

UN MODELO DE DAÑO PLASTICO CON DEGRADACION PARA EL ANALISIS NO LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON

S. Oller, J. Oliver†, J. Lubliner* y E. Oñate†*

* Universidad Nacional de Salta
Facultad de Ciencias Tecnológicas
Buenos Aires 177 - (4400) Salta - Argentina.
En la actualidad investigador en †

† Universitat Politècnica de Catalunya
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Jordi Girona Salgado, 31 - 08034 Barcelona, España

* University of California
Department of Civil Engineering
Berkeley, California 94720, USA

RESUMEN

En este artículo, se presenta un "modelo constitutivo de daño plástico" para materiales friccionales, (cuyos fundamentos básicos se tratan en las refs.: 12,15,22,23), que permite simular el comportamiento multiaxial del hormigón considerando el fenómeno de degradación de rigidez producido durante procesos de carga cuasi-estáticos elásticos y plásticos. Asimismo, se presenta un ejemplo de aplicación, que permite comprobar la fiabilidad y rango de aplicación del modelo para simular el comportamiento del hormigón.

SUMMARY

In this paper a "plastic-damage" constitutive model for frictional material (whose basic features are given in refs. 12,15,22,23), which permits the simulation of the multiaxial behaviour of concrete taking into account the stiffness degradation phenomenon produced during elastic and plastic quasi-static load processes, is presented. Likewise, an example of application which allows for the verification of the reliability of the model in the simulation of the concrete behaviour, is presented too.

1 . INTRODUCCION.

Es bien conocido que el fenómeno de *fisuración* en hormigón tiene lugar a bajos niveles de tensión, debido a la *pérdida de cohesión entre partículas* ^{4,7} que ha sufrido el hormigón por efecto de la *microfisuración previa*.

Experimentos llevados a cabo con probetas de mortero de cemento muestran que las microfisuras siguen caminos aleatorios, con orientaciones arbitrarias ¹⁵. Este hecho, está apoyado por numerosas investigaciones que coinciden en que la microfisuración, a nivel microscópico, puede considerarse un fenómeno adireccional, y que la propagación de ésta sigue un camino errático que depende de la distribución de las partículas (áridos) inmersa en la matriz de cemento. Sin embargo, a nivel macroscópico, se puede observar una dirección dominante que viene marcada por *el lugar geométrico que describen los puntos isotrópicamente dañados*. Este fenómeno de microfisuración, es el principal responsable del *comportamiento inelástico* del hormigón ^{4,15}.

Si se admite como hipótesis que la *microfisuración se produce por el deslizamiento entre las partículas de un material friccional*, a costa de una pérdida de cohesión entre ellas (fenómeno isotropo), es posible relacionar el comportamiento de éste material con un fenómeno *elasto-plástico* ^{4,15}. En este caso, se puede considerar la energía disipada como una medida del daño en el punto *-daño plástico-*.

El uso de una formulación *plástica-degradable localmente isotropa*, combinada con el concepto de *localización del daño*, da lugar a un comportamiento *globalmente anisótropo*. En este sentido, el modelo de daño plástico considera la *direccionalidad del daño macroscópico*, a través del lugar geométrico de los puntos que se encuentran isotrópicamente dañados, no siendo necesario conocer durante el proceso de cálculo la dirección del *daño local* (daño en cada punto). Debido a esto, el modelo evita trabajar con formulaciones ortótropas.

El modelo contempla gran parte de los aspectos más importantes que caracterizan el comportamiento inelástico del hormigón, tales como: el acoplamiento de fenómenos de *fisuración* con *aplastamiento y degradación de rigidez*, a través del tratamiento unificado que ofrece la *teoría de la plasticidad* combinada con el concepto de degradación de rigidez que se considera en este artículo; la *respuesta diferenciada para cada proceso de tensión-deformación multiaxial* gracias a la definición de las variables internas de daño plástico κ^p y cohesión c ; y el *control de la dilatación* mediante una superficie de potencial plástico adecuada. Por otro lado, el modelo presenta objetividad en la respuesta respecto del tamaño de la zona de localización del daño plástico (ver refs. ^{15,23}).

El modelo incluye en su formulación básica, una modificación sobre la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb que permite una correcta relación entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción para los valores experimentales del rozamiento interno, una nueva superficie de fluencia que presenta una solución integral para el tratamiento del hormigón; y un grupo de variables internas con sus respectivas reglas de evolución. Todo esto ofrece una formulación que permite una correcta simulación del comportamiento multiaxial del hormigón.

Durante la investigación desarrollada, se ha observado la necesidad de introducir el concepto de *degradación de rigidez*, dentro de la formulación básica del *modelo de daño plástico* ^{15,22}, con el objeto de reproducir con mejor aproximación el comportamiento inelástico del hormigón. Así, en este artículo se presenta una generalización del modelo de daño plástico que permite considerar los fenómenos de degradación de rigidez que ocurren durante el proceso elástico e inelástico. Se presentan dos formas simples de tratar la degradación elástica y plástica respectivamente.

2 . RESUMEN DE LOS ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL MODELO DE DAÑO PLÁSTICO SIN DEGRADACION DE RIGIDEZ. ^{12,15,22}

El modelo de daño plástico surge a partir de una formulación elasto-plástica general definida en el espacio de tensiones, que puede sintetizarse a partir de las siguientes características (ver Anexo):

- Considera como *superficie de fluencia* una función escalar homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensiones:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\sigma, c) = f(\sigma) - c = 0 \quad (1)$$

y como *superficie de potencial plástico*, otra función del tipo de la de fluencia: $\mathcal{G}(\sigma, c) = 0$.

- Define como *variable libre* la tensión σ y por transformación directa, a través del tensor de rigidez D_S , la deformación elástica ϵ^e :

$$\epsilon^e = D_S^{-1} \cdot \sigma, \quad (2)$$

y considera como hipótesis el concepto de aditividad de deformaciones:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (3)$$

- Define como *variables internas* del proceso elasto-plástico, las siguientes:

$$q = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon^p \\ \dots \\ q_\alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon^p \\ \kappa^p \\ c \end{array} \right\} \quad (4)$$

donde ϵ^p es la deformación plástica; q_α un vector que incluye otras dos variables internas plásticas: la variable de daño plástico κ^p (que toma valor cero cuando no hay daño plástico y uno cuando se alcanza el daño total en un punto), y la cohesión c que tiende a cero cuando la variable de daño plástico tiende a uno. La evolución de estas variables internas viene dada por la siguiente regla general:

$$\dot{q} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}^p \\ \dot{\kappa}^p \\ \dot{c} \end{array} \right\} \equiv \dot{\lambda} H = \dot{\lambda} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \\ h_\alpha \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \\ h_c \cdot h_\alpha \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \end{array} \right\} \quad (5)$$

donde $\dot{\lambda}$ es el *factor de consistencia plástico* ¹⁵, y H es una función vectorial que incluye la *función de estado de flujo plástico* ($\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma}$), *función de estado de daño plástico* (h_α), y la *función de estado de cohesión* (h_c) (ver refs.: ^{15,22}).

- Considera como *funciones explícitas*:

- - La *cohesión* a compresión: $c_C(\kappa^p)$ y a tracción: $c_T(\kappa^p)$, cuyas expresiones vienen dadas por las curvas de resistencia uniaxial a compresión: $\sigma_C(\kappa^p)$ y a tracción: $\sigma_T(\kappa^p)$, respectivamente, a través de un factor de escala N que depende de la función de fluencia que se utilice ^{15,22}.

Esto es:

$$c_C(\kappa^p) = \frac{1}{N} \sigma_C(\kappa^p) \quad ; \quad c_T(\kappa^p) = \frac{1}{N} R^0 \sigma_T(\kappa^p) \quad (6)$$

d onde R^0 es la relación inicial entre las resistencias uniaxiales a compresión y tracción.

- El ángulo de rozamiento interno, cuya expresión es del tipo ^{15,22} :

$$\phi = \phi(\kappa^p) \quad (7)$$

- El ángulo de dilatación, cuya expresión es del tipo ^{15,22} :

$$\psi = \psi(\kappa^p) \quad (8)$$

• Finalmente, de la condición de consistencia plástica de Prager, de la función de fluencia y de las ecuaciones de evolución de las variables internas, resulta la relación constitutiva incremental tangente, para los problemas sin degradación de rigidez:

$$\dot{\sigma} = D^{ep} \cdot \dot{\epsilon} \quad (9)$$

siendo D^{ep} el tensor de rigidez tangente elasto-plástico, que viene expresado por ¹⁵:

$$D_T^{ep} = D_S - \frac{\left[D_S \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right] \otimes \left[D_S \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \right]}{\underbrace{\left[h_c \left(h_n \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \cdot D_S \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right]} \quad (10)$$

donde D_S es el tensor de rigidez elástico ¹⁵. De la ec.(10) se deduce que el tensor D^{ep} es simétrico, sólo para problemas de plasticidad asociada: ($G \equiv F$).

3 . GENERALIZACION DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO PARA PROCESOS CON DEGRADACION DE RIGIDEZ.- INTRODUCCION DE LAS VARIABLES INTERNAS DE DEGRADACION ELASTICA Y PLASTICA.

Los resultados experimentales muestran que mientras el sólido se encuentra en periodo elástico, a medida que crece la deformación, se produce un cambio en la rigidez secante que se denomina degradación elástica de la rigidez. Este fenómeno se manifiesta también durante los procesos plásticos, aunque en esta situación la degradación plástica viene acompañada de cambios en la cohesión, rozamiento interno y dilatación fig.(1).

Físicamente la degradación de la rigidez se inicia con el crecimiento y posterior conexión entre micro-fisuras ^{17,18} o entre micro-poros existentes en la masa del hormigón. Dentro del contexto de la mecánica de los medios continuos, se puede considerar este fenómeno mediante una actualización del tensor de rigidez secante D_S , en función de la evolución de dos variables internas (escalares o vectoriales): 1) La variable de degradación elástica \mathcal{E} , y 2) La variable de degradación plástica \mathcal{P} . Estas variables tienen una forma similar a la descrita por Simo and Ju ^{17,18} y por otros investigadores ^{8,10}, pero a diferencia de éstas, en el caso que se presenta no es necesario definir una función de degradación de rigidez para formular su regla de evolución.

Se propone una regla de evolución de la variable de degradación elástica en función del incremento de deformación total, a través de la siguiente expresión:

$$\dot{\mathcal{E}} = \Phi_1 (h_1 \cdot \dot{\epsilon}) \quad (11)$$

donde h_i es un vector definido en el espacio de tensiones, Φ_i es una función de estado escalar, y (\cdot) la función rampa ^{15,22}.

La variable de degradación plástica está asociada a la deformación plástica, y tiene una regla de evolución general de la siguiente forma:

$$\dot{\alpha}_j^p = \dot{\lambda} H_j = \dot{\lambda} \left[\ell_j \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right] = \ell_j \cdot \dot{\mathcal{E}}^p \quad (12)$$

donde $\dot{\lambda}$ es el parámetro de consistencia plástica que interviene en la regla de flujo ^{15,22} y ℓ_j , es un vector definido en el espacio de tensiones que indica la dirección de degradación plástica. Este vector, al igual que h_i , puede obtenerse a través del gradiente de una función (superficie de degradación), definida en el espacio de tensiones principales. Este tipo de superficies de degradación, fueron introducidas inicialmente en el espacio de deformaciones principales por Dougill ^{8,9} y posteriormente fueron utilizadas en el espacio de tensiones principales, o en ambos espacios a la vez, por distintos investigadores (Bařant and Kim ^{2,19}, Han and Chen ⁹, Simo and Ju ^{17,18}, Klisinski and Mros ¹⁰). En el modelo que se presenta, estas superficies quedan implícitamente definidas, adoptando formas muy particulares, que serán tratadas en los siguientes apartados.

4. ECUACION CONSTITUTIVA Y RIGIDEZ TANGENTE PARA PROCESOS CON DEGRADACION.

El fenómeno de degradación de rigides modifica la ecuación constitutiva elasto-plástica tangente para procesos plásticos con pequeñas deformaciones *sc.(9)*. Esta debe ser formulada nuevamente, y para ello se partirá definiendo una energía potencial libre (a una temperatura dada) compuesta de una parte elástica y otra plástica ¹³, de la forma:

$$\Psi(\epsilon^e, q_\alpha, q_\beta) = \Psi^e(\epsilon^e, q_\beta) + \Psi^p(q_\alpha) \quad (13)$$

Donde, $\Psi^p(q_\alpha)$ es una función de potencial plástico y $\Psi^e(\epsilon^e, q_\beta)$ una función de energía elástica; siendo: $\epsilon^e = D_S^{-1} \cdot \sigma$ la variable libre del proceso, que representa la deformación elástica en un cierto instante t del proceso cuasi-estático; q_α las variables internas plásticas *sc.(4)*, como el daño plástico κ^p y la cohesión c , que tienen una regla de evolución del tipo $\dot{q}_\alpha = \dot{\lambda} H_\alpha(\sigma, q)$; y q_β otras variables internas, como la degradación elástica α^e y la degradación plástica α^p . Así, el modelo en su forma más general considera las siguientes variables internas:

$$q = \left\{ \begin{array}{c} \alpha^p \\ \text{---} \\ q_\alpha \\ \text{---} \\ q_\beta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha^p \\ \kappa^p \\ c \\ \text{---} \\ \alpha^e \\ \alpha^p \end{array} \right\} \quad (14)$$

A partir de los principios de la mecánica clásica, se puede escribir la disipación total de energía Ξ mediante la siguiente expresión simplificada de la desigualdad de Clausius-Duhem ¹³ (disipación reducida):

$$\Xi = \sigma \cdot \dot{\epsilon} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (15)$$

Esta desigualdad expresa el balance de entropía para un continuo de Cauchy, y es válida para cualquier proceso de carga admisible. Calculando la derivada temporal de la energía libre ec.(13), se tiene:

$$\dot{\Psi} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\} \cdot \dot{\epsilon}^e + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_\alpha} \right\} \cdot \dot{\epsilon}_\alpha + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_\beta} \right\} \cdot \dot{\epsilon}_\beta$$

sustituyendo en esta última la ec.(3), y la que resulta, en la ec.(15), se tiene la siguiente expresión para la disipación:

$$\Xi = \left[\sigma - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\} \right] \cdot \dot{\epsilon}^e + \sigma \cdot \dot{\epsilon}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_\alpha} \right\} \cdot \dot{\epsilon}_\alpha - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_\beta} \right\} \cdot \dot{\epsilon}_\beta \geq 0 \quad (16)$$

Por ser ϵ^e una variable libre cuya velocidad de variación $\dot{\epsilon}^e$ puede ser tan grande como se quiera, para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Clausius-Duhem ec.(16), debe ocurrir necesariamente que:

$$\left[\sigma - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\} \right] = 0 \quad (17)$$

de donde se obtiene la tensión, como:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \quad (18)$$

En particular, para un sólido elasto-plástico que exhibe un comportamiento elástico lineal con degradación de rigidez, la energía libre ec.(13) puede ser escrita como:

$$\Psi(\epsilon^e, \epsilon_\alpha, \epsilon_\beta) = \frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon - \epsilon^p)}_{\epsilon^e} \cdot D_S(\epsilon^e, \epsilon^p) \cdot \underbrace{(\epsilon - \epsilon^p)}_{\epsilon^e} + \Psi^p(\epsilon_\alpha) \quad (19)$$

donde $D_S(\epsilon^e, \epsilon^p)$ es el tensor de rigidez secante, que depende de las variables de degradación elástica y plástica.

Sustituyendo la ec.(19) en la ec.(18), queda expresada la ecuación constitutiva para un sólido elasto-plástico, a partir de la rigidez secante:

$$\sigma = D_S(\epsilon^e, \epsilon^p) \cdot (\epsilon - \epsilon^p) \quad (20)$$

resultando de aquí una ley constitutiva incremental, tangente, para un proceso de carga elasto-plástico degradable:

$$\dot{\sigma} = \left[\frac{\partial D_S}{\partial \epsilon^e} \dot{\epsilon}^e + \frac{\partial D_S}{\partial \epsilon^p} \dot{\epsilon}^p \right] \cdot (\epsilon - \epsilon^p) + D_S \cdot (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (21)$$

reagrupando los sumandos, se puede escribir la relación incremental tangente ec.(21) en la siguiente forma:

$$\dot{\sigma} = C_T^e(d^e, d^p) \cdot \dot{\epsilon} - C_T^p(d^e, d^p) \cdot \dot{\epsilon}^p = \dot{\sigma}^e - \dot{\sigma}^p \quad (22)$$

siendo:

$$\dot{\sigma}^e = C_T^e \cdot \dot{\epsilon} = D_S \cdot \dot{\epsilon} + \left[\sum_i \frac{\partial D_S}{\partial d_i^e} d_i^e \right] \cdot D_S^{-1} \cdot \sigma \quad (23)$$

$$\dot{\sigma}^p = C_T^p \cdot \dot{\epsilon}^p = D_S \cdot \dot{\epsilon}^p - \left[\sum_j \frac{\partial D_S}{\partial d_j^p} d_j^p \right] \cdot D_S^{-1} \cdot \sigma \quad (24)$$

donde $\dot{\sigma}^e$ y $\dot{\sigma}^p$ son los incrementos de tensión elástica y plástica del sólido degradado, respectivamente. Conviene observar, que para un proceso de carga sin degradación elástica ni plástica, los tensores de rigidez degradados, se reducen a: $C_T^e \equiv C_T^p \equiv D_S = \text{cte.}$

Al igual que en plasticidad clásica, para formular la ecuación constitutiva elasto-plástica tangente para procesos con degradación de rigidez, es necesario partir de la condición de consistencia plástica de Prager¹⁵; de donde resulta la siguiente ley constitutiva incremental tangente:

$$\dot{\sigma} = C_T^{ep}(d^e, d^p) \cdot \dot{\epsilon} \quad (25)$$

siendo C_T^{ep} el tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material, que contempla los fenómenos de degradación elástica y plástica a la vez.

$$C_T^{ep} = C_T^e - \frac{\left[C_T^e \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right] \otimes \left[C_T^p \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \right]}{\underbrace{\left[h_c \left(h_n \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \cdot C_T^p \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right]} \quad (26)$$

La rigidez tangente ec.(26) será simétrica, si C_T^e es simétrica y si $C_T^p \cdot \{ \partial G / \partial \sigma \}$ es proporcional a $C_T^e \cdot \{ \partial F / \partial \sigma \}$. Se puede demostrar que esta proporcionalidad es una forma más general de definir la regla de flujo asociada para procesos con degradación elástica y plástica^{12,13,15}.

En los siguientes apartados, se presenta una forma de definir los tensores de rigidez degradados C_T^e y C_T^p , para el caso particular de degradación isótropa.

5. DEGRADACION ELASTICA SIMPLE.

La hipótesis más simple para considerar la degradación de rigidez que ocurre durante un proceso de carga elástico, ha sido introducida por Kachanov¹⁷ en la forma:

$$D_S(d^e) = (1 - d^e) D^0 \quad (27)$$

donde D^0 es el tensor de rigidez inicial, $D_S(d^e)$ es el tensor de rigidez secante que depende de una variable escalar de degradación elástica d^e (degradación isótropa), que vale cero para un material en su estado inicial no degradado, y uno para un material totalmente degradado. Dicha variable

puede interpretarse como la relación que hay entre la superficie degradada y la superficie total de una determinada zona del sólido ¹⁸.

Distintos investigadores ^{1,3,4,5,6,7,11,20}, sostienen que durante un proceso de carga uniaxial, de compresión o tracción, existe un comportamiento inicial elástico-degradable con módulo de Poisson constante hasta alcanzar el 75-80% de la tensión pico, coincidiendo este límite con la superficie de discontinuidad inicial ($\sigma_C^e \approx 0.75 \sigma_C^{pic}$ para compresión uniaxial, y $\sigma_T^e \approx 0.75 \sigma_T^{pic}$ para tracción uniaxial ¹⁸). La ec.(27) permite cumplir con este requisito hipotético. Asimismo, se admite que a partir de este límite se produce un incremento del módulo de Poisson, acompañado de un proceso de microfisuración que colabora en producir mayor degradación. La ec.(28), proporciona una relación tensión-deformación que permite modelar este tipo de comportamiento.

Para estudiar el caso particular de degradación elástica de Kachanov, es necesario sustituir el tensor de rigidez secante ec.(27) en la ec.(23) que da el incremento de tensión elástico degradado y en la que resulte de éstas, sustituir la regla de evolución de la variable de degradación elástica ec.(11), obteniéndose:

$$\dot{d}^e = C_T^e \cdot \dot{\epsilon} = D_S(d^e) \cdot \dot{\epsilon} - \frac{\Phi}{(1-d^e)} (h \cdot \dot{\epsilon}) \sigma \quad (28)$$

donde C_T^e es simétrica, sí y sólo sí h es proporcional o igual a σ , en cuyo caso, la degradación de rigidez en un proceso elástico estará asociada al incremento total de trabajo de deformación.

Si se considera que Φ se mantiene constante durante todo el proceso de carga, y además que $h \cdot \dot{\epsilon} \equiv \sigma \cdot \dot{\epsilon}$, se tiene de la ec.(28) el tensor de rigidez degradado elásticamente:

$$C_T^e(d^e) = D_S(d^e) - \frac{\Phi}{(1-d^e)} \sigma \otimes \sigma \quad (29)$$

• En la ecuación anterior, el factor de reducción $(1-d^e)$ puede estar formulado a través de cualquier regla de evolución del tipo de la ec.(11), que dependiendo del proceso mismo produzca la degradación deseada. Aquí se ha hecho la hipótesis de relacionar este factor con el trabajo de deformación elástico w^e , resultando la siguiente función de degradación:

$$(1-d^e) = (1-\Phi w^e) \quad (30)$$

donde $\dot{w}^e = \sigma \cdot \dot{\epsilon}^e$. Sustituyendo la ec.(30) en la ec.(27) y operando algebraicamente ¹⁵, se puede expresar el factor de reducción buscado, como:

$$(1-d^e) = (1-\Phi w^e) = e^{-\Phi w^{e,0}} \quad (31)$$

siendo $2 w^{e,0} = \epsilon^e \cdot D^0 \cdot \epsilon^e$. Sustituyendo la ec.(31) en la ec.(29), resulta el siguiente tensor de rigidez tangente, degradado elásticamente:

$$C_T^e(d^e) = D^0 \left[1 - \Phi \left(\epsilon^e \cdot D^0 \cdot \epsilon^e \right) \right] e^{-\Phi w^{e,0}} \quad (32)$$

En la ecuación anterior sólo queda por determinar la magnitud del escalar Φ , que será considerado como una constante, y cuya magnitud se obtiene de ensayos experimentales uniaxiales ¹⁸. Esto es:

$$\Phi = \frac{2}{E^0 (\epsilon^e)^2} \ln \frac{E_T^e}{E^0}$$

donde E^0 es el módulo de elasticidad inicial, E_s^e y ϵ^e representan el módulo de elasticidad secante y la deformación en el instante de alcanzar el límite de elasticidad respectivamente.

Algunos investigadores ^{3,4}, sostienen que la degradación propuesta por Kachanov es insuficiente para representar el comportamiento elástico del hormigón, siendo necesario recurrir a diferentes grados de degradación para el *módulo volumétrico secante* K_s^D , y el *módulo de corte secante* G_s^D . Este tipo de degradación selectiva, se debe a la diferencia que hay entre la respuesta volumétrica $\sigma_{oct} - \epsilon_{oct}$, y la distorsional $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ del hormigón ^{12,15}. Para mas información sobre este concepto, se remite a las dos referencias citadas.

6. DEGRADACION PLASTICA.

En este apartado se presenta una forma simple de tratar el fenómeno de degradación de rigides que ocurre en el hormigón por efecto de la deformación plástica. Se basa en admitir como hipótesis, que la *degradación plástica* se desarrolla a partir del momento en que se inicia el ablandamiento del material (pérdida de cohesión), situación que coincide con el inicio del período de *macro-fisuración* (límite convencional adoptado por distintos investigadores ^{8,23}). Así, se formula la rigides secante en un punto del sólido, en función de la evolución de la cohesión en dicho punto, situación que se confirma con resultados experimentales que muestran claramente que cerca y más allá del pico de tensiones, existe una pérdida de cementación intergranular que se evidencia también como un fenómeno de degradación de la rigides ^{8,9}. Este comportamiento se pone de manifiesto cuando de aplican cargas cíclicas fig.(1).

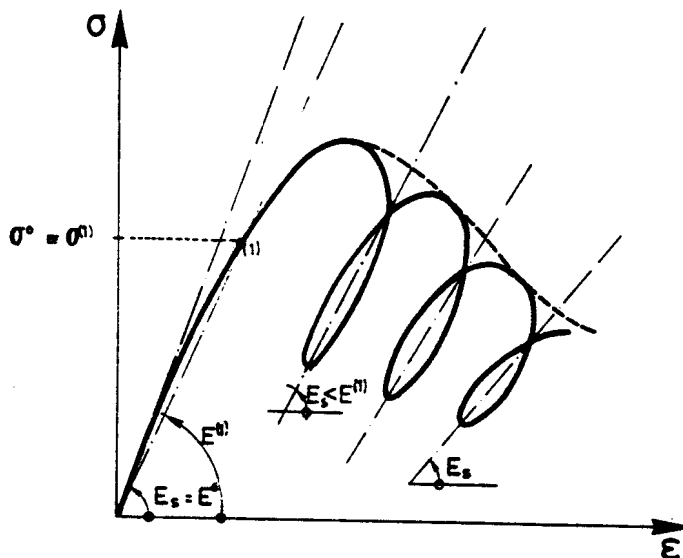


fig.(1): Esquema uniaxial de degradación de la rigidez secante.

Con base en la hipótesis antes realizada, se puede proponer una variable escalar de degradación plástica $\mathcal{D}^p \equiv \mathcal{D}^p$, que permite formular la *rigidez secante degradada*, por efecto del fenómeno plástico, del siguiente modo:

$$D_s(\mathcal{D}^p, \mathcal{D}^p) = (1 - \mathcal{D}^p) D_s(\mathcal{D}^p) \quad (33)$$

donde $D_S(d^p, d^e)$ es el tensor de rigides que resulta de un proceso de degradación elástica y plástica, $D_S(d^e)$ es el tensor de rigides secante degradado elásticamente ec.(27), y d^p es la variable de degradación plástica, cuya regla de evolución se define como:

$$\dot{d}^p = \frac{(1 - d^p)}{c} (-\dot{c}) \quad (34)$$

donde c es la cohesión definida según una cierta regla de evolución para \dot{c} ²³. Integrando la ec.(34) se obtiene: $d^p = 1 - (c/k)$, donde la constante k puede deducirse de la condición que el valor inicial de d^p es nulo y se mantiene sin cambios hasta el instante en que se inicia el proceso de ablandamiento ($\dot{c} < 0$), instante en que se tiene el valor de máxima cohesión o valor de pico c^{pic} . Resultando entonces $k = c^{pic}$, y la variable de degradación:

$$d^p = 1 - \frac{c}{c^{pic}} \quad (35)$$

Sustituyendo las ecuaciones de evolución del daño plástico $\dot{\kappa}^p$ y de la cohesión \dot{c} (ec.(5) y Anexo ²³ en la ec.(34), resulta la siguiente ecuación de evolución para la variable de degradación plástica:

$$\dot{d}^p = \frac{(1 - d^p)}{c} (-h_c h_n \cdot \dot{\sigma}^p) \quad (36)$$

de donde se puede obtener una formulación que se identifica con la regla de evolución general que se ha propuesto para las variables de degradación plástica ec.(12); esto es:

$$\dot{d}^p = \ell \cdot \dot{\sigma}^p \quad (37)$$

donde:

$$\ell = \frac{(1 - d^p)}{c} (-h_c) h_n \quad (38)$$

es un vector, que representa la dirección de degradación plástica. Esta forma particular de definir ℓ lleva implícita una superficie de degradación en el espacio de tensiones.

Sustituyendo la ec.(37) y la ec.(33) en la ec.(24), resulta el tensor de rigides degradado plásticamente, como:

$$C_T^p = D_S(d^p, d^e) - \frac{(-h_c)}{c} \sigma \otimes h_n \quad (39)$$

En los estudios numéricos realizados con el modelo, se ha supuesto que la degradación elástica y plástica no ocurren simultáneamente, cesando la primera en el momento que se inicia el proceso de plastificación del material, e iniciándose la segunda una vez superada la cohesión máxima (valor de pico). No obstante, la formulación general del modelo, permite considerar ambos fenómenos a la vez.

7 . EJEMPLO DE APLICACION: ENSAYO DE COMPRESION BIAIXIAL.

7.a- Consideraciones generales sobre el ensayo.

Se ha adoptado el ensayo de *Kupfer, Hilsdorf and Rüsck* ¹¹ como ejemplo de verificación del modelo constitutivo, debido a su amplia documentación y las características de *ensayo modelo* que ha adquirido, para numerosos investigadores que lo han utilizado como referencia para verificar ensayos experimentales y numéricos.

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para realizar el ensayo numérico, son las que muestra la fig.(2). La mayoría de los datos utilizados para el *material*, surgen de un simple análisis llevado a cabo sobre un ensayo uniaxial a compresión y tracción; con excepción de la relación de resistencias a compresión uniaxial y a compresión biaxial doble simétrica, que para hormigones es casi una constante $\sigma_{cb}/\sigma_C \simeq 1.16$ ¹⁵.

Se ha discretizado el dominio con cuatro elementos finitos planos de cuatro nodos fig.(2). Se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre ²¹ de 2×2 puntos.

La vinculación y los tipos de cargas aplicados, se muestran en cada caso en las figuras que describen la respuesta tensión-deformación figs.(3),(4),(5).

Con el objeto de mantener la relación de tensiones impuesta σ_{22}/σ_{11} , a lo largo de todo el proceso de carga con ablandamiento, ha sido necesario utilizar para todos los casos de carga un método de control de desplazamientos ¹⁵.

El problema de flujo no-asociado conduce a desarrollar una matriz de rigides tangente no-simétrica, ocasionando serios problemas en la resolución del sistema de ecuaciones. Existen distintos caminos para solucionar este inconveniente ¹⁵; utilizándose en este caso el método de rigides inicial K_0 ¹⁵.

7.b- Análisis del ensayo.

a.-) *Compresión-compresión* - ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$) -.

Como se observa en la fig.(3,a) se ha logrado una buena coincidencia de la respuesta $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$ con la correspondiente al ensayo experimental, tanto en plasticidad asociada como en plasticidad no asociada. En la curva $\sigma_{22} - \epsilon_{11}$, coincide muy bien en el período elástico-degradable y luego se obtiene una buena coincidencia hasta el pico de tensiones con plasticidad no asociada, en cambio con plasticidad asociada se logra mejor aproximación después del pico de tensiones.

En la fig.(3,b) se compara el ensayo de Kupfer con los resultados numéricos obtenidos por otros investigadores, observándose una gran dispersión en la respuesta.

En la fig.(6) se muestra el estado de fisuración que predice el modelo para compresión simple, en los puntos de integración de Gauss-Legendre. El análisis de dicha fisuración se ha realizado con un post-procesador, que interpreta que la fisuración se produce cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la apertura de estas fisuras. El esquema de fisuración obtenido para el tipo de carga aplicado, coincide con el descrito por Nilssen ⁴.

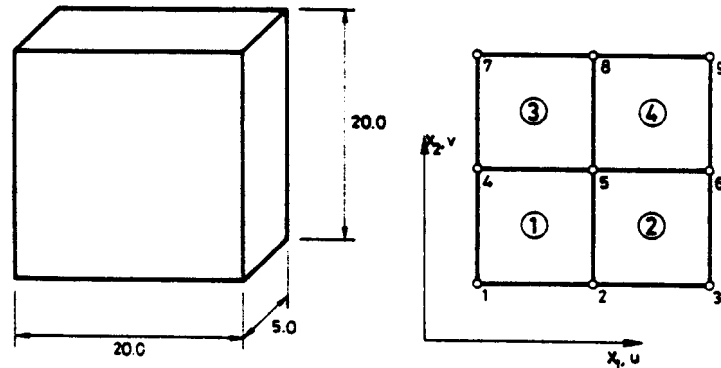
b.-) *Compresión-compresión* - ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1$ y $\sigma_{33} = 0$) -.

En la fig.(4,a) se observa una buena aproximación con el ensayo experimental, alejándose un poco en la vecindad del pico de tensiones. En la fig.(4,b) se comparan con el ensayo de Kupfer, los resultados numéricos obtenidos por otros investigadores para este mismo tipo de carga, pudiéndose observar en este caso mucha mayor dispersión en la respuesta que para el ensayo de compresión uniaxial.

En este caso de carga no se ha detectado fisuración en el plano del ensayo (x_1, x_2), no obstante, según Nilssen ⁴, este fenómeno se desarrollaría en planos paralelos al de carga: $\perp x_3$.

c.-) *Compresión-compresión* - ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52$ y $\sigma_{33} = 0$) -.

En la fig.(5,a) se observa una mayor diferencia, que en los casos anteriores, respecto al ensayo experimental de Kupfer, sin embargo se tiene una razonable coincidencia hasta el nivel de tensión pico. Al final del proceso se produce un aumento en la deformación ϵ_{11} en el mismo sentido de la tensión σ_{11} , situación que probablemente se debe al daño que ha sufrido el sólido en la dirección paralela a σ_{22} .



$$E_0 = 395000.00 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\nu_0 = 0.24$$

$$\sigma_c^0 = -229.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_c^{pic} = -328.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_T^0 = 22.90 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha = 0.12 - \frac{\sigma_{T0}}{\sigma_{c0}} = 1.16$$

$$\gamma = 3.0$$

$$p = 1.0$$

$$G^I = 0.16 \text{ kg/cm}$$

$$G^c = 16.00 \text{ kg/cm}$$

$$L^p = \sqrt{A^c}$$

Flujo asociado. Criterio de fluencia propuesto

Flujo no-asociado. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Criterio de fluencia propuesto;} \\ \text{Func. de potencial de Mohr-Coulomb} \\ \text{con : } \phi = \psi = 15^\circ \end{array} \right.$

fig.(2): Ensayo de compresión y/o tracción biaxial - Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

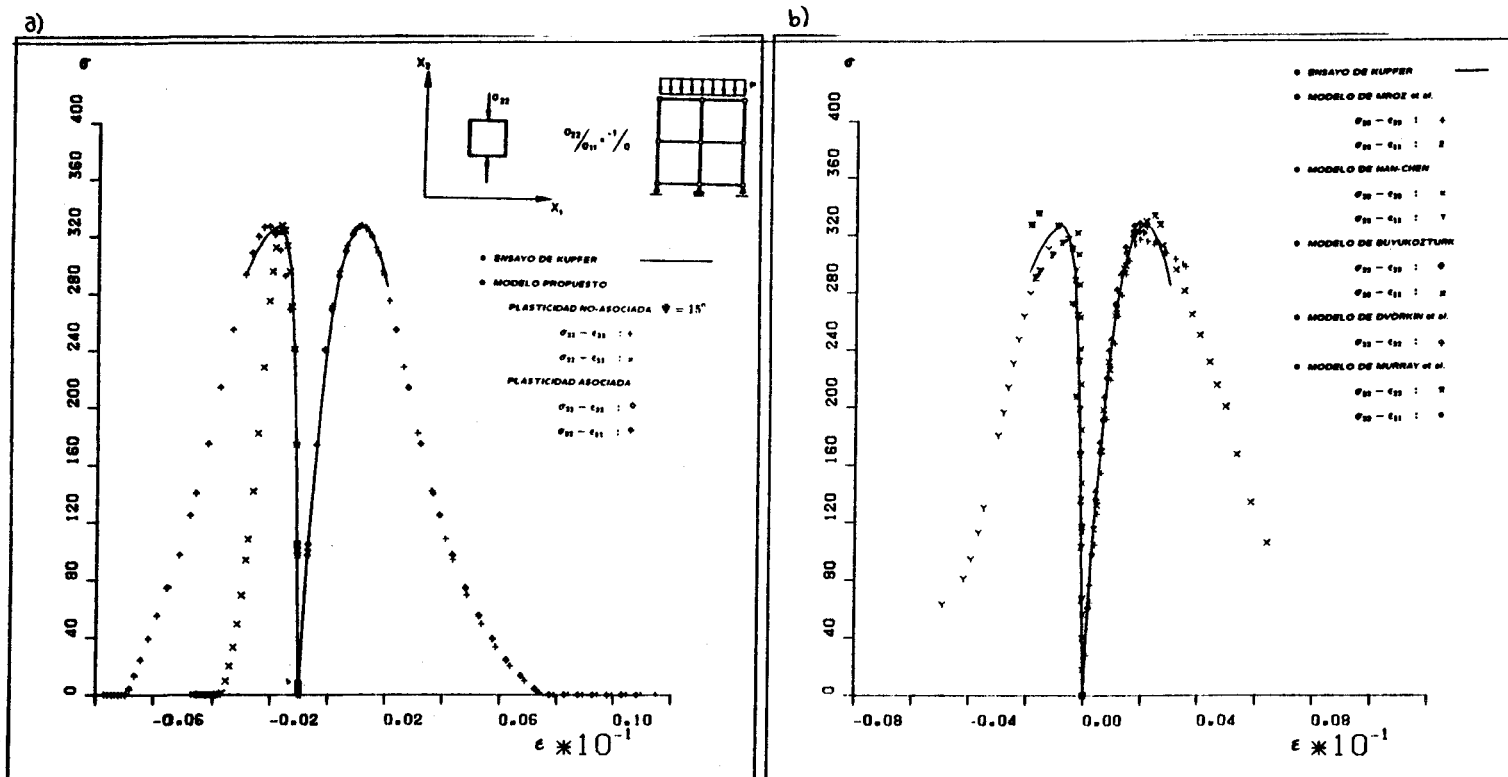


fig.(3): Caso de carga a.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/0$ y $\sigma_{33} = 0$). a) Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo de Kupfer et al. ¹⁸; b) Comparación entre el resultado del ensayo de Kupfer et al. ¹⁸ y los obtenidos por los modelos numéricos de: Mroz et al. ²⁴, Han an Chen ²⁵, Boyukozturk ²⁶, Dvorkin et al. ²⁷, y Murray et al. ²⁸.

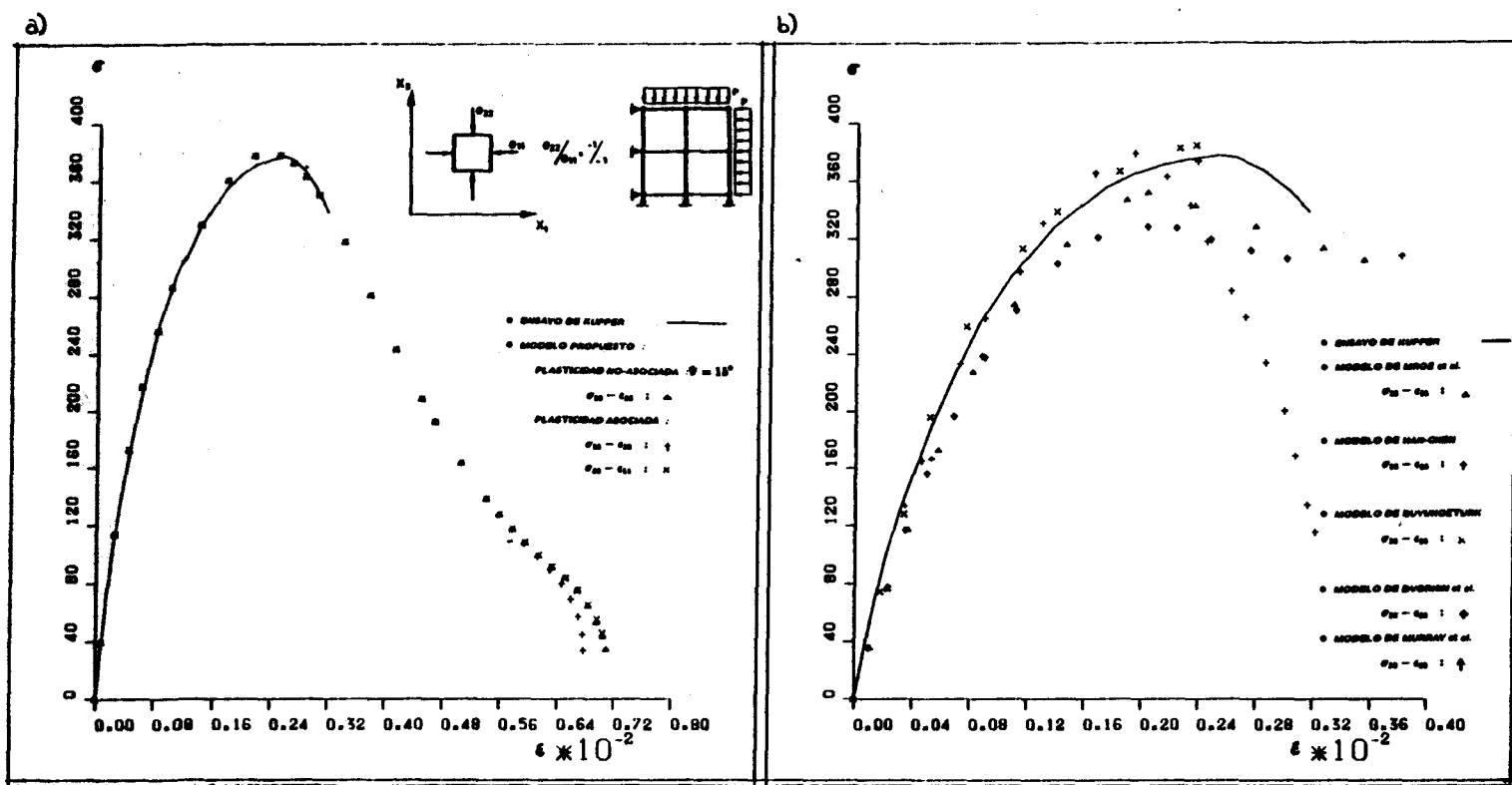


Fig.(4): Caso de carga b.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-1$ y $\sigma_{33} = 0$); a) Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo de Kupfer et al. ¹⁸; b) Comparación entre el resultado del el ensayo de Kupfer et al. ¹⁸ y los obtenidos por los modelos numéricos de: Mroz et al. ²⁴, Han an Chen ²⁵, Boyukozturk ²⁶, Dvorkin et al. ²⁷, y Murray et al. ²⁸.

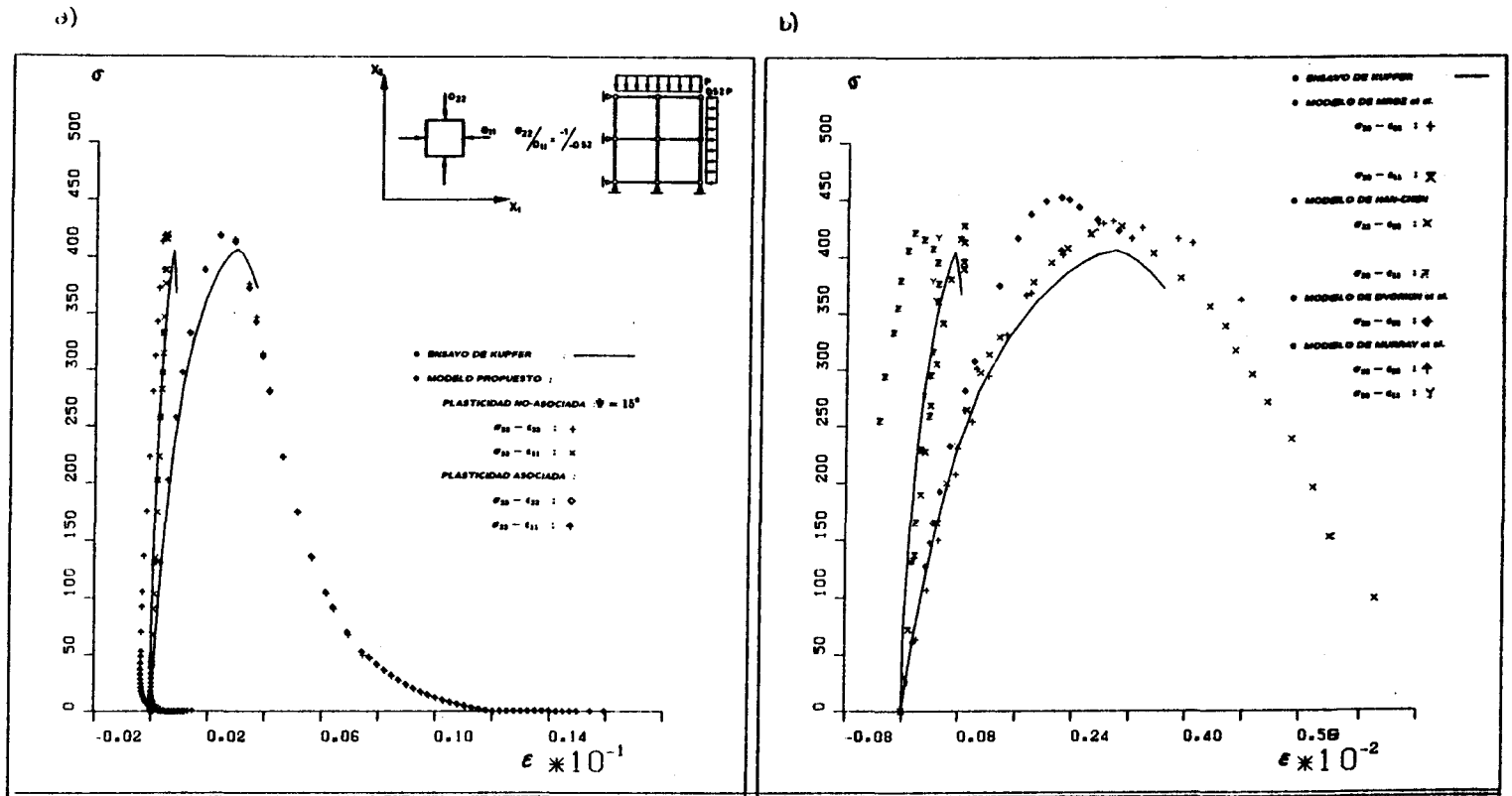


fig.(5): Caso de carga c.-: ($\sigma_{22}/\sigma_{11} = -1/-0.52$ y $\sigma_{33} = 0$); a) Comparación entre el resultado obtenido por el modelo, y el ensayo de Kupfer et al. ¹⁸; b) Comparación entre el resultado del ensayo de Kupfer et al. ¹⁸ y los obtenidos por los modelos numéricos de: Mroz et al. ²⁴, Han an Chen ²⁵, Boyukozturk ²⁶, Dvorkin et al. ²⁷, y Murray et al. ²⁸.

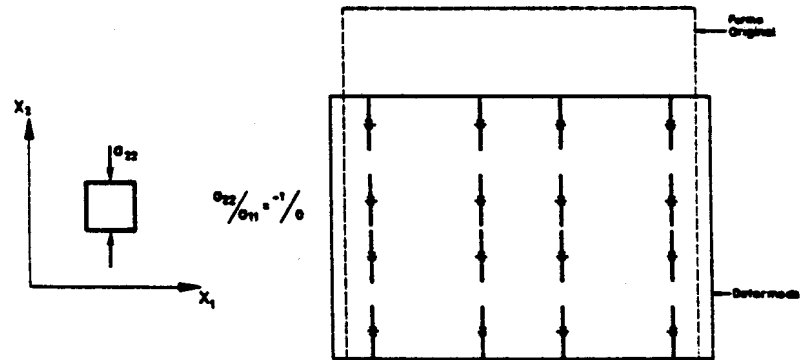


Fig.(6): Fisuración que resulta del modelo, para un caso de compresión simple.

En la fig.(5,b) se pueden ver los resultados obtenidos por otros modelos numéricos para este mismo tipo de carga. De esta comparación surge que la respuesta que mas se aleja del pico de tensiones está un 10.2 % por encima del ensayo de Kupfer y el que más se acerca al ensayo de referencia está también por encima del pico de tensiones en un 3.0 %; y en general se puede decir que existe poca concordancia con el ensayo de referencia.

En este caso, al igual que para compresión doble simétrica, no aparecen fisuras en el plano del ensayo, pero es razonable intuir que pueden ocurrir en planos paralelos a éste.

8 . CONCLUSIONES.

En este artículo se introduce el concepto de degradación de rigidez, dentro del modelo de "daño plástico" (ver también la ref.: 22). Se han definido los fenómenos de degradación de rigidez elástica y plástica a través de dos variables internas y sus respectivas ecuaciones de evolución. Además se formulan dos casos simples de degradación, uno elástico y otro plástico.

La consideración del fenómeno de degradación de rigidez conduce a una formulación general del modelo constitutivo, que permite dar gran versatilidad en su utilización, y permitiendo transformarlo en distintos modelos mas simples que pueden considerarse como casos particulares de éste. Así el adecuado manejo de sus parámetros permite obtener una *formulación elástica no-lineal con degradación de rigidez*, o una *formulación elasto-plástica con endurecimiento positivo, nulo o negativo con degradación elástica y o plástica*.

Del ejemplo presentado, se deduce la capacidad de simulación que ofrece el modelo de daño plástico.

- **Variable de daño plástico; κ^P :**

Es una variable interna del proceso plástico, que representa una *medida relativa de la energía disipada*, y que hace las veces de *variable de endurecimiento isotropo*. Esta variable vale cero para un estado no-dañado, y uno para una situación de daño total en el punto. Su ecuación de evolución, expresada en las direcciones principales de tensión: σ_i , y deformación plástica ϵ_i^P , viene dada por:

$$\dot{\kappa}^P = \dot{\kappa}_T^P + \dot{\kappa}_C^P = \sum_{i=1}^3 [(h_{\kappa_i})_T + (h_{\kappa_i})_C] \dot{\epsilon}_i^P \quad (A-1)$$

siendo:

$$(h_{\kappa_i})_T = \frac{1}{\sigma_T^0} \frac{(\sigma_i)}{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i)} \sigma_T \quad ; \quad (h_{\kappa_i})_C = \frac{1}{\sigma_C^0} \frac{(-\sigma_i)}{\sum_{i=1}^3 (-\sigma_i)} \sigma_C \quad ;$$

$$\sigma_T^0 = \sigma_T^{p0} + \frac{G_T^{p1}}{L^P} \quad ; \quad \sigma_C^0 = \sigma_C^{p0} + \frac{G_C^{p1}}{L^P} \quad ;$$

$$(\pm \sigma) = \frac{1}{2} (\sigma \pm |\sigma|) \quad ; \quad \text{Función rampa.}$$

donde σ_T y σ_C : Son las tensiones uniaxiales de tracción y compresión para un dado κ^P ; σ_T^{p0} y σ_C^{p0} : Son las energías específicas inelásticas, a tracción y compresión, desarrolladas previo a la localización del daño; G_T^{p1} y G_C^{p1} : Son las energías por unidad de área dañada, para un proceso de tracción uniaxial, y compresión uniaxial, respectivamente; y L^P : La longitud característica de la zona dañada.

- **Variable de cohesión; c :**

Es una variable interna del proceso plástico que representa una *resistencia equivalente escalada*, en cada instante del proceso, y que hace las veces de *función de endurecimiento isotropo*. Vale c^0 para $\kappa^P = 0$ y tiende a cero para $\kappa^P = 1$. Su evolución viene dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{c} = h_c(\sigma, \kappa^P, c) \dot{\kappa}^P \quad (A-2)$$

siendo:

$$h_c(\sigma, \kappa^P, c) = c \left[\frac{r(\sigma)}{c_T(\kappa^P)} \frac{dc_T(\kappa^P)}{d\kappa^P} + \frac{1-r(\sigma)}{c_C(\kappa^P)} \frac{dc_C(\kappa^P)}{d\kappa^P} \right]$$

donde $c_C(\kappa^P)$ y $c_T(\kappa^P)$ son funciones explícitas que representan la evolución de la cohesión durante un ensayo experimental uniaxial de *compresión* y *tracción simple*, respectivamente; y $r(\sigma)$: es una *función de peso* que depende del tipo de estado tensional que se produce en cada instante (tracción, compresión o tracción-compresión), y que varía entre $0 \leq r(\sigma) \leq 1$.

- **Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb Modificado:**

Permite obtener la *relación inicial entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción* $R^0 = |\sigma_C^0|/|\sigma_T^0|$ deseada, para *ángulos de rozamiento interno ϕ* comprendidos dentro de los valores experimentales del hormigón. Su expresión matemática es:

$$\mathcal{F}(\sigma, c, \phi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3} K_3 + \sqrt{J_2} \left(K_1 \cos \theta - K_2 \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \cos \phi = 0 \quad (A-3)$$

donde c : representa el valor actual de la cohesión; $K_1 = f_1(\alpha_R, \phi)$, $K_2 = f_2(\alpha_R, \phi)$, $K_3 = f_3(\alpha_R, \phi)$, son funciones que dependen del ángulo de rozamiento interno: ϕ y de una constante de ajuste del criterio de fluencia: α_R . Para $\alpha_R = 1$ la ecuación anterior coincide con la función de Mohr-Coulomb clásica.

- **Nuevo criterio de fluencia:**

Para obtener una simulación ajustada al comportamiento más general del hormigón, se ha formulado nuevo criterio de fluencia, que permite una relación más amplia que la función de Mohr-Coulomb modificada. Su expresión matemática es la siguiente:

$$F = F(\sigma, c, \phi) = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\sqrt{3} J_2 + \alpha I_1 + \beta(\sigma^{\max}) - \gamma(-\sigma^{\max}) \right] - c = 0 \quad (A-4)$$

donde $\alpha = f_\alpha(\phi)$, $\beta = f_\beta(\phi)$ y $\gamma = f_\gamma(\phi)$ son magnitudes adimensionales que determinan la forma de la función de fluencia; c y ϕ representan la cohesión y el rozamiento interno; y σ^{\max} la tensión principal mayor.

- **Función de potencial plásticos:**

Se ha utilizado la función de Mohr-Coulomb modificada, con un ángulo de fricción interna igual al de dilatación $\phi = \psi$. Esto es:

$$g(\sigma, \phi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3} K_3 - \sqrt{J_2} \left(K_1 \cos \theta - K_2 \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - c \sigma = 0 \quad (A-5)$$

donde K_i son constantes que dependen de la relación entre resistencias uniaxiales a compresión y tracción.

10 . REFERENCIAS.

- [1] - Andersen B., Grestle K. and Ko H. - *Response of mortar and concrete to biaxial compression* - Journal of the Engineering Mechanics Division - ASCE - Vol. 103 - Nro. EM4 - pp. 515, 526 - 1977.
- [2] - Bažant Z. and Kim S. - *Plastic fracturing theory for concrete* - Jour. Engineering Mechanics Division - Vol. 105 - Nro. EM3 - pp. 407, 428 - ASCE - 1979
- [3] - Cedolin L., Cruttsen R. and Dei Poli S. - *Triaxial stress-strain relationship for concrete* - Journal of Engineering Mechanics Division - Vol. 103 - Nro. EM3 - pp. 423, 439 - 1977.
- [4] - Chen W. F. - Plasticity in reinforced Concrete - Mc Graw Hill - 1982.
- [5] - Chen A. and Chen W. F. - *Constitutive Relations for Concrete* - Journal of The Engineering Mechanics Division - Vol. 101 - Nro. EM4 - pp. 465, 481 - ASCE - 1975.
- [6] - Delibes A. - *Microfisuración del hormigón por compresión, ¿ Estamos del lado de la seguridad ?* - *Infamassida-In.Construcción* - Vol. 37 - Nro. 379 - pp. 43, 47 - 1986.
- [7] - Ditommaso A. - *Evaluation of concrete fracture - Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing* - Ed. by A. Carpinteri and A. Ingrassia - pp. 31, 65 - Martinus Nijhoff Publishers - 1984.
- [8] - Dougill J. W. - *Constitutive Relations for concrete and Rock: Applications and extensions of elasticity and plasticity Theory* - Mechanics of Geomaterials - pp. 21, 46 - Edited by. Z. Bažant - 1985.
- [9] - Han D. J. and Chen W. F. - *Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling* - Int. Jour. Solids structures - Vol. 22 - Nro. 8 - pp. 935,950 - 1986.
- [10] - Kheinski M. and Miron Z. - *Description of inelastic deformation and degradation of concrete* - Internal report - Institute of fundamental technological research - Warszawa , Poland - 1987.

- [11] - Kupfer H. B., Hilsdorf H. and Rusch H.- *Behavior of concrete under biaxial stresses* - Journal ACI - Vol. 66 - Nro. 8 - 1969.
- [12] - Lubliner J., Oller S., Oliver J. y Oñate E.- *A plastic damage model for non linear analysis of concrete* - Internal report - Paper submitted to: "Solids and structures" - April 1988.-
- [13] - Lubliner J.- *Thermomechanics of deformable bodies*- Edited by Department of Civil Engineering University of California, Berkeley - U.S.A. - 1985.
- [14] - Oliver J. y Fernandes Roure J. R.- *Análisis no lineal de estructuras bidimensionales de hormigón por el método de los elementos finitos* - II Simposium de Aplicaciones del Metodo de los Elementos Finitos en Ingeniería - Eds. Oñate E., Suarez B., Miquel Canet J.- Vol. 1 - pp. 447, 463 - Barcelona 1986.
- [15] - Oller S.- *Un modelo de "daño continuo" para materiales friccionales* - Tesis Doctoral - Departamento de Estructuras, Universitat Politècnica de Catalunya - Barcelona, España - 1988.-
- [16] - Rots J. G., Nauta P., Kusters G. and Blaauwendraad J.- *Smearred crack approach and fracture localization in concrete* - Heron - Vol. 30 - Delft, Netherlands - 1985.
- [17] - Simo J. C. and Ju J. M.- *On continuum damage - elastoplasticity at finite strains: a computational framework* - Paper submitted to: "Computational Mechanics" - 1987.
- [18] - Simo J. C. and Ju J. M.- *Strain and stress based continuum damage model - Part I : Formulation* - Solids and Structures - Vol. 23, Nro. 7, pp. 281,841 - 1987.
- [19] - State of the art report on: Finite Element Analysis of Reinforced concrete - ASCE - 1982.
- [20] - Tasuji E., Slate F. and Nilson A.- *Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading*- Journal ACI - Vol 75 - Nro. 7 - pp. 306, 312 - 1978.
- [21] - Zienkiewicz O. C.- El método de los elementos finitos- Edit. Reverté- Barcelona - 1982.
- [22] - Oller S., Oliver J., Lubliner J. y Oñate E.- *Un modelo constitutivo de daño plástico para materiales friccionales; Parte I: Variables fundamentales, Funciones de fluencia y potencial*- Artículo para ser publicado en: *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería* - 1988.
- [23] - Oliver J., Oller S. y Oñate E. - *Modelos elasto-plásticos para simulación numérica de procesos de fracture* - Metodos Numéricos Aplicados a la Mecánica de Fractura -pp. 27,60 - Editores J. Oliver, M. Elices, E. Oñate, M. Astis - Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería - Barcelona 1988.-
- [24] - Klisinski M. and Mroz Z.- *Description of inelastic deformation and degradation of concrete* - *Internal report* - Institute of fundamental technological research - Warszawa , Poland - 1987.
- [25] - Han D. J. and Chen W. F.- *Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling* - *Int. Jour. Solids structures* - Vol. 22 - 8 - pp. 935,950 - 1986.
- [26] - Buyukosturk O. and Shareef S.- *Constitutive modeling of concrete in finite element analysis* - *Computers and Structures* - Vol. 21 - 3 - pp. 581, 610 - 1985.
- [27] - Dvorkin E., Tórrant R. and Alvarado A.- *A constitutive relation for concrete* - *Proceedings of the International Conference of Computational Plasticity* - Edited by D. R. J. Owen, E. Hinton, E. Oñate - Part 2 - pp. 1415, 1430 - Pineridge Press - 1987.
- [28] -Murray D. W., Chitnuyanondh L., Khasal Y. and Chung Wong -*Concrete Plasticity theory of biaxial stress analysis*- *Jour. Eng. Mechanics Division - ASCE* - Vol. 105 - EM6 - pp. 989, 1106 - 1979.