

OPTIMIZACION APLICADA A LA FORMULACION Y SOLUCION
DEL MODELO CINEMATICO PARA ELASTO PLASTICIDAD

Mildred Ballin Hecke
Universidade Federal de Paraná, UFPr, Brasil

Néstor Zouain Pereira
Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil

Lavinia Alves Borges
Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-RJ, Brasil

Raúl A. Feijó
Laboratório Nacional de Computação Científica, LNCC-CNPq, Brasil.

RESUMEN

Se describe el desarrollo de una formulacion variacional cinemática para el análisis elastoplástico con endurecimiento por deformación. Este principio de mínimo es escrito en términos de incrementos de desplazamiento y multiplicadores plásticos y es derivado de una formulacion en velocidades y tasas de multiplicadores plásticos utilizando conceptos de optimizacion.

Son analizadas varias alternativas para la resolucion del problema discretizado, todas utilizando técnicas de programación matemática.

ABSTRACT

A variational formulation for the elastic-plastic analysis in terms of finite increments of displacements and plastic multipliers is derived from a minimum principle for velocities and rates of plastic multipliers, by using optimization concepts.

We discuss some alternative procedures for the solution of the discretized problem, using several mathematical programming techniques.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo describe el desarrollo de una formulación variacional cinemática para el análisis incremental elasto plástico con endurecimiento por deformación. Se muestra un principio de mínimo para velocidades y tasas de multiplicadores plásticos que, discretizado en el tiempo, produce una formulación variacional para incrementos de desplazamientos y multiplicadores plásticos. Este principio incorpora la imposición de la admisibilidad plástica de las tensiones al final del paso de carga, así como también la posibilidad de descarga elástica local. Para el desarrollo de estos principios variacionales se utilizan conceptos de teoría de optimización.

Son analizadas dos alternativas para la resolución del problema discreto. En una de ellas se elimina la variable desplazamiento obteniéndose un problema de programación cuadrática. La segunda alternativa consiste en seguir un procedimiento de cálculo iterativo en que para cada desplazamiento se calculan los factores plásticos resolviendo problemas de programación cuadrática a nivel de cada elemento finito. Algunas características de continuidad y diferenciabilidad de estos problemas son discutidas justificando la utilización de Métodos Quasi-Newton combinados con el método de Lemke para programación cuadrática a nivel de cada elemento. Finalmente, las formulaciones presentadas son aplicadas a placas con entalhe traccionadas, mostrando el desempeño de estos algoritmos.

El comportamiento de un gran número de materiales elasto-plásticos con endurecimiento por deformación puede colocarse de la siguiente forma [1, 2]:

$$f(T, w) \leq 0 \quad (1)$$

$$D = D^e + D^p \quad (2)$$

$$D^e = D^{-1} \dot{t} \quad (3)$$

$$D^p = f_T \dot{\lambda} \quad (4)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad (5)$$

$$\text{si } f_j = 0: \dot{f}_j \leq 0 \quad \dot{f}_j \dot{\lambda}_j = 0 \quad (6)$$

donde la función de fluencia (plástica) está definida por el campo vectorial m -dimensional f . Cada componente f_j es llamado "modo plástico", que suponemos regular y convexo con respecto al campo de tensiones T y a la historia de la deformación plástica w .

El tensor de elasticidad D satisface propiedades de simetría y elipticidad, permite definir la parte elástica, D^e , y la parte plástica, D^p , de la tasa de deformación D .

La ecuación 4 define la tasa de deformación plástica D^P a través de la "ley asociativa" de la plasticidad, donde f_T representa el gradiente de f respecto a T .

Las relaciones de complementaridad lineal dadas por las Ecs. 1 y 5 establecen que solamente los componentes $\dot{\lambda}_j$ asociados a los modos plásticos "activos" (es decir $f_j = 0$), contribuyen en la definición de la tasa de deformación plástica.

Por último la Ec. 6, caracteriza la posibilidad de des carga elástica.

La ecuación constitutiva, dada por las Ecs. 1 - 6, establece de manera local, es decir en cada punto del cuerpo, la relación que vincula T con D . En las secciones siguientes, mostramos la obtención de una "ecuación constitutiva global" en función de tasas o de incrementos finitos en las variables cinemáticas, desplazamientos y deformaciones. La convexidad de esta ecuación constitutiva permitirá definir el problema del equilibrio como el problema de minimización de un funcional convexo, una vez diferenciable.

La aplicación del MEF (Método de los Elementos Finitos) reducirá el problema de optimización a un problema de programación matemática cuya solución es discutida también en este trabajo.

ECUACION CONSTITUTIVA GLOBAL

Como se demuestra en [2, 6], el potencial elasto-plástico que nos permite determinar el campo T asociado al campo D , supuesto conocido el estado actual del cuerpo, dado por el estado de tensión, T , el estado de deformación, E , y la historia del proceso plástico, w (donde T y w son tales que $f(T, w) < 0$) es:

$$\phi^{ep}(D) = \inf_{\dot{\lambda}} j(D, \dot{\lambda}) \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\lambda} \in \Lambda^+ \quad \{\dot{\lambda}; \dot{\lambda} > 0 \text{ en } \beta\} \\ \int_{\beta} f \cdot \dot{\lambda} d\beta = 0 \end{array} \right.$$

donde β es la región ocupada por el cuerpo y:

$$j(D, \dot{\lambda}) = \int_{\beta} \frac{1}{2} D \cdot D d\beta + \int_{\beta} \frac{1}{2} (f_T^T \cdot f_T + h) \dot{\lambda} \cdot \dot{\lambda} d\beta - \int_{\beta} f_T^T D \cdot \dot{\lambda} d\beta$$

$h = -f_w \frac{dw}{d\lambda}$ es el operador asociado al endurecimiento por deformación del material.

El potencial ϕ^{ep} es convexo y continuamente diferenciable una vez en la variable D [5, 6], y define el campo T asociado a D por las siguientes expresiones:

$$\dot{T} = \mathbb{N}(D - f_T \dot{\lambda}) \in \partial \phi^{ep}(D)$$

$$\phi^{ep}(D^*) - \phi^{ep}(D) \geq \int_{\beta} \mathbb{N}(D - f_T \dot{\lambda}) \cdot (D^* - D) d\beta \quad \forall D^*$$

y donde $\dot{\lambda}$ está definido por D através de la caracterización del infimo de $j(D, \dot{\lambda})$ dada por:

$$\dot{\lambda} \in \Lambda^+, \int_{\beta} f \cdot \dot{\lambda} d\beta = 0$$

$$\int_{\beta} \left[(f_T^T \mathbb{N} f_T + h) \dot{\lambda} - f_T \mathbb{N} D \right] \cdot (\dot{\lambda}^* - \dot{\lambda}) d\beta \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\lambda}^* \in \Lambda^+ \\ \int_{\beta} f \cdot \dot{\lambda}^* d\beta = 0 \end{array} \right.$$

Con el objetivo de obtener una relación constitutiva en términos de incrementos finitos de deformación (ΔE), procedemos primero a eliminar de restricción $\int_{\beta} f \cdot \dot{\lambda} d\beta = 0$ haciendo uso de la técnica de penalización. Obtenemos así

[5, 6]:

$$\phi_{\epsilon}^{ep}(D) = \inf_{\dot{\lambda} \in \Lambda^+} j_{\epsilon}(D, \dot{\lambda})$$

$$j_{\epsilon}(D, \dot{\lambda}) = j(D, \dot{\lambda}) - \frac{1}{\epsilon} \int_{\beta} f \cdot \dot{\lambda} d\beta, \quad \epsilon > 0$$

obviamente $\phi_{\epsilon}^{ep}(D) \rightarrow \phi^{ep}(D)$ para $\epsilon \rightarrow 0^+$. Para los respectivos minimizantes, también se verifica que $D_{\epsilon} \rightarrow D$. El funcional penalizado no es necesario, ni conveniente, para el cálculo de tasas de deformaciones; sin embargo, haciendo $D = \Delta E / \Delta t$, $\dot{\lambda} = \Delta \lambda / \Delta t$ y tomando $\Delta t = \epsilon$, arribamos finalmente a formulación incremental que sigue, la cual presenta ventajas que serán comentadas a continuación.

$$\bar{\phi}^{ep}(\Delta E) = \inf_{\Delta \lambda \in \Lambda^+} \bar{j}(\Delta E, \Delta \lambda) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{j}(\Delta E, \Delta \lambda) = & \int_{\beta} \frac{1}{2} \mathbb{N} \Delta E \cdot \Delta E d\beta + \int_{\beta} \frac{1}{2} (f_T^T \mathbb{N} f_T + h) \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda d\beta \\ & - \int_{\beta} f_T^T \mathbb{N} \Delta E \cdot \Delta \lambda d\beta - \int_{\beta} f \cdot \Delta \lambda d\beta \end{aligned} \quad (8)$$

que establece la ecuación constitutiva "incremental":

$$\Delta T = \mathbb{N} (\Delta E - f_T \Delta \lambda) \in \partial \bar{\phi}^{ep}(\Delta E)$$

o su equivalente:

$$\bar{\phi}^{e\phi}(\Delta E^*) - \bar{\phi}^{e\phi}(\Delta E) \geq \int_{\beta} h (\Delta E - f_T \Delta \lambda) \cdot (\Delta E^* - \Delta E) d\beta \quad (9)$$

donde $\Delta \lambda \in \Lambda^+$ está dado por ΔE a través de:

$$\int_{\beta} \left[(f_T^T \cdot f_T + h) \Delta \lambda - f_T^T \cdot \Delta E - f \right] \cdot (\Delta \lambda^* - \Delta \lambda) d\beta \geq 0 \quad \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda^+ \quad (10)$$

La inecuación variacional anterior corresponde localmente a:

$$\Delta \lambda > 0$$

$$f + f_T^T \cdot (\Delta E - f_T \Delta \lambda) - h \Delta \lambda = f + f_T^T \Delta T + f_{\lambda} \Delta \lambda < 0$$

$$\{f + f_T^T \cdot (\Delta E - f_T \Delta \lambda) - h \Delta \lambda\} \cdot \Delta \lambda = \left[f + f_T^T \Delta T + f_{\lambda} \Delta \lambda \right] = 0$$

que en el caso de función de plastificación f formada por modos plásticos "planos" (f_T y f_{λ} constantes) se reduce a:

$$\Delta \lambda > 0, \quad f_t + \Delta t < 0, \quad f_t + \Delta t \cdot \Delta \lambda = 0$$

De esta manera, la ecuación constitutiva variacional incremental para el caso de materiales elasto-plásticos con endurecimiento por deformación caracterizados por funciones de plastificación "planas" garantiza el siguiente comportamiento:

- i) al final del incremento, el estado de tensión y deformación es plásticamente admisible, es decir $f_{t+\Delta t} < 0$.
- ii) solamente los modos plásticos activos (al final del incremento ($[f_{f+\Delta t}]_j = 0$) contribuyen en el incremento de deformación plástica ($\Delta \lambda_j > 0$)
- iii) para cada ΔE existe un único $\Delta \lambda \in \Lambda^+$ que minimiza $J(\Delta E, \Delta \lambda)$, y que satisface i) e ii).

MODELO CINEMATICO DEL ANALISIS ELASTO-PLASTICO INCREMENTAL

Como veremos en esta sección la convexidad del potencial $\bar{\phi}^{e\phi}$ permite colocar el modelo cinemático del análisis incremental elasto plástico como problema de mínimo de un funcional.

En efecto, supuesto conocido el estado actual del cuerpo (es decir conozcamos T, E, λ), dado un incremento de carga (caracterizado por un incremento de cargas de cuerpo Δb , definidas en β , de superficie $\Delta \alpha$, definidas en $\partial \beta_a$ parte del contorno $\partial \beta$) el modelo cinemático del análisis

sis incremental consiste en:

. Determinar el incremento Δu tal que:

- a) Sea cinemáticamente admisible con las restricciones de vínculo. Por ejemplo para el caso de condiciones homogéneas de vínculo en $\partial\beta_u$ tenemos que:
 $\Delta u \in V = \{u; u \text{ Suf. regular, } u = 0 \text{ en } \partial\beta_u\}$
- b) Δu produzca una deformación $\Delta E = \mathcal{D}\Delta u$ (donde \mathcal{D} es el operador de deformación) asociada por la ecuación constitutiva incremental a un incremento de tensiones ΔT en equilibrio con las cargas Δb y Δa . Lo anterior se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

$$\int_{\beta} \Delta T \cdot \mathcal{D}v d\beta = \int_{\beta} \Delta b \cdot v d\beta + \int_{\partial\beta_a} \Delta a \cdot v d\beta \quad \forall v \in V$$

$$\Delta T = \mathbb{B} (\mathcal{D}\Delta u - f_T \Delta \lambda)$$

$$\Delta \lambda \in \Lambda^+$$

$$\int_{\beta} \left[(f_T^T \mathbb{B} f_T + h) \Delta \lambda - f_T^T \mathbb{B} \mathcal{D}\Delta u - f \right] \cdot (\Delta \lambda^* - \Delta \lambda) d\beta \geq 0 \quad \forall \Delta \lambda^* \in \Lambda^+$$

Recordando la convexidad del potencial ϕ^{ep} , Ec. 9, el problema puede reescribirse de manera compacta como:

. Determinar $\Delta u \in V$ tal que:

$$\overline{\phi}^{ep}(\mathcal{D}v) - \overline{\phi}^{ep}(\mathcal{D}\Delta u) \geq \int_{\beta} \Delta b \cdot (v - \Delta u) d\beta + \int_{\partial\beta_a} \Delta a \cdot (v - \Delta u) d\beta \quad \forall v \in V$$

o reordenando términos:

$$F(v) = \overline{\phi}^{ep}(\mathcal{D}v) - \int_{\beta} \Delta b \cdot v d\beta - \int_{\partial\beta_a} \Delta a \cdot v d\beta \geq \overline{\phi}^{ep}(\mathcal{D}\Delta u) -$$

$$\int_{\beta} \Delta b \cdot \Delta u d\beta - \int_{\partial\beta_a} \Delta a \cdot \Delta u d\beta = F(\Delta u) \quad \forall v \in V$$

es decir Δu minimiza F en V . De esta manera el modelo cinemático del análisis incremental elasto-plástico se reduce al siguiente problema de óptimo:

$$\inf_{v \in V} F(v) \quad (11)$$

donde F fue definido en la expresión anterior y ϕ^{ep} fue definido en las Ecs. 7 - 8.

APLICACION DEL MEF Y ALGORITMOS DE RESOLUCION

La aproximación por el MEF del problema de optimización dado por (11), consiste en redefinirlo en espacios de dimensión finita.

Para simplificar nuestra presentación nos limitaremos al caso de cuerpos tridimensionales o estados planos de tensión, deformación o de simetría de revolución. En todos estos casos se verifica que:

$V = (H^1(\beta))^n$, $n = 2$, (estados planos y de revolución), 3 (cuerpos tridimensionales)

$\Lambda^+ \in (L^2(\beta))^m$, m es el número de modos plásticos.

De la observación anterior se sigue que la interpolación a ser adoptada para los campos Δu debe ser tal que garantice la continuidad de este campo en todo β pudiendo sus derivadas ser discontinuas entre elementos. Para el campo $\Delta \lambda$ la interpolación a ser adoptada deberá garantizar la positividad de este campo en todo β , siendo discontinua entre elementos.

Por últimos los espacios de aproximación para los campos Δu y $\Delta \lambda$ no pueden ser totalmente independientes. En efecto en estructuras donde exista la posibilidad de colapso plástico, estos espacios de aproximación deberán relacionarse a través de la compatibilidad de deformaciones puramente plásticas:

$$D\Delta u = f_T \Delta \lambda$$

Luego la interpolación en $\Delta \lambda$ deberá ser capaz de representar una deformación cinemática sin por esto destruir las características del espacio de aproximación para Δu .

Si designamos con:

$\Delta u \in \mathbb{R}^n$ Vector conteniendo los incrementos de desplazamientos de todos los nudos de la partición de elementos finitos adoptada.

Δu^e restricción de Δu a nivel del elemento finito "e".-

$\Delta \lambda \in \mathbb{R}^q$ Vector conteniendo los incrementos de multiplicadores plásticos adoptados para la interpolación de este campo en toda la estructura.

$\Delta \lambda^e$ restricción de $\Delta \lambda$ a nivel del elemento finito "e".-

donde como es normal en el MEF:

$$u^e = \sum_{i=1}^{n^e} \phi_i^e u_i^e, \quad n^e = \text{numero de "grados de libertad" en desplazamientos del elemento "e".}$$

ϕ_i^e = función de interpolación en el elemento "e" asociada al grado de libertad "i" en desplazamientos.

$$\Delta \lambda^e = \sum_{i=1}^{q^e} \psi_i^e \Delta \lambda_i^e, \quad q^e, \psi_i^e = \text{análogos a } n^e \text{ y } \phi_i^e \text{ para el campo de multiplicadores pásticos.}$$

La sustitución de esta aproximación en la (11) conduce al siguiente problema de programación matemática:

$$\min_{\Delta u \in \mathbb{R}^n} F(\Delta u) \quad (12)$$

donde:

$$F(u) = \Delta \lambda \min_{\lambda} \left[\frac{1}{2} K \Delta u \cdot \Delta u + \frac{1}{2} K_{\lambda} \Delta \lambda \cdot \Delta \lambda - K_{\lambda u} \Delta u \cdot \Delta \lambda - \bar{F} \cdot \Delta \lambda \right] - F \cdot \Delta u \quad (13)$$

Las matrices K , K_{λ} , $K_{\lambda u}$ y los vectores \bar{f} y F son construidos a partir del ensamble, (usual del MEF), de las correspondientes matrices y vectores a nivel de cada elemento:

$$k^e = \left[\int_{\beta^e} B^T \psi_i \cdot D \psi_j d\beta; i, j = 1, 2, \dots, n^e \right]$$

$$k_{\lambda}^e = \left[\int_{\beta^e} (f_T^T B f_T + h) \psi_i \cdot \psi_j d\beta; i, j = 1, 2, \dots, q^e \right]$$

$$k_{\lambda u}^e = \left[\int_{\beta^e} f_T^T B D \psi_j \cdot \psi_i d\beta; i = 1, 2, \dots, q^e; j = 1, 2, \dots, n^e \right]$$

$$f^e = \left[\int_{\beta^e} f \cdot \psi_i d\beta, i = 1, 2, \dots, q^e \right]$$

$$F^e = \left[\int_{\beta^e} \Delta b \cdot \psi_i d\beta \quad \int_{\partial \beta^e} \Delta a \cdot \psi_i d\partial \beta; i = 1, 2, \dots, n^e \right]$$

La solución del problema (12), está caracterizado por:

$$K \Delta u - K_{\lambda u}^T \Delta \lambda - F = 0 \quad (14)$$

$$\Delta\lambda > 0 \quad (15)$$

$$K_{\lambda} \Delta\lambda - K_{\lambda u} \Delta u - \tilde{f} > 0 \quad (16)$$

$$[K_{\lambda} \Delta\lambda - K_{\lambda u} \Delta u - \tilde{f}] \cdot \Delta\lambda = 0 \quad (17)$$

El sistema de ecuaciones (14 - 17) puede resolverse de diferentes maneras. A continuación discutiremos algunos algoritmos que se mostraron eficientes en la resolución del problema.

Algoritmo 1

Como la matriz de rigidez (elástica) de la estructura, K , es positiva definida existe su inversa. Luego, la Ec. 14 permite colocar Δu en función de $\Delta\lambda$ (desde el punto de vista matemático lo anterior corresponde a realizar primero la minimización en Δu , que es una minimización sin restricciones):

$$\Delta u = K^{-1} (F + K_{\lambda u}^T \Delta\lambda) \quad (18)$$

Sustituyendo este resultado en las Ecs. 15 - 17, atribuimos a la caracterización de la solución $\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda > 0 \quad (19)$$

$$(K_{\lambda} - K_{\lambda u} K^{-1} K_{\lambda u}^T) \Delta\lambda - (\tilde{f} + K_{\lambda u} K^{-1} F) = P\Delta\lambda - \Gamma > 0 \quad (20)$$

$$[P\Delta\lambda - \Gamma] \cdot \Delta\lambda = 0 \quad (21)$$

o su equivalente:

$$\min \left[\frac{1}{2} P\Delta\lambda \cdot \Delta\lambda - \Gamma \cdot \Delta\lambda \right] \quad (22)$$

$$\Delta\lambda > 0$$

Es decir, $\Delta\lambda$ minimiza un funcional cuadrático con restricciones lineales (21) o, equivalentemente, es solución del problema de complementariedad lineal (18 - 20). Existen en la literatura gran variedad de algoritmos para resolución de este problema [7, 8]. Entre los llamados "métodos directos", es decir que alcanzan la solución en un número finito de operaciones, hemos adoptado el método de LEMKE [8]. Si bien este método tiene la ventaja mencionada de ser directo tenemos la dificultad de que la matriz P es en general una matriz llena, dificultando su implementación computacional cuando se desean resolver problemas de porte.

Algoritmo 2

Una forma de evitar la dificultad anterior es a través de técnicas iterativas para la resolución de (21), o su equivalente (18 - 20). Entre estos algoritmos podemos ci

tar por su simplicidad el método de Gauss-Seidel con proyección y relajación [7, 10], o métodos de Gradiente conjugado con proyección. Estos métodos no fueron usados por los autores en el caso de plasticidad, mas es interesante resaltar que fueron aplicados con suceso en problemas de contacto [11], matemáticamente equivalente al de plasticidad.

Algoritmo 3

Otra forma de evitar la dificultad señalada es, nuevamente, utilizar técnicas iterativas para la minimización en Δu definida en (12), y métodos directos para la minimización en $\Delta \lambda$ prevista en la (13).

Para la minimización de $F(\Delta u)$ se utilizaron técnicas tipo (Quasi-Newton. En particular fue implementado computacionalmente la forma vectorial del método BFGS[10]. La determinación del vector $\Delta \lambda = \Delta \lambda(\Delta u)$ que hace mínima la expresión definida en (12), se obtiene a través de su caracterización dada por (15 - 17). Recordando que la interpolación adoptada para el campo $\Delta \lambda$ es discontinua entre elementos, estas ecuaciones son equivalentes a:

Para $e = 1, 2, \dots$ número de elementos

$$\Delta \lambda^e > 0 \quad (23)$$

$$K_{\lambda}^e \Delta \lambda^e - K_{\lambda u}^e \Delta u^e - \tilde{f}^e > 0 \quad (24)$$

$$[K_{\lambda}^e \Delta \lambda^e - K_{\lambda u}^e \Delta u^e - \tilde{f}^e] \cdot \Delta \lambda^e = 0 \quad (25)$$

Luego, dentro de un procedimiento "elemento-por-elemento" se calcula $\Delta \lambda^e = \Delta \lambda^e(\Delta u^e)$ a través del método de LEMKE, es decir, estamos aplicando este procedimiento a un problema de orden $(q^e)^2$ mucho menor que el problema de orden $(\text{número de elementos} \times q^e)^2$ definido en (21).

Una de las ventajas de este algoritmo consiste en que problemas de porte pueden ser resueltos sin necesidad de recurrir a grandes computadoras. Ejemplos presentados en este trabajo fueron resueltos en una máquina tipo IBM-PC-XT, (640 MB, clock 8 MHz, coprocesador matemático y winchester de 20 MB).

Por último, en el Apéndice I presentamos los pasos computacionales que definen este algoritmo.

APLICACIONES NUMERICAS

Como ejemplo para mostrar la aplicabilidad del algoritmo propuesto, presentamos el caso de una viga empotrada en una de sus extremidades y sometida a una carga concentrada en la otra extremidad.

El criterio de plastificación adoptado es el de Mises, aproximado por 14 modos como indicado en [12] (figura 1).

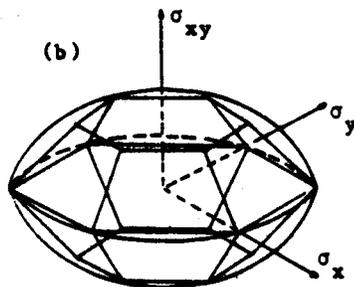


FIGURA 1. Linealización con 14 modos del criterio de Mises.

El elemento utilizado en este ejemplo es el triángulo de deformación constante, es decir, los campos de desplazamientos son interpolados linealmente dentro de cada elemento. Los multiplicadores plásticos asociados a los 14 modos son interpolados por funciones constantes en cada elemento siendo, por tanto, discontinuos entre elementos. (figura 2).

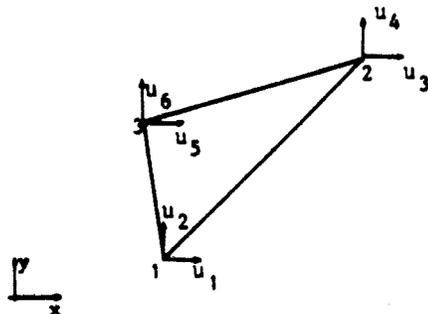


FIGURA 2. Triángulo de deformación constante con incrementos de deformaciones plásticas constantes en cada elemento.

Los resultados obtenidos para una malla de elementos finitos como la indicada en la figura 3 (compuesta de 228 triángulos con un total de 196 grados de libertad en desplazamientos y 3192 multiplicadores plásticos) son presentados en las figuras 4 y 5. En la primera figura se comparan las curvas "carga-desplazamiento del extremo cargado" teórica y aproximada. En la Figura 5 se muestra la evolución de

la plastificación para niveles crecientes de carga comparandose con la solución teórica.

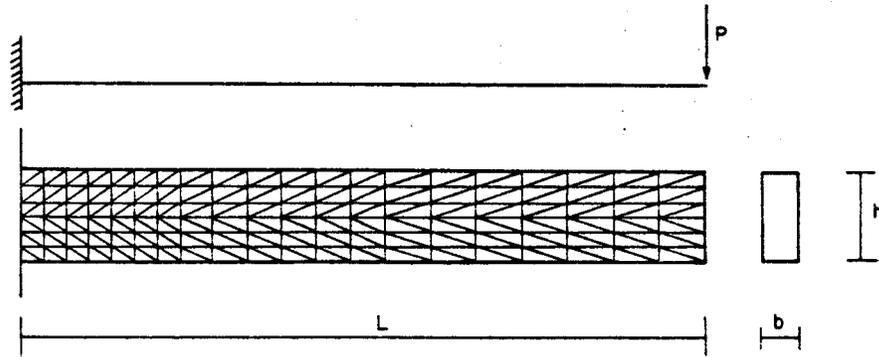


FIGURA 3. Malla de elementos finitos utilizada. (196 grados de libertad en desplazamientos y 3192 multiplicadores plásticos).

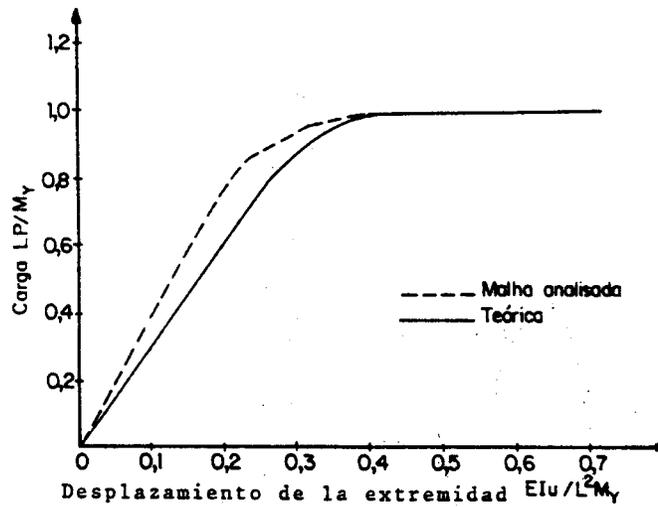


FIGURA 4. Curva carga-desplazamiento extremidad cargada.

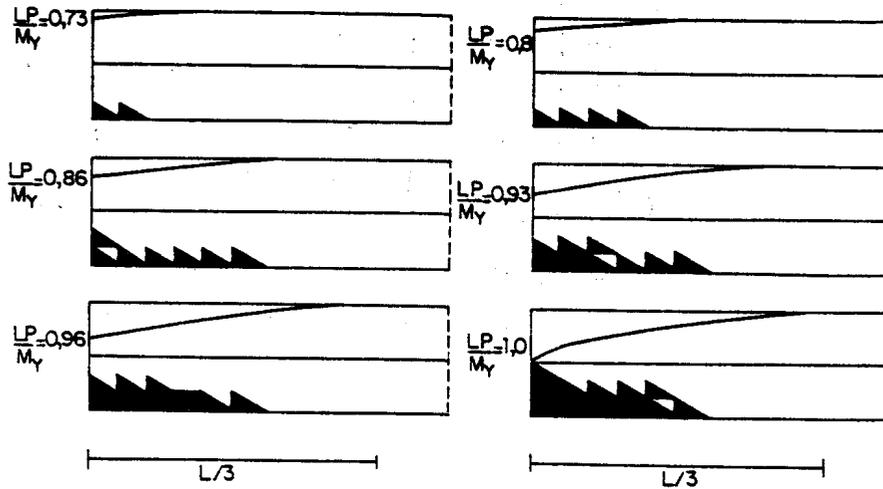


FIGURA 5. Evolución de la región plastificada para diferentes niveles de carga.

Para la solución del sistema no lineal de ecuaciones fueron implementados el procedimiento Quasi-Newton derivado de la forma vectorial del método BFGS, con procura lineal por el método secante, y el procedimiento propuesto por Crisfield [13]. En la Tabla 1 presentamos una comparación entre ambos procedimientos.

Por último es interesante observar que si bien este tipo de elemento exige una discretización muy refinada para representar adecuadamente la fase elástica, su comportamiento en la fase plástica resulta bastante aceptable aun para mallas pobres.

Tabla I - Resultados comparativos para la viga empotrada

nivel de carga LP/H _y	Quasi - Newton (BFGS)								Algoritmo referencia [3]
	Tolerancia (critério de convergência) en la búsqueda lineal								
	0,8		0,1		0,01				número de iteraciones en u x número de evaluaciones del residuo
	número de iteraciones en u	número de evaluaciones del residuo	número de iteraciones en u	número de evaluaciones del residuo	número de iteraciones en u	número de evaluaciones del residuo	número de iteraciones en u	número de evaluaciones del residuo	número de iteraciones en u x número de evaluaciones del residuo
0,67	1	2	1	2	1	2	1	2	1
0,73	7	8	5	9	4	9	4	11	6
0,8	14	15	9	18	9	20	9	23	18
0,86	18	20	13	29	12	28	12	28	20
0,93	52	271	16	33	16	38	16	42	24
1,00	*	294	26	59	26	59	26	85	**

* No convergió en 61 iteraciones

* No convergió en 151 iteraciones

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Maier; "Piecewise linearization of yield criteria in structural plasticity", A.M. Archives, vol. 1, nº 213, 1976, p. 239 - 281.
- [2] N. Zouain, R.A. Feijóo; "On kinematical minimum principles for rates and increments in plasticity, "Meccanica, nº 21, 1986, p. 23 - 29.
- [3] R.A. Feijóo; N. Zouain; "Variational formulations for rates and increments in plasticity", Computational Plasticity, Models, Software and Applications (Ed. D.R.J. Owen, E. Hinton, E. Oñate), Pineridge Press, 1987, Part 1, p. 33 - 57.
- [4] R.A. Feijóo, N. Zouain; "Formulation in rates and increments for elastic-plastic analysis", vol. 26, nº 9, pp. 2031 - 2048, 1988, Int. J. Num. Meth. Engng.
- [5] R.A. Feijóo, N. Zouain; "Variational formulations of elastic-plastic constitutive relations in generalized variables", a ser publicado.
- [6] R.A. Feijóo; "Formulación y resolución via programación matemática del problema de contacto elasto plástico con fricción", IX Cong. Bras. de Eng. Mecánica, Florianópolis, Brasil, 1987, p. 15 - p. 26.
- [7] J. Cea; "Optimizacion. Théorie et Algorithmes", Dunod, Paris, 1971.
- [8] M. Bazaraa, C. Shetty; "Nonlinear Programming, Theory and Applications, "John Wiley, 1979.
- [9] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trémolières; "Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles", Dunod, Paris, 1976.
- [10] D.G. Luenberger; "Linear and Nonlinear Programming, Addison Wiley Pub., 1984.
- [11] H.J.C. Barbosa; "Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade", Tesis para la obtención del grado de D. Sc., Prog. de Eng. Civil, COPPE-UFRJ, 1986.
- [12] M.B. Hecke; N. Zouain; "Formulações Cinemáticas de Equilíbrio e Mistas para Elasto Plasticidade em Tensões Planas", vol. X nº 3, 1988 "Revista da Associação Brasileira de Ciências Mecânicas".
- [13] M.A. Crisfield; "Solution Procedures for Non-Linear Structural Problems"; in Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics; Eds. C. Taylor, E. Hinton e D.R.J., Owen; pp. 1 - 39, Pineridge, Swansea, 1982.

Apêndice - Procedimiento de solución del sistema no-lineal.

El sistema de ecuaciones resultante de (12) es

$$\psi(u) = 0$$

donde

$$\psi(u) = \Delta F(u) = Ku - K_{u\lambda} \bar{\lambda} - F$$

con $\bar{\lambda}$ dado por (22 - 24).

Para su resolución se utiliza el método Quasi-Newton

$$u = u + d$$

$$d = s \delta$$

$$\delta = H \psi(u)$$

donde s es calculado por una búsqueda lineal y H actualizada por la fórmula BFGS en su forma producto:

$$\bar{H} = (1 + w \otimes v) H (1 + v \otimes w)$$

con

$$w = \frac{d}{\gamma \cdot d}$$

$$v = \left(- \frac{s \gamma \cdot d}{\psi \cdot d} \right)^{1/2} \psi$$

$$\gamma = \psi(u) - \psi(u)$$

A continuación se muestra el procedimiento en una descripción paso a paso

1. Inicializa

1.1 $u = u^0 \quad H^0 = K^{-1}$

1.2 $\psi = \psi(u)$

1.3 si $\|\psi\| < \epsilon$ terminar

1.4 $\delta = -H\psi$

2. Calcular nueva aproximación

2.1 Búsqueda lineal: encontrar s tal que:

$$|\delta \cdot \psi(u + s\delta)| < \epsilon_L |\delta \cdot \psi(u)|$$

2.2 $d = s\delta$

2.3 $\bar{u} = u + d$

2.4 $\psi = \psi(u + d)$

3. Verificar convergencia

si $\|\bar{\Psi}\| \leq \epsilon$ terminar

4. Calcular nuevos vectores v y w .

4.1 $\gamma.d = \bar{\Psi}.d - \psi.d$

4.2 $w = d / \gamma.d$

4.3 $v = (1 + \sqrt{-s \gamma.d / \psi.d}) \psi - \bar{\Psi}$

4.4 Almacenar en memoria secundaria

$$v \rightarrow v^i \quad w \rightarrow w^i$$

5. Calcular la nueva direccion de búsqueda $\bar{\delta} = \bar{H} \bar{\Psi}$ mediante los siguientes pasos

5.1 $\bar{\delta} = \bar{\Psi}$

5.2 Para $j = i, (i - 1), \dots, 1, 0$ repetir

$$\bar{\delta} = \bar{\delta} + (w^j \cdot \bar{\delta}) v^j$$

5.3 $\bar{\delta} = -\bar{H}^0 \bar{\delta}$

5.4 Para $j = 0, 1, \dots, (i - 1), i$ repetir

$$\bar{\delta} = \bar{\delta} + (v^j \cdot \bar{\delta}) w^j$$

6. Actualizar $u = \bar{u} \quad \delta = \bar{\delta} \quad \psi = \bar{\Psi}$ y retornar al paso 2.