{-4} m. para el punto medio del tubo. Una vez perturbado el sistema, se lo dejó vibrar libremente para determinar las características de estabilidad. Se asumió que la cañería no tiene amortiguamiento estructural, de esta manera cualquier acción de amortiguamiento o divergencia se deberá a la interacción fluido estructura. La integración numérica no introduce ningún efecto de amortiguamiento o distorsión en las amplitudes de vibración (Fig.4a, b, c).

La reducción de la frecuencia de vibración es muy evidente. A medida que la velocidad se acerca al punto crítico, la frecuencia se acerca a cero. Para velocidades un poco más altas que V_{cr} los desplazamientos divergen rápidamente (Fig.4f). Se ve claramente de la Fig.4, que tanto la velocidad crítica como el modo de inestabilidad pueden determinarse precisamente con la integración numérica.

La Fig.5 muestra el gráfico correspondiente de los autovalores. Sobre las abscisas se representan la parte real del autovalor y en las ordenadas la parte imaginaria. Los números en las líneas indican la velocidad normalizada V/V_{cr} . Las ramas coincidentes con los ejes coordenados se han dibujado paralelas a los mismos para mayor claridad. La mayoría de los autovalores aparecen en pares conjugados, pero acá solo se muestran los que están por encima del eje real. Los resultados obtenidos del diagrama Argand de la Fig.5 concuerdan muy bien con los obtenidos mediante la integración numérica, Fig.4.

De la Fig.5 se observa que el sistema se vuelve inestable por pandeo para un rango de velocidades bajas. Para el intervalo de 1.72 a 1.73 de la velocidad normalizada, el sistema se vuelve estable nuevamente. El mismo vuelve a ser inestable, pero ésta vez por flutter, para velocidades superiores a 1.73 V_{cr} . Este fenómeno se observa también con el método de integración directa, Fig.6a, y 6b. La concordancia entre ambos métodos es clara.

En las Fig.7 y 9 se muestran la respuesta de los desplazamientos del extremo libre del tubo y de los autovalores respectivamente, para el caso $l/L = 0.0$. Los gráficos describen la historia del comportamiento típico de un caño ménsula con inestabilidad por flutter. Nuevamente ambos métodos dan la misma velocidad crítica. Se muestra la respuesta de desplazamientos del extremo libre para los siguientes valores de V/v_{cr} : 0.0, 0.1, 0.33, 0.80, 0.998, 1.0 y 1.01.

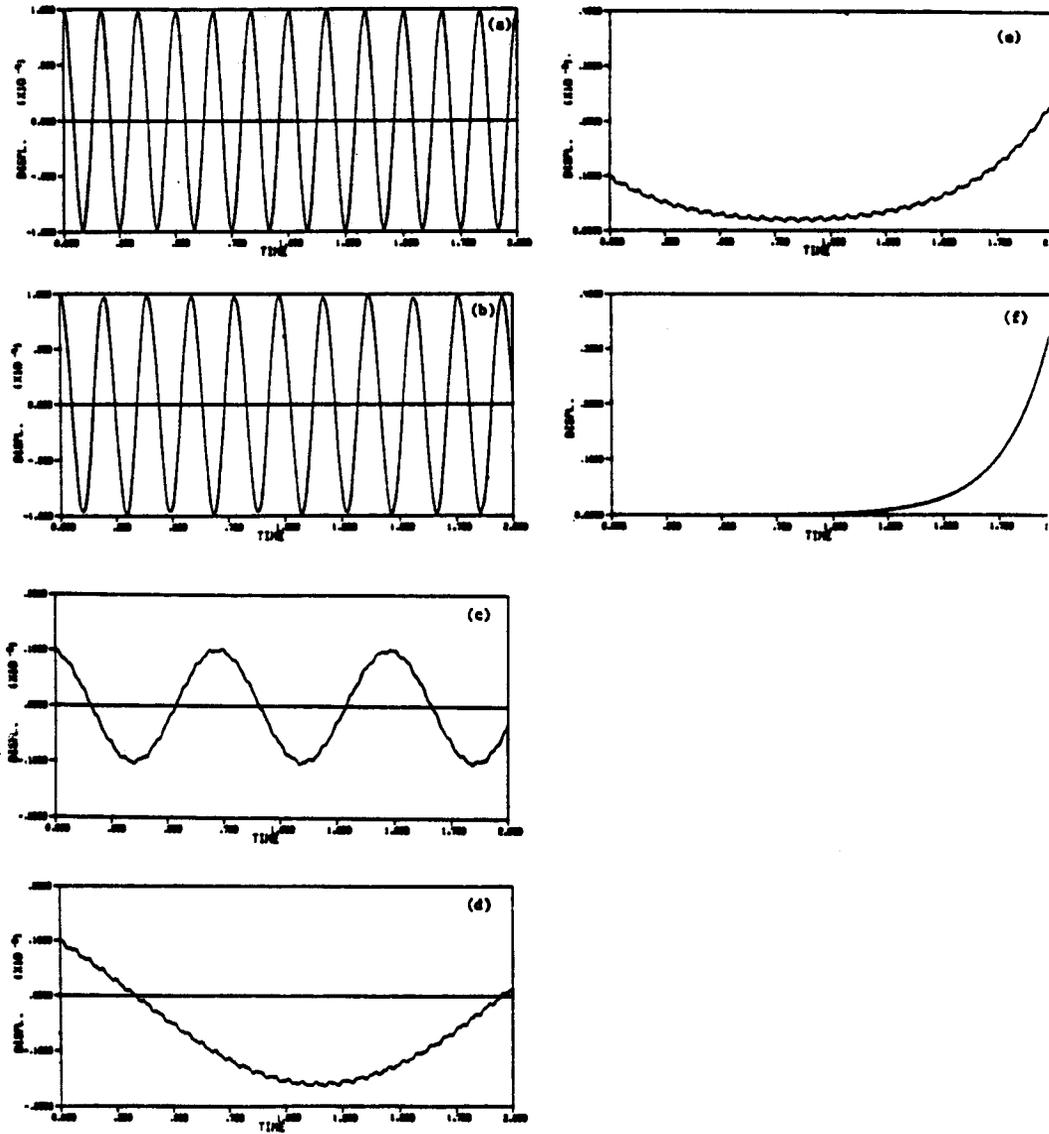


Fig.4 Respuesta de desplazamiento para el caso $l/L = 1.0$. Desplazamientos en metros, tiempo en segundos; 10 elementos intervalo de tiempo = 0.05 seg., $V_{cr} = 11.28$ m/seg.. Los valores de la velocidad normalizada son: (a) 0.0; (b) 0.50; (c) 0.97; (d) 0.005; (e) 1.0; (f) 1.007.

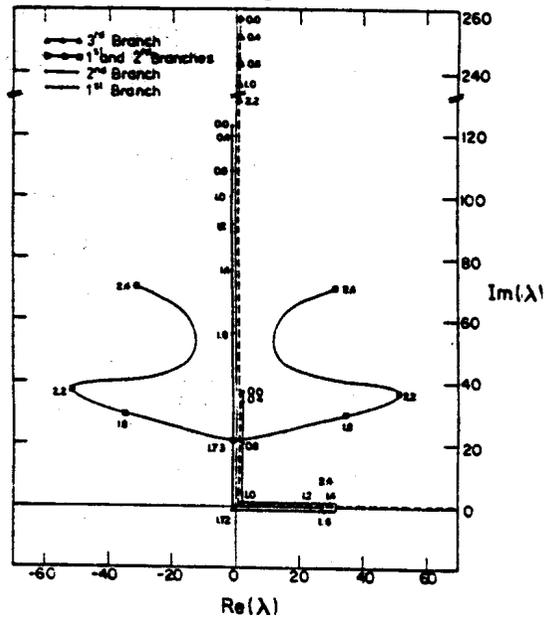


Fig.5 Diagrama de autovalores complejos para el caso $l/L = 1.0$, $V_{cr} = 11.28$ m/seg., 10 elementos.

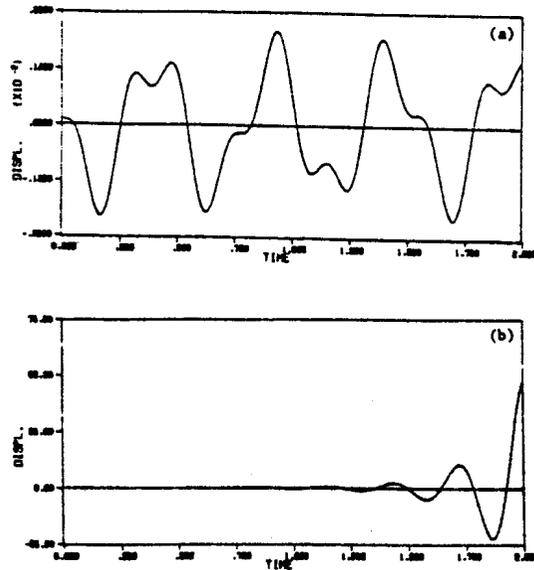


Fig.6 Respuesta de desplazamiento para el caso $l/L = 1.0$, los valores de la velocidad normalizada son (a) 1.72; (b) 1.73.

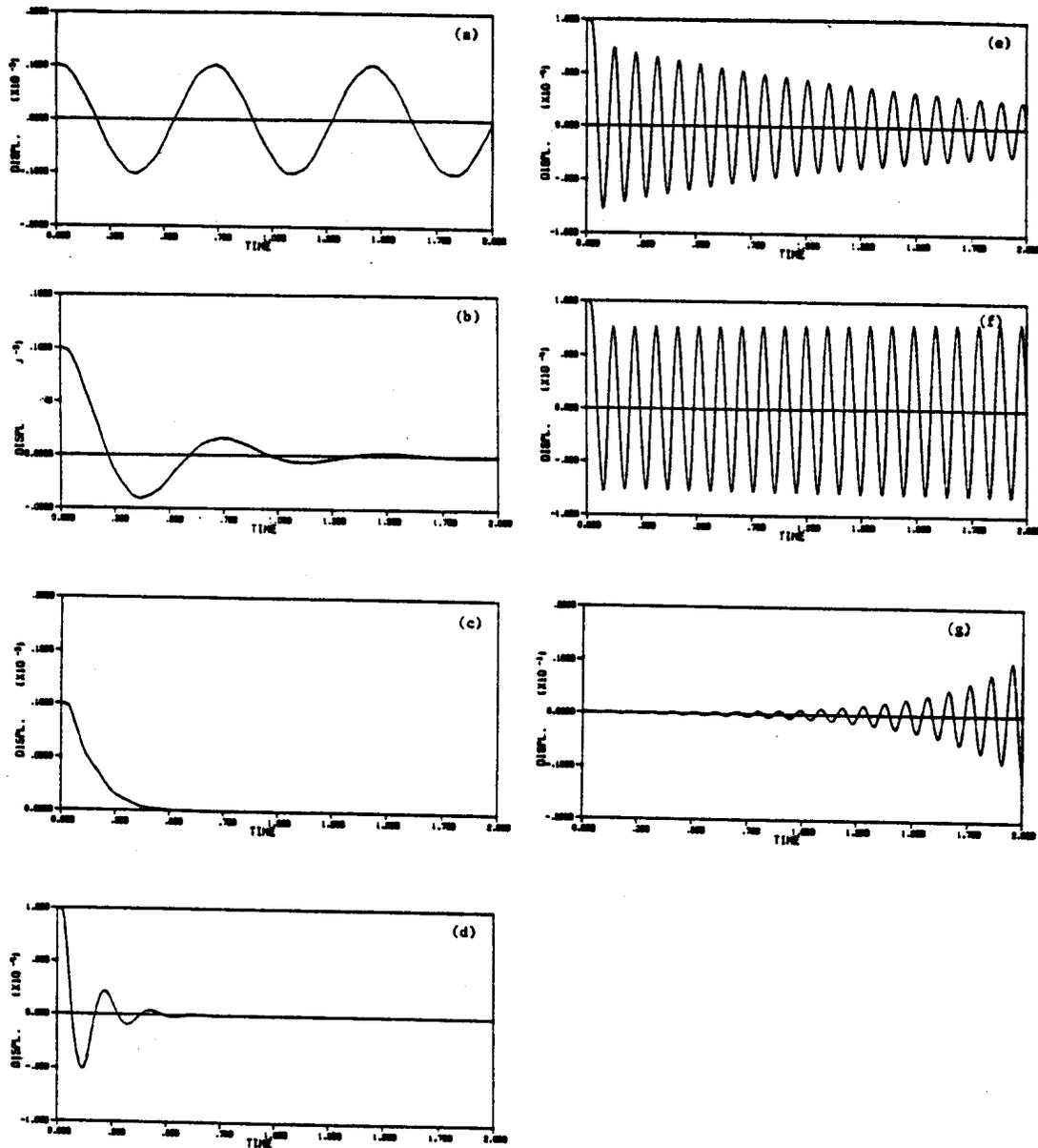


Fig.7 Respuesta de desplazamiento para el caso $l/L = 0.0$. Desplazamientos en metros, tiempo en segundos; 10 elementos intervalo de tiempo = 0.05 seg., $V_{cr} = 22.66$ m/seg.. Los valores de la velocidad normalizada son: (a) 0.0; (b) 0.1; (c) 0.33; (d) 0.8; (e) 0.998; (f) 1.0; (g) 1.01.

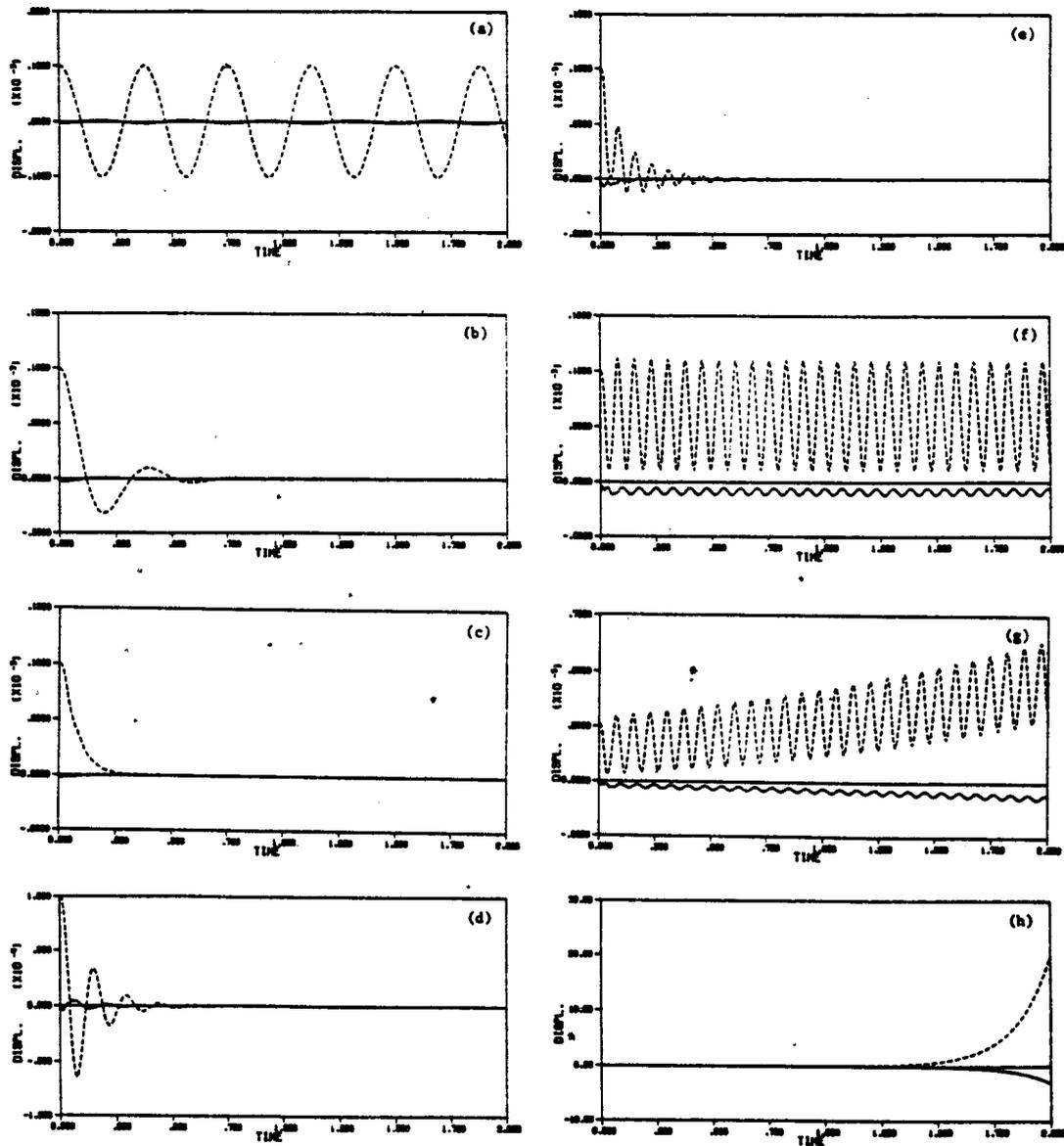


Fig.8 Respuesta de desplazamiento para el caso $l/L = 0.357$. Desplazamientos en metros, tiempo en segundos; 14 elementos intervalo de tiempo = 0.05 seg., $V_{cr} = 31.50$ m/seg.. Los valores de la velocidad normalizada son: (a) 0.0; (b) 0.1; (c) 0.4; (d) 0.8; (e) 0.98; (f) 1.0; (g) 1.002; (h) 1.01.

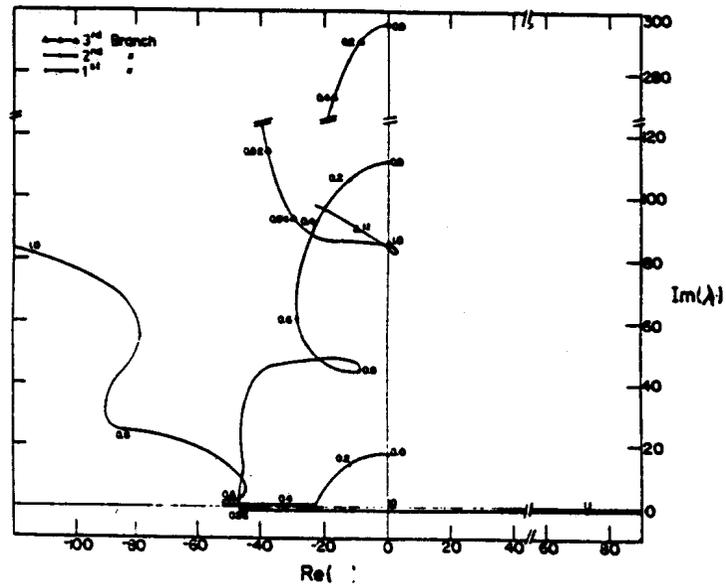


Fig.9 Diagrama de autovalores complejos para el caso $1/L = 0.0$, $V_{cr} = 22.66$ m/seg., 10 elementos.

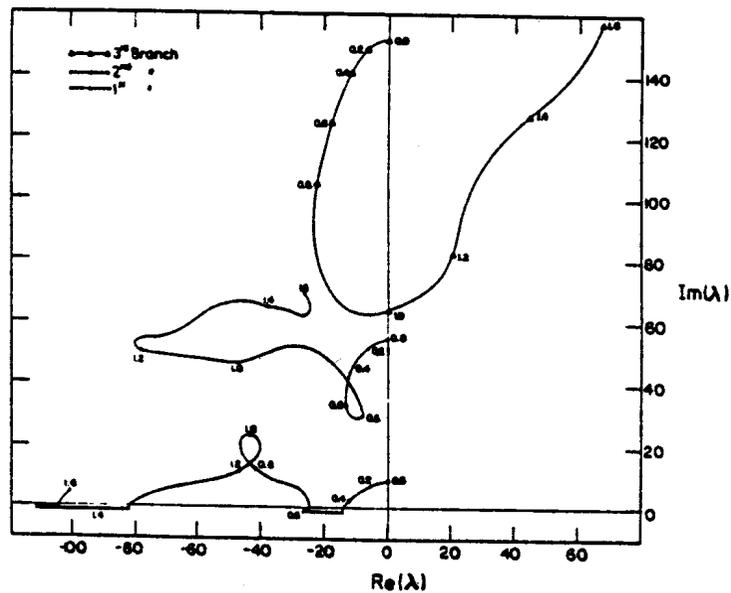


Fig.10 Diagrama de autovalores complejos para el caso $1/L = 0.357$, $V_{cr} = 31.50$ m/seg., 14 elementos.

La respuesta del caso $l/L = 0.357$ se puede ver en la Fig.8; las líneas punteadas representan el desplazamiento del extremo libre y las líneas llenas el desplazamiento del punto medio. Para éste caso particular la posición del soporte intermedio está asociado con el modo de inestabilidad transitorio entre pandeo y flutter. En este punto la velocidad crítica alcanza su máximo valor (Fig.3) con respecto a la posición del soporte móvil. Las velocidades del flujo son respectivamente: 0.0, 0.1, 0.4, 0.8, 0.98, 1.0, 1.002 y 1.01. Los gráficos muestran que las respuestas a bajas velocidades son similares a los de una cañería ménsula. A medida que la velocidad se aproxima al valor crítico, la respuesta se acerca a una vibración sin amortiguamiento, sin embargo el eje de simetría de las vibraciones ya no coincide con el eje de cero desplazamiento. Examinando el diagrama de Argand correspondiente, Fig.10, se observa que la segunda y tercera rama de frecuencias cruzan el eje imaginario simultáneamente a la misma velocidad crítica. En este punto la segunda rama muestra un desplazamiento divergente, como consecuencia de tener frecuencia cero. La tercera rama da una oscilación divergente. Los resultados numéricos de la Fig.8.f muestran el mismo periodo que el dado por la primera y tercera rama. Ambas ramas tienen el mismo periodo de vibración a la velocidad crítica. A medida que la velocidad sigue aumentando el sistema muestra una respuesta combinada de oscilaciones divergentes y pandeo (Fig.8g); sin embargo éste comportamiento combinado solo existe para un rango de velocidades muy pequeña. Para $V/V_{cr} = 1.01$ se observa que los desplazamientos responden a un modo de pandeo (Fig.8h). De los diagramas de Argand (Fig.10) se observa que la tercera rama a revertido rápidamente su dirección y a cruzado el eje imaginario nuevamente, de esta manera la estabilidad se debe a la segunda rama solamente, que es un modo de pandeo.

CONCLUSIONES

Las interacciones entre un sistema de cañería y su flujo se estudiaron usando una formulación con elementos finitos. El desarrollo resultó en una ecuación de movimiento con una matriz de rigidez asimétrica y con una matriz de amortiguamiento antisimétrica. Se adoptaron dos técnicas para encontrar las soluciones: el análisis de autovalores y la integración directa de la ecuación diferencial. Para verificar el algoritmo se estudiaron las condiciones de estabilidad de tubos rectos. Los resultados concuerdan en forma satisfactoria con los datos experimentales y con los resultados analíticos de otras teorías desarrolladas.

Aunque los resultados presentados son para tubos rectos el método también es válido para cañerías curvas. El objetivo del presente algoritmo es obtener la respuesta transitoria de un sistema de cañerías sometidas a fuerzas de excitaciones arbitrarias. La predicción del fenómeno de estabilidad apunta a demostrar la precisión del algoritmo numérico.

REFERENCIAS

- [1] H. Ashley y G. Haviland "Bending vibrations of a pipeline containing flowing fluid", J. Appl. Mech., Vol. 17, 1950, pag. 229
- [2] A.K. Bajaj y P.R. Sethna, - "Bifurcation in three-dimensional motions of articulated tubes, part I- Linear systems and symmetry", J. Appl. Mech., Vol. 48, 1982, pp. 606-611
- [3] A.K. Bajaj y P.R. Sethna, "Bifurcation in three-dimensional motions of articulated tubes, part II- Nonlinear analysis", J. Appl. Mech., Vol. 49, 1982, pp. 612-618
- [4] A.K. Bajaj y P.R. Sethna, "Flow induced bifurcations to three-dimensional oscillatory motions in continuous tubes", SIAM J. APPL. MATH., Vol.44, No. 2. April, 1984
- [5] T.B. Benjamin, "Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid-I. Theory", Proc. Royal Soc., No. 261 (Series A), 1961, pag. 457-487.
- [6] T.B. Benjamin, "Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid-II. Experiments ", Proc. Royal Soc., No. 261 (Series A), 1961, pag. 487-499.
- [7] S.S. Chen, Flow-induced instability of an elastic tube", ASME Paper No. 71, -Vib. -39, 1971.
- [8] W. Chiu, R. Smith y W.N. Wormley, "Influence of vehicle and distributed guideway parameters on high-speed, vehicle - guideway dynamic interaction", J. Dynam. Syst. Control, trns., ASME, Vol. 93, No 1, 1971, pag. 25
- [9] D. Escobar "Dynamic Stability and transient analysis of pipe structures conveying fluids using finite elements", Ph. D. Tesis, Purdue University, u.s.a., May 1987.
- [10] V.F. Feodos'yev, "Vibrations and stability of a pipe when a liquid flows through it", Izhenernyi Sbornik, Vol. 10, 1951, pag. 169.

- [11] G.E. Forsythe and W.R. Wason, Finite difference methods for partial differential equations, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1960
- [12] R.W. Gregory and M.P. Paidoussis, "Unstable oscillations of tubular cantilever conveying fluid-II. Experiments", Proc. Royal Soc. Vol. 293 (Series A) 1966, pag. 528-542.
- [13] R.W. Gregory and M.P. Paidoussis, "Unstable oscillations of tubular cantilever conveying fluid-I. Theory", Proc. Royal Soc., Vol. 293 (Series A), 1966, pag. 512-527.
- [14] G.H. Handelman, "A note on the transverse vibration of a tube containing flowing fluid", Quart. Appl. Math., Vol. XIII, No. 3, pag. 326-330, 1953.
- [15] M.J. Hannoyer and M.P. Paidoussis, "Dynamics of Slender Tapered beams with Internal and External Axial Flow. Part 1: Theory", J. Appl. Mech. Vol. 46, Mar. 1979, pag. 45-51
- [16] G.W. Housner, "Bending vibrations of a pipeline containing fluids", J. Appl. Mech., Vol 19, 1952, pag. 205.
- [17] J.A. Jendrzeczyk and S.S. Chen, "Experiments on tubes conveying fluid", ANL-83-18, Argonne National Laboratory, 1983.
- [18] Yi-Chen Liu, "Flow-induced vibration of curved pipe structures", Ph. D. Thesis, Purdue University, Dec., 1981.
- [19] R.H. Long, "Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid", J. Appl. Mechanics, March, 1955, pag. 65-66.
- [20] S.N. Naguleswaran and C.J. Williams, "Lateral vibration of a pipe conveying a fluid", J. Mech. Eng. Sci. Vol. 10, No 3, 1968, pag. 228-238.
- [21] N.M. Newmark, "A Method of Computation for Structural Dynamics", Journal of the Engineering Mechanic Division, Proceeding of ASCE, Vol. 85, No EM3, 1959, pag. 67-94.
- [22] F.I.N. Niordson, "Vibration of a cylindrical tube containing flowing fluid", Transaction of The Royal Institute of Technology Stockholm, Sweden, No 73, 1953

- [23] M.P. paidoussis, "Dynamics of tubular cantilever conveying fluid", J. Mech. Eng. Sci., Vol. 12, No 2, 1970, pag. 85-103.
- [24] M.P. Paidoussis, "Dynamic stability of pipes conveying fluid", J. Sound Vib., Vol. 33, No 3, 1974, pag. 267-264
- [25] M.M. Stanisic, J. A. Euler, and S.T. Montgomery, "On the theory of structures carrying moving masses", Ing. Arch., Vol. 43, No 5, 1974, pag. 295.
- [26] E.C. Ting, J. Genin, and J. H. Ginsberg, "A general algorithm for moving mass problems", J. Sound and Vibration, Vol. 33, No 1, 1974, pag. 49-58
- [27] E.C. Ting and A. Hosseinipour, "A numerical approach for flow-induced vibration for pipe structures", J. Sound Vibr., Vol. 88, No 3, 1983, pag. 289-298.
- [28] E.C. Ting and J.L. Kanning, "Dynamics fo Flow Conveying Pipe Strucrures", The Third National Congress on Pressure Vessel and Piping Technology, June 1979, The pressure Vesssssel and Piping Committee, Nuclear Engineering Division, ASME, Ed. S.S. Chen., pag. 57-63.