

ELEMENTO PARA CODOS Y CAÑERIAS, ANALISIS  
DE EFECTOS DE INTERACCION

Carmelo Militello  
Alfredo E. Huespe  
INGAR - Instituto de Desarrollo y Diseño  
CONICET - FUNDACION ARCIEN  
Avellaneda 3657 - (3000) Santa Fe - Argentina

RESUMEN

Se presenta un elemento para análisis de tensiones y efectos de interacción en cañerías. El elemento puede verse como una mejora del propuesto por BATHE y ALMEIDA [1].

La continuidad interelemental para la superficie del codo es asegurada por la utilización de interpolación Hermítica para el modelo de ovalización.

La inclusión de alabeo para la sección recta del codo incrementa la capacidad del elemento. Las principales características del elemento de viga C\* se conservan; el fácil manejo de las condiciones de contorno, y la satisfacción del criterio de modo de cuerpo rígido.

ABSTRACT

A new element for piping stress analysis is presented. The element can handle interaction effects and could be seen as an enhancement of the element from BATHE and ALMEIDA [1].

The necessary interelement continuity for the elbow skin is assured through Hermitian interpolation of the ovalization pattern in the axial direction. The inclusion of warping for the elbow cross-section increments the element capability. The main characteristics of the C\* elbow element, the easy handle of boundary condition, are retained.

## INTRODUCCION

BATHE y ALMEIDA [1-2] presentaron en una serie de trabajos, un elemento finito para modelar el comportamiento de codos sometidos a diversos tipos de esfuerzos. Este es fundamentalmente un elemento  $C^0$  de viga, al cual se le ha incorporado el efecto de ovalización. Para lograr la continuidad  $C^1$  necesaria del desplazamiento de ovalización, utilizan matrices de penalidad. El modelo también asume que las secciones rectas del codo normales al eje neutro permanecen planas luego de la deformación.

Previamente ONTSUBO y WATANABE [5] presentaron otro elemento que utiliza polinomios de Hermite para efectuar la interpolación longitudinal de los desplazamientos de la cáscara. Con ello logran la continuidad  $C^1$  del desplazamiento de ovalización, pero al costo de no satisfacer el criterio de modo de cuerpo rígido para el elemento.

En este trabajo, proponemos un elemento que conserva las principales características de los dos citados, sin necesidad de recurrir a matrices de penalidad, y satisfaciendo el criterio de modo de cuerpo rígido.

## CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Para describir el campo de desplazamiento de la cáscara, adoptamos uno tal que resulte de la adición de dos campos  $\underline{u}^b$  y  $\underline{u}^*$ .

El primero  $\underline{u}^b$ , resulta de suponer que el codo se comporta como una viga. Para ello se hace uso de un elemento de viga  $C^0$ , con 4 nodos y 6 grados de libertad por cada uno de ellos (3 desplazamientos  $u_x, v_y, w_z$ , y 3 giros  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ ), de ahora llamados g.d.l.v.; de los que se pueden computar las deformaciones en el sistema  $(\eta, \epsilon, \xi)$ . Este procedimiento está claramente expuesto en [1], ver figura 1.

El campo  $\underline{u}^*$  agregado al  $\underline{u}^b$ , corresponde a los desplazamientos de la cáscara por la ovalización, componentes  $v$  y  $w$ , y por el alabeo de las secciones rectas, componente  $u$ . Las componentes del vector  $\underline{u}^*$  están asociadas al sistema coordenado  $(\eta, \epsilon, \xi)$ .

Las interpolaciones propuestas para  $u$  y  $v$  son:

$$u(r, \phi) = \sum_{k=1}^4 \left( \sum_{m=2}^{N_p} p_m^k L_k(r) \sin m\phi + \sum_{m=2}^{N_q} q_m^k L_k(r) \cos m\phi \right) \quad (1)$$

$$V(r, \phi) = \sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{m=1}^{N_k} (c_m^k H_k(r) + a_m^k h_k(r)) \sin 2m\phi + \sum_{m=1}^{N_d} (d_m^k H_k(r) + f_m^k h_k(r) \cos 2m\phi) \right] \quad (2)$$

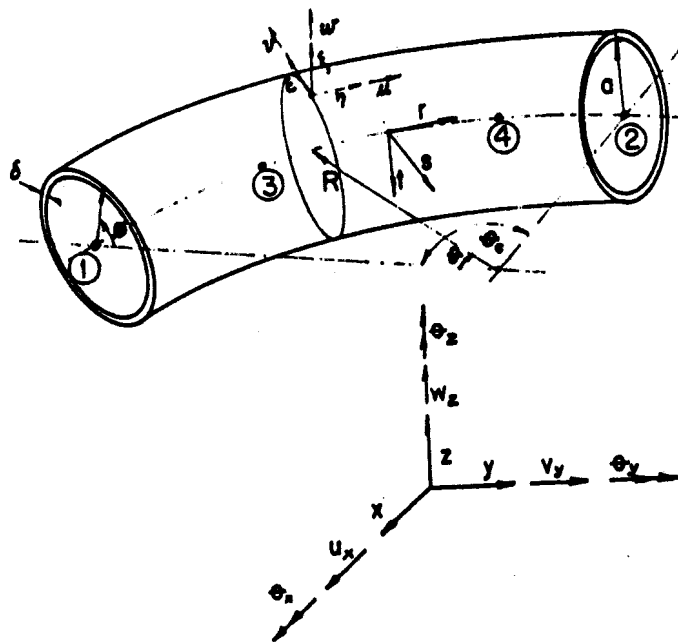


FIGURA 1 - Modelo del elemento de codo

Adoptando la suposición que la superficie media de la cáscara no sufre deformación circunferencial, se obtiene:

$$w = - \frac{\partial v}{\partial \phi} \quad (3)$$

$c_m^k$  y  $d_m^k$  son los grados de libertad de los modos de ovalización,  $u_m^k$  y  $l_m^k$  son los grados de libertad de sus derivadas en la dirección  $r$  respectivamente en ambos extremos del elemento. Aquí  $0 \leq r \leq R$  donde  $R$  es la longitud del eje del codo.  $H_1, H_2, h_1$  y  $h_2$  son las

funciones cardinales de hermite (polinomios de tercer grado).  $p_m^k$  y  $q_m^k$  son los grados de libertad del desplazamiento de alabeo propuesto, y  $L_k$  son los polinomios de Lagrange cúbicos.

Se debe notar que la expansión en series de Fourier en el sentido circunferencial para  $u$ , carece de la primera armónica ya que este desplazamiento se activa en el modelo de viga.

Asimismo en el desplazamiento  $v$  propuesto, y siguiendo los trabajos de BATHE y ALMEIDA [1-2], sólo figuran las armónicas pares de la serie de Fourier. Según lo apuntado por OHTSUBO y WATANABE [5] esta expansión no puede copiar las tensiones de corte.

La relación tensión-deformación completa, puede así ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} \\ \epsilon_{\eta\theta} \\ \epsilon_{\theta\eta} \\ \epsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}} \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}^b & | & \underline{\underline{B}}^{ov} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}^b \\ \dots \\ \underline{u}^{ov} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\underline{\underline{B}}^b$  se puede evaluar siguiendo el trabajo de BATHE y ALMEIDA [1], mientras que  $\underline{\underline{B}}^{ov}$  se obtiene de los desplazamientos  $\underline{u}^{ov}$  propuestos, utilizando las ecuaciones de cáscaras dobladas particularizadas a superficies toroidales. Siguiendo las ecuaciones del libro de WASHIZU [4] con  $(\delta/a \ll 1)$  se obtiene:

$$\epsilon_{\eta\eta} = \bar{\epsilon}_{\eta} - \xi \chi_{\eta} \quad (5)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \bar{\epsilon}_{\theta} - \xi \chi_{\theta} \quad (6)$$

$$\gamma_{\theta\eta} = \bar{\gamma}_{\theta\eta} - \xi \chi_{\theta\eta} \quad (7)$$

$$\bar{\epsilon}_{\eta} = \frac{1}{(R-a \cos \phi)} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \sin \phi - w \cos \phi \right) \quad (8)$$

$$\chi_{\eta} = \frac{1}{(R-a \cos \phi)^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \phi \right) + \frac{\sin \phi}{(R-a \cos \phi) a} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} - v \right) \quad (9)$$

$$\bar{\epsilon}_{\theta} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) = 0. \quad (10)$$

$$\chi_{\theta} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \quad (11)$$

$$\bar{r}_{\epsilon\gamma} = \frac{1}{R - a \cos \phi} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - u \sin \phi \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\epsilon\gamma} = & \frac{2}{(R - a \cos \phi) a} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \cos \phi - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{2 \sin \phi}{(R - a \cos \phi)^2} \left( -u \cos \phi - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

Se debe tener en cuenta que  $\alpha(\gamma)/\partial \theta = (1/R, \alpha(\gamma))/\partial r$

#### CONDICION DE CONTINUIDAD PARA LAS FUNCIONES DE OVALIZACION

En la intersección de 2 elementos de codo, figura 2, el desplazamiento de ovalización es continuo, a causa de que los mismos grados de libertad de ovalización pertenecen a ambos elementos.

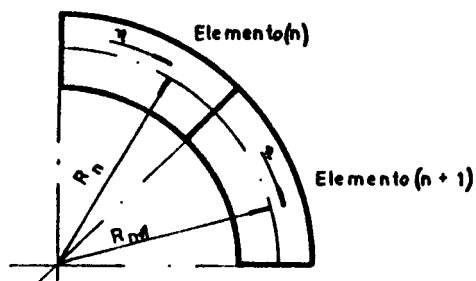


Figura 2 - Unión de elementos

La otra condición que debe ser satisfecha es:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right|_n = \left. \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right|_{n+1} \quad (14)$$

pero de la figura 1 resulta:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial \gamma} = \frac{R}{R - a \cos \phi} \frac{\partial(\ )}{\partial r}$$

luego, en la unión de 2 elementos la condición (14) se verificará si:

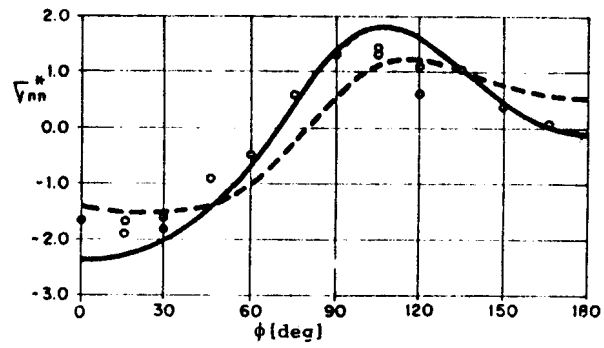


Figura 4-a - Caso 1, Sección C, factor de tensiones longitudinal

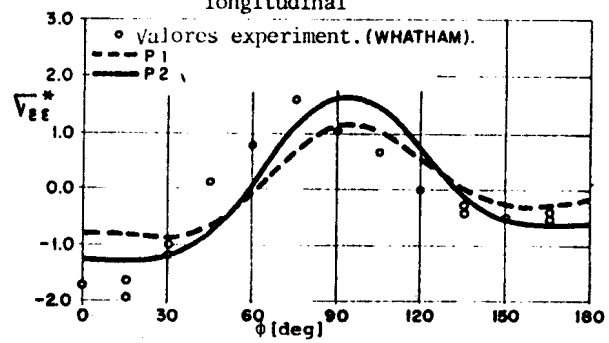
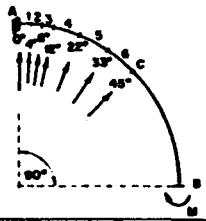
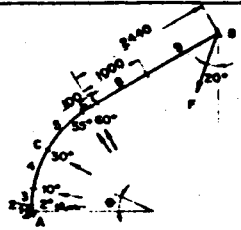
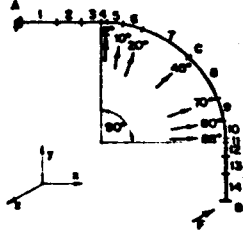


Figura 4-b - Sección C, factor de tensiones Circunferencial

Figura 3 - Datos para los problemas propuestos.

	CASE 1	CASE 2	CASE 3
			
<b>GEOMETRICAL DATA</b>	$R = 375.$ $t = 12.5$ $Z_0 = 275.$ $\lambda = 0.248$	$R = 1066.8$ $t = 21.$ $Z_0 = 711.2$ $\lambda = 0.188$	$R = 1066.8$ $t = 11.2$ $Z_0 = 711.2$ $\lambda = 0.097$
<b>MATERIAL DATA</b>	$\nu = 0.28$ $E = 20.000$	$\nu = 0.3$ $E = 21700.$	$\nu = 0.3$ $E = 19900.$
<b>END EFFECTS</b>	Flanges at "A" and "B". Clamped at "A". Moment $M_2$ at "B". (IN-PLANE BENDING).	Flanges at "A" and "B". Clamped at "A". Force 6000 kg. at "B". (IN-PLANE BENDING)	Flanges at "A" and "B". Clamped at "A". Force $F = 1000$ kg. at "B". (OUT-OF-PLANE BENDING)
<b>ELEMENTS</b>	6 in $45^\circ$	6 in Elbow. 3 in Straight Tube	8 in Elbow. 3 in Straight Tubes.

$$\frac{R_n}{R_n - a \cos \phi} \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_n = \frac{R_{n+1}}{R_{n+1} - a \cos \phi} \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{n+1} \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que los desplazamientos propuestos automáticamente satisfacen  $(\partial w / \partial r)|_n = (\partial w / \partial r)|_{n+1}$ , para el caso común de elementos con el mismo radio de codo, la condición de continuidad (14) se verifica en todos los puntos de la sección. Cuando se unen 2 elementos de radio de codo diferentes, dicha condición no se verifica en todos los puntos de la sección. Este error introducido en el modelado, no puede ser disminuido utilizando matrices de penalidad.

#### EFFECTO DE LA DISTORSION DE LA SECCION RECTA DEL CODO

La importancia del alabeo de la sección recta del codo ya fué analizada por OHTSUBO Y WATANABE [5].

Para mostrar este efecto, nosotros analizamos 2 problemas. Un codo sujeto a momento fuera del plano, y otro sujeto a momento en el plano, caso 3 y caso 1 de la figura 3. Los valores experimentales se tomaron de WHATHAM [6] (caso 1) e IMAMASA y URAGAMI [7] (casos 2 y 3). Denominamos P1 la formulación del elemento sin el desplazamiento u, y P2 a la formulación completa del elemento.

Las figuras 4(a-b) y 5(a-b) muestran la mejora de los resultados numéricos obtenidos con la formulación P2 respecto a la P1. Como era de esperar, el efecto de distorsión para el caso fuera del plano es más significativo que para el caso 1.

#### EFFECTOS EXTREMOS

El caso 2 fué propuesto para analizar la conducta del elemento cuando el codo estaba sujeto a fuertes efectos extremos. El problema consiste de un codo de 60 grados con un extremo unido a un caño recto, y el otro a una brida empotrada, sometido a un esfuerzo de flexión en el plano.

En el trabajo experimental los autores no establecieron la posición exacta de los strain-gage para la sección A. Para efectuar el análisis, se modeló el codo con 12 elementos. Esta discretización es necesario para obtener una continuidad aceptable de las tensiones en la región cercana a la brida. En la figura 6(a-b) se presentan los resultados obtenidos en la unión del codo con la brida ( $\phi = 0$ . grado) y en la sección correspondiente a  $\phi = 2$ . grados (aproximadamente a 30 mm de la unión con la brida). La respuesta computada en esa región del codo, exhibe una variación muy grande en las tensiones. La correspondencia entre los valores experimentales y los computados para tensiones longitudinales, es buena, pero no tanto para las tensiones circunferenciales



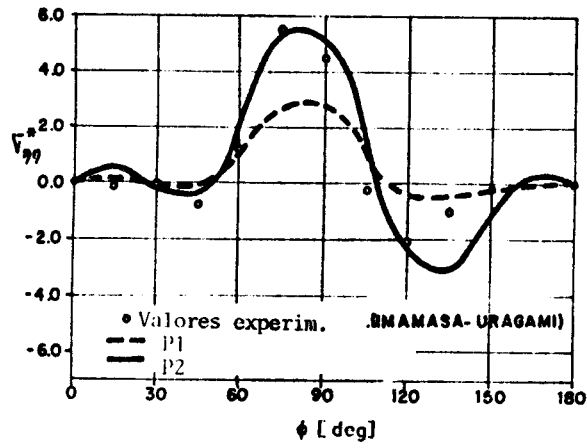


Figura 5a - Caso 3, factor de tensiones longitudinal  
Sección C

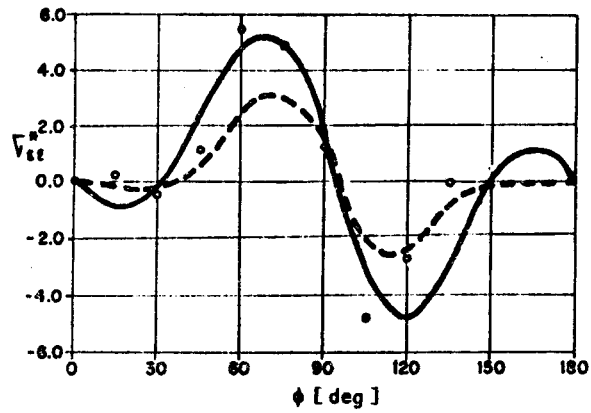


Figura 5-b - Factor de tensiones circunferencial  
Sección C

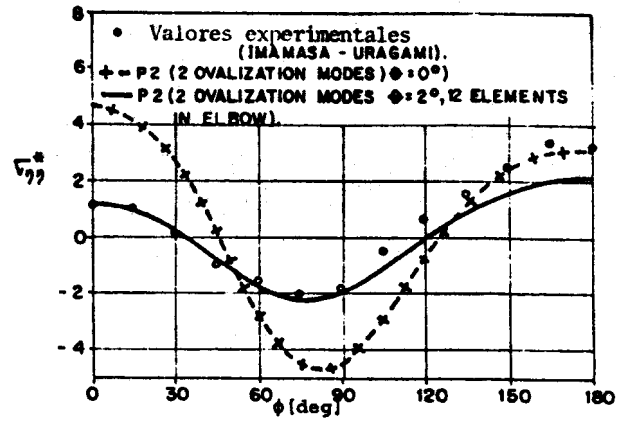


Figura 6-a - Caso 2, factor de tensiones longitudinal.  
(cerca de la brida)

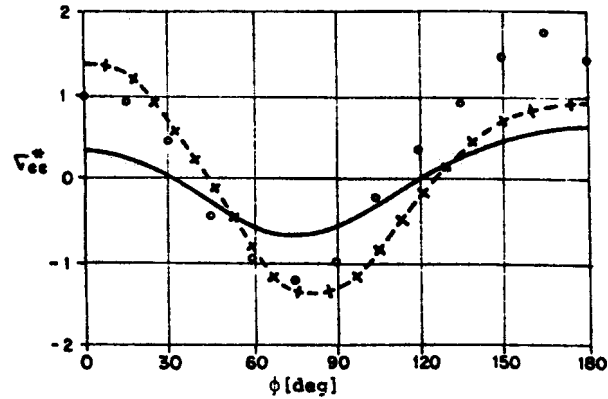


Figura 6-b - Caso 2, factor de tensiones circunferencial.  
(cerca de la brida)

En la figura 7(a-u), se pueden ver los resultados obtenidos para la sección C ( $\phi = 30$  grados). Estos pueden ser computados usando 6 ó 12 elementos en el codo indistintamente. Esto es debido a que existe una variación más lisa del campo de tensiones. Se presentan también los resultados con el modelado P1 y el P2 para observar el efecto que produce el alabeo en este caso.

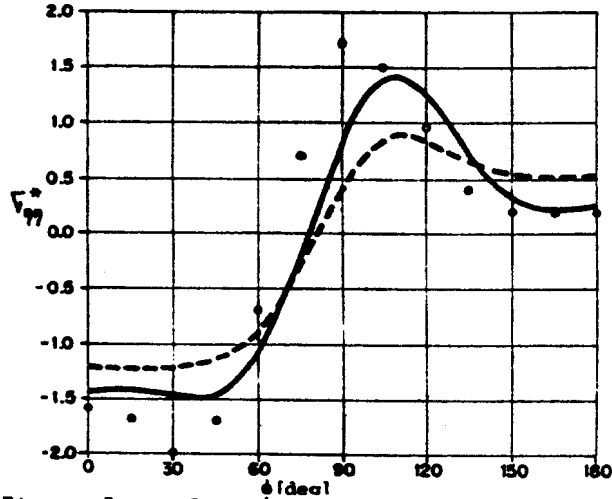


Figura 7-a - Sección C, factor de tensiones longitudinales.

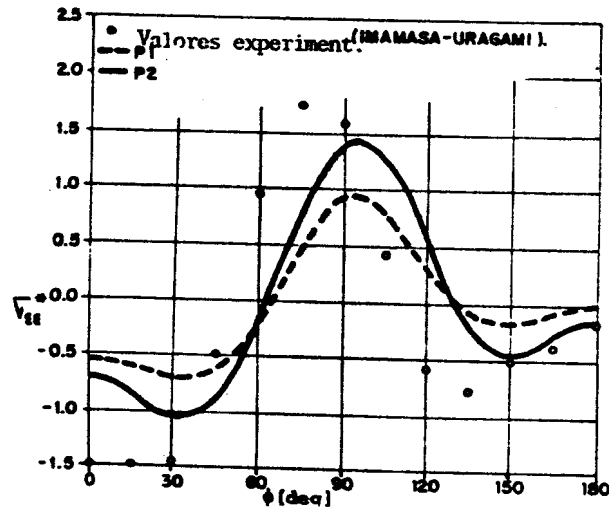


Figura 7-b - Sección C, factor de tensiones circunferenciales.

Finalmente se puede ver en la figura 8, el factor de tensiones longitudinales medido a lo largo del codo y a (extrados), que se comparan muy bien con los valores computados.

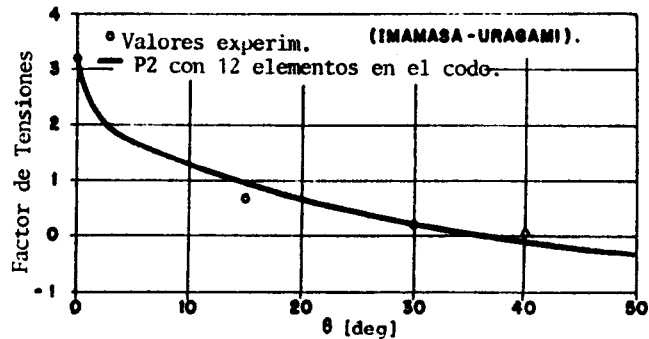


Figura 8 - Distribución de tensiones longitudinales a lo largo del eje del codo ( $\phi = 180^\circ$ )

#### CONCLUSIONES

Después de agregar el desplazamiento de alabeo  $u$ , la presente formulación puede ser vista, como una intermedia entre las presentadas por BATHE y ALMEIDA [1] y OHTSUBO y WATANABE [5].

Este elemento retiene la simplicidad del elemento de viga  $C^0$ , para imponer condiciones de contorno y ser unido a otros tipos de elementos finitos basados en desplazamientos, y además satisfaciendo el criterio de modo de cuerpo rígido.

No son necesarias matrices de penalidad para conseguir la continuidad  $C^1$  de los desplazamientos de ovalización debido a la interpolación Hermítica en el sentido longitudinal.

Este elemento no puede copiar las tensiones de corte, y para ello se debería interpolar los desplazamientos de ovalización en el sentido circunferencial, según la expansión propuesta por OHTSUBO y WATANABE [5].

Con las expresiones presentes para  $u$  y  $v$ , tomando  $N_p=N_q=4$  y  $N_c=N_d=3$  resulta un elemento con 72 grados de libertad.

REFERENCES

- [1] Bathe K.J. and Almeida C.A., "A simple and effective pipe elbow element. Linear analysis", J. of Appl. Mech. Vol. 47, 93-100, 1980.
- [2] Bathe K.J. and Almeida C.A., "A simple and effective pipe elbow element. Interaction effects", J. of Appl. Mech., Vol 49, 165-173, 1982.
- [3] Bathe K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis". Prentice-Hall, Inc., 1982.
- [4] Washizu K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity". First Edition. Pergamon Press, 1968.
- [5] Ohtsubo H. y Watanabe O., "Stress analysis of pipe bends by ring elements", J. of Press. Vess. Tech. Vol 100, 112-122, 1978.
- [6] Whatham J.F., "In-plane bending of flanged elbows", Proc. Metal. Struc. Conf., The Instit. of Eng., Australia, Perth, 1978.
- [7] Imamasa J. y Uragami K., "Experimental Study of flexibility factors and stresses of welding elbows with end effects", 2nd Int. Conf. on Press. Vess. Tech., San Antonio, Texas, October 1973.