

**AISLACION DE VIBRACIONES USANDO EL METODO DE
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Adolfo R. Castro B.
Departamento de Construcción Civil.
Instituto Profesional de Valdivia.
Valdivia - Chile

RESUMEN

En este trabajo se presenta una aplicación del método de elementos de contorno formulado para elastodinámica en problemas de aislamiento de vibraciones del tipo estacionarias.

Se estudia la influencia de la atenuación del valor del desplazamiento vertical y horizontal para barreras pasivas usando discontinuidad del medio como una barrera natural.

Se utilizó un computador del tipo personal en el proceso computacional.

SUMMARY

An application of boundary element method is presented, problems in isolation of stationary vibrations by elastodynamics is formulated.

Attenuation of vertical and horizontal displacement is studied by the presence of barriers on the semi-infinite continuous medium.

A personal computer was employed in the computational process.

INTRODUCCION

Una de las formas de aislación de las vibraciones producidas por ciertas máquinas industriales consiste en colocar barreras de discontinuidad del medio, que interrumpen la propagación directa de la excitación. Esta discontinuidad comúnmente normal a la superficie del terreno puede ubicarse cercana a la fuente generadora de las vibraciones (aislación activa) o ubicarse cercana al lugar de recepción (aislación pasiva).

En el presente artículo se utiliza el método de los elementos de contorno para estudiar aislaciones del tipo pasivas, pues el método constituye la mejor técnica cuando se trabaja con dominios infinitos o semi-infinitos pues no es necesario utilizar fronteras artificiales alejadas para truncar el dominio, las cuales reflejarán las vibraciones alterando el análisis. La solución fundamental utilizada corresponde a la del dominio infinito, de modo que para modelar el espacio semi-infinito, se procede a truncar la malla.

Elementos constantes fueron usados para implementar numéricamente las ecuaciones integrales y se estudió la influencia de la separación de la barrera a la fuente emisora y de su profundidad en relación al desplazamiento vertical de puntos internos al otro lado de la barrera.

ECUACIONES

La ecuación del movimiento de Navier en términos de los desplazamientos en notación indicial es:

$$(\lambda + \mu) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} + \rho b_j = \rho \bar{u}_j \quad (1)$$

o también:

$$(C_1^2 - C_2^2) u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} + b_j = \bar{u}_j \quad (2)$$

donde C_1 y C_2 son las velocidades de las ondas P y S respectivamente.

$$C_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad C_2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

siendo λ y μ las constantes de Lamé.

En un caso estacionario la solución de (2) tiene la forma:

$$u_j = u_j e^{iwt} \quad j = 1,2 \quad (3)$$

representando U_j los componentes del vector desplazamiento y w la frecuencia excitadora.

Sustituyendo (3) en (2) se tendrá:

$$(C_1^2 - C_2^2) u_{i,ij} + C_2^2 u_{j,ii} + b_j e^{-iwt} = -w^2 u_j$$

Al considerar problemas en ausencia de fuerzas de volumen, la ecuación queda independiente del tiempo.

$$(c_1^2 - c_2^2) u_{i,ij} + c_2^2 u_{j,ii} = -w^2 u_j \quad (4)$$

ECUACION INTEGRAL

Si aplicamos el método de los residuos ponderados a la ecuación (4) tendremos:

$$\int_{\Omega} \left\{ (c_1^2 - c_2^2) u_{i,ij} + c_2^2 u_{j,ii} + w^2 u_j \right\} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_j - \bar{p}_j) u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u_j - \bar{u}_j) p_j^* d\Gamma \quad (5)$$

Siendo p la tensión normal en el contorno, cuya relación con las componentes de tensiones es:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j$$

donde n_j son los cosenos directores del vector normal a la superficie donde las tensiones son consideradas. p_j y \bar{u}_j son respectivamente la tensión normal prescrita en el contorno Γ_2 y \bar{u}_j es el desplazamiento prescrito en Γ_1 . Por su parte U_j^* es la función peso tomada de la solución fundamental del caso plano infinito dado por Cruse y Rizzo.

$$u_j^* = U_{ij}^* e_i^* \quad (6)$$

$$p_j^* = P_{ij}^* e_i^*$$

con

$$U_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \pi \mu} \cdot \left\{ \psi \delta_{ij} - \chi r_{,i} r_{,j} \right\}$$

$$P_{ij}^* = \frac{1}{\alpha \pi} \cdot \left[\left\{ \left(\frac{d\psi}{dr} \right) - \left(\frac{\chi}{r} \right) \right\} \left\{ \delta_{ij} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) + r_{,j} n_i \right\} - \left(\frac{2\chi}{r} \right) \left\{ n_j r_{,i} - 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} - 2 \left(\frac{d\chi}{dr} \right) r_{,i} r_{,j} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) + \left\{ \left(\frac{d\psi}{dr} \right) - \left(\frac{d\chi}{dr} \right) - \left(\frac{\alpha \chi}{2r} \right) \right\} r_{,j} n_i \right]$$

e_i = es un vector unitario en la dirección "i"

$$\psi = K_0 \left(\frac{wr}{c_2} \right) + \left(\frac{c_2}{wr} \right) \left\{ K_1 \left(\frac{wr}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} K_1 \left(\frac{wr}{c_1} \right) \right\}$$

$$\chi = K_2 \left(\frac{wr}{c_2} \right) - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 K_2 \left(\frac{wr}{c_1} \right)$$

válidas para el caso bidimensional y con $\alpha = 2$.

K_s son las funciones de Bessel modificadas de segundo clase y de orden s ; r representa la distancia entre el punto fuente y el punto campo.

Integrando por partes 2 veces respecto a coordenadas de campo se tiene:

$$\iint_{\Omega} \left[\left\{ c_1^2 - c_2^2 \right\} u_{i^*,ij} + c_2^2 u_{j^*,ii} + w^2 u_{j^*} \right] u_j d\Omega = - \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma \quad (7)$$

lo cual se reduce a:

$$\mu_j = - \int_{\Gamma} u_j p_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (8)$$

Utilizando (6) se puede escribir (8) como:

$$u_j = - \int_{\Gamma} u_j p_{ij}^* e_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* e_j^* d\Gamma$$

lo cual conduce finalmente a:

$$u_j = \int_{\Gamma} p_i u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_i p_{ij}^* d\Gamma \quad (9)$$

expresión que se relaciona al valor del desplazamiento u_j de un punto interno con los valores de desplazamientos y tensiones en el contorno.

Las tensiones en los puntos internos o del dominio son evaluadas al diferenciar en relación a coordenadas de los puntos fuente.

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma \quad (10)$$

con

$$D_{kij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right] \quad (11)$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right]$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

ECUACION INTEGRAL DE CONTORNO

La ecuación (9) permite calcular en puntos internos los valores del desplazamiento y tensiones en función de los del contorno. Sin embargo los valores de desplazamientos y tensiones del contorno no son generalmente conocidos de antemano. Cuando la ecuación (9) es aplicada a los propios puntos del contorno permite obtener entonces los valores de ellos. En este caso las integrales de contorno contienen funciones singulares y deben ser calculadas en el sentido del valor principal de Cauchy.

La ecuación (9) puede entonces ser "generalizada" como:

$$c_j u_j = \int_{\Gamma} p_i u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_i p_{ij}^* d\Gamma \quad (12)$$

donde $C_j = \begin{cases} 0 & \text{si el punto no pertenece al dominio} \\ \frac{1}{2} & \text{si el punto pertenece al contorno} \\ 1 & \text{si el punto está en el interior del dominio} \end{cases}$

U_{ij}^* y P_{ij}^* son las expresiones indicadas en (6).

IMPLEMENTACION NUMERICA

Si el contorno es discretizado en L elementos constantes, los cuales son representados por un solo nodo en cada elemento (figura 1), puede escribirse matricialmente la ecuación (12) como:

$$\underline{C}_i \underline{u}_i + \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} P_j^* N d\Gamma_j \right) \underline{u} = \sum_{j=1}^L \left(\int_{\Gamma_j} U_j^* N d\Gamma_j \right) \underline{p} \quad (13)$$

Siendo el elemento constante sólo existe asociado en consecuencia un solo nodo representativo por cada elemento y la aproximación para desplazamiento y tensión no varía dentro del dominio del elemento, obteniéndose una matriz de interpolación N con constantes unidad.

Las funciones en las integrales serán expresadas en términos de la coordenada adimensional l , por lo que:

$$d\Gamma = |J| dl \quad \text{donde } |J| \text{ es el Jacobiano de la transformación.}$$

La ecuación (13) discretizada quedará:

$$\underline{C}_i \underline{u}_i + \sum_{j=1}^L \underline{u}_j \int_{\Gamma_j} P_i^* d\Gamma_j - \sum_{j=1}^L \underline{p}_j \int_{\Gamma_j} U_i^* d\Gamma \quad (14)$$

$i = 1, \dots, L$

al aplicarse en los L nodos se obtendrá un sistema de ecuaciones que puede ser representado matricialmente como:

$$(\underline{C} + \underline{\hat{H}}) \underline{u} = \underline{G} \underline{p} \quad (15)$$

donde $\underline{\hat{H}}_{ij} = \int_{\Gamma_j} P_i^* d\Gamma_j$

$$\underline{G}_{ij} = \int_{\Gamma_j} U_i^* d\Gamma_j$$

son obtenidos numéricamente por cuadratura gaussiana y aquellos coeficientes que presentan singularidad son obtenidos analíticamente [].

Los vectores \underline{u} y \underline{p} contienen los valores de desplazamiento y fuerzas de superficie en todos los puntos nodales. La matriz \underline{C} puede ser incorporada a la matriz $\underline{\hat{H}}$ formando simplemente \underline{H} .

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{p} \quad (16)$$

Al ser incorporado en esta etapa las condiciones de borde prescritas en cada nodo, se puede reagruparlo convenientemente escribir la ecuación (15) de la forma:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{F} \quad (17)$$

donde A contiene los coeficientes que multiplican las incógnitas y F contendrá las constantes, y cuya solución numérica a través de eliminación gaussiana se obtienen los resultados numéricos de los desplazamientos y tensiones normales de superficie para cada nodo representativo por elemento.

Para hallar valores de tensiones y desplazamientos en puntos internos puede emplearse la ecuación (9) una vez conocidos los valores u y p en el contorno del proceso anterior.

APLICACION NUMERICA

En el ejemplo se modeló la superficie y la barrera con 25 elementos constantes. Se colocaron 4 puntos internos al otro lado de la barrera para evaluar desplazamientos verticales a diferentes profundidades. Mayor cantidad de elementos no fue posible utilizar debido a limitaciones propias de la capacidad de memoria del computador personal.

Las características elásticas del medio están representadas por un módulo de cizalle de $92,5 \text{ kg/cm}^2$, coeficiente de Poisson igual a $0,347$ y densidad del medio de 1275 kg/m^3 . La perturbación es una tensión normal unitaria con una frecuencia de $31,4$ radianes por segundo. Los elementos tienen una longitud de 70 cm .

Se graficó el desplazamiento vertical de la frontera sin inclusión de barrera (figura 3). Para diferentes posiciones D de la barrera en relación a la fuente generadora (figura 4) se muestra la variación del desplazamiento vertical en un punto interno a una profundidad de 200 cm y para diferentes profundidades H (figura 5) manteniendo constante la separación D .

CONCLUSIONES

El análisis numérico muestra una reducción del orden del 70% del valor de la amplitud del desplazamiento vertical del caso sin inclusión y con poca sensibilidad en relación a la separación D de la barrera a la fuente emisora de vibraciones dentro del rango analizado. Sin embargo, la profundidad H de la barrera tiene variaciones en la reducción de la amplitud del desplazamiento vertical del orden del 40% entre una profundidad de 200 cm a 500 cm para una separación D fija de 910 cm .

Respecto a la técnica propiamente tal, el método de elementos de contornos muestra ser la técnica adecuada en problemas de propagación de ondas y/o vibraciones especialmente, pues una de las características propias del método es la de modelar medios infinitos o semi-infinitos sin incorporación de elementos artificiales para reducir o limitar el dominio hasta una frontera adecuada para no invalidar el análisis. Situación que es diferente a la técnica de trincar el dominio como se ha empleado; en tal caso la precisión y comportamiento de las soluciones pueden ser manejados con mayor facilidad.

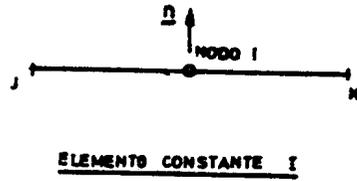


Figura 1

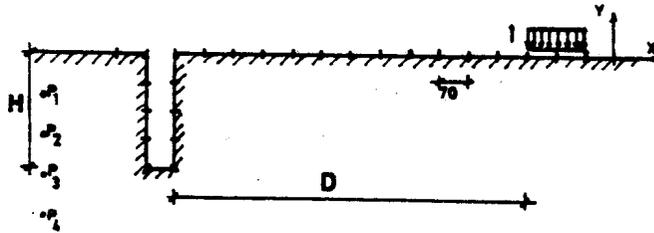


Figura 2

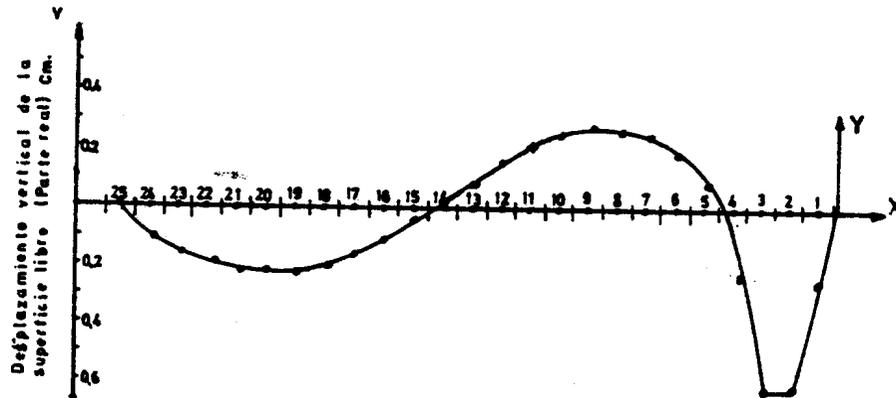


Figura 3

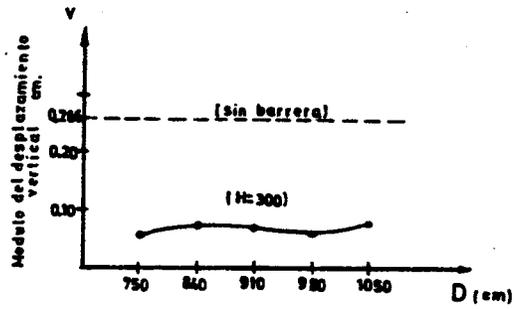


Figura 4

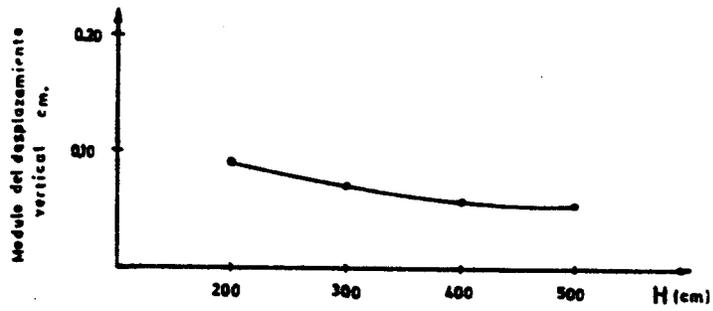


Figura 5

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.A. BREBBIA, "The Boundary Element Methods for Engineers". Pentech Press, London (1978).
- [2] ERINGEN, A.C., SUHUBI, E.S. "Elastodynamics: Volume II". Academic Press, New York, San Francisco and London (1975).
- [3] CHUANG, P.H. "Application of Boundary Element Methods in Elastodynamics". M.Sc. dissertation, University of Southampton (1981).
- [4] RICHART, F.E., Jr., J.R. HALL, Jr. "Vibrations of soils and foundations". Prentice Hall, London, Tokyo, New Jersey (1970).
- [5] SHAW, R.P. "Boundary Integral Equation Methods Applied to Wave Problems". Chapter 6, Developments in Boundary Elements Methods. Edit. Banerjee P.K. and Butterfield R. Applied Science Pub.
- [6] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. "Boundary Element Techniques". Springer Verlag; Berlin, New York, Tokyo (1984).