

ANALISIS DE LA EXTRUSION DE METALES
MEDIANTE UN MODELO VISCOSO

Horacio J. Antúnez
Sergio R. Idelsohn
Grupo de Mecánica Computacional
INTEC (CONICET-UNL)
Santa Fe - Argentina

RESUMEN

Se desarrolla un modelo para tratar problemas de extrusión considerando al material que se extruye como un fluido viscoso no Newtoniano. El modelo incluye un artificio para simular la fricción contra las superficies de trabajo.

ABSTRACT

A model to deal with extrusion processes, where the material being extruded is taken as a viscous non-Newtonian fluid, is developed. The model includes a device to handle boundary friction.

1. INTRODUCCION

En los procesos de conformación plástica de los metales tienen lugar grandes deformaciones, de manera que la formulación del equilibrio que se adopte debe ser capaz de reproducir esta situación.

Considerando los distintos procesos, es posible agruparlos en procesos discontinuos, como la forja y el embutido, donde se requiere conocer el valor del desplazamiento para cada punto del material en cada paso de la deformación, y procesos continuos o cuasi-continuos, donde se caracteriza el proceso, al menos durante una gran parte de él, mediante un campo de velocidades. Es el caso de la laminación o de la extrusión.

En el primer caso se utiliza la formulación de Lagrange, ya sea total o actualizada para plantear el equilibrio, mientras que en el segundo se aplica la formulación de Euler. Esto es así por ser cada una más sencilla de aplicar en el respectivo problema, pero cualquier formulación puede resolver el otro caso, mediante una derivación o integración con respecto al tiempo, según corresponda.

En este trabajo, que se basa en uno de Zienkiewicz y otros [1] se aplica la formulación de Euler, para resolver problemas de extrusión.

En primer lugar se desarrollará el tratamiento del metal en estado plástico como un fluido viscoso no newtoniano, obteniendo la expresión de la viscosidad en términos de las velocidades de deformación. Por ser grandes las deformaciones se desprecian las elásticas frente a las plásticas. Al hacer el desarrollo del problema de mecánica de fluidos se desprecian términos dinámicos, por tratarse de un movimiento muy lento (solución de Stokes, que equivale a suponer densidad nula, en las ecuaciones de Navier-Stokes). También se considera estado estacionario y flujo isotérmico. Luego se tratan las condiciones de contorno, con un modelo para incluir la fricción, y finalmente se muestran algunos ejemplos, confrontados con otros resultados de la literatura.

2. ANALOGIA METAL EN ESTADO PLASTICO-FLUIDO

A partir de la relación constitutiva para materiales viscoplásticos, dada por Perzyna [2]

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

donde

$$F = F(\sigma_{ij}, T, \epsilon_{ij}) \quad (2)$$

define una superficie de fluencia, y

$$Q = Q(\sigma_{ij}, T, \epsilon_{ij}) \quad (3)$$

un potencial plástico.

Además es

$$\begin{aligned} \langle \phi(F) \rangle &= \phi(F) & \text{si } F \geq 0 \\ \langle \phi(F) \rangle &= 0 & \text{si } F < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

En el caso general (flujo no asociado), F y Q son funciones distintas, pero en la gran mayoría de los casos, el flujo es asociado y esas dos funciones son coincidentes y, en el caso del flujo de von Mises, también muy general, dependen del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2 :

$$Q = F = \sqrt{3} \sqrt{J_2} - \sigma_y \quad (5)$$

siendo

$$\sqrt{J_2} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (6)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p \quad (7)$$

y la tensión de fluencia:

$$\sigma_y = f(\bar{\epsilon}, T, \sigma_m) \quad (8)$$

La dependencia de la tensión de fluencia respecto de la tensión media σ_m es despreciable en la mayoría de los casos, pero en este caso será útil para considerar la fricción, como luego se verá.

En estas condiciones, la relación constitutiva queda

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma \langle \phi(\sqrt{3} \sqrt{J_2} - \sigma_y) \rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} S_{ij} \quad (9)$$

que, comparada con la de un fluido viscoso,

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} S_{ij} \quad (10)$$

permite hallar la expresión de la viscosidad que tendrá el material

$$\frac{1}{2\mu} = \gamma \langle \phi(\sqrt{3} \sqrt{J_2} - \sigma_y) \rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \quad (11)$$

Elevando (10) al cuadrado y sumando para los i, j

$$J_2 = \mu^2 \frac{\dot{\epsilon}^2}{2} \quad (12)$$

donde

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (13)$$

es la velocidad de deformación efectiva.

Interesa expresar la viscosidad en términos de las deformaciones. Para ello, reemplazando (12) en (11) y adoptando para la función ϕ una ley potencial (que es suficientemente general)

$$\phi(F) = F^n \quad (14)$$

se llega a la expresión deseada para la viscosidad:

$$\mu = \frac{\sigma_y + \left[\frac{\dot{\epsilon}}{\sqrt{3}} (\gamma \sqrt{3}) \right]^{1/n}}{\sqrt{3} \frac{\dot{\epsilon}}{2}} \quad (15)$$

Como casos particulares están contenidos el material plástico ideal, haciendo $\gamma \rightarrow \infty$, y la fluencia viscosa (creep) colocando $\sigma_y = 0$.

La dependencia de la viscosidad con la velocidad de deformación efectiva, así como su comparación con el fluido Newtoniano están indicadas en la Figura 1.

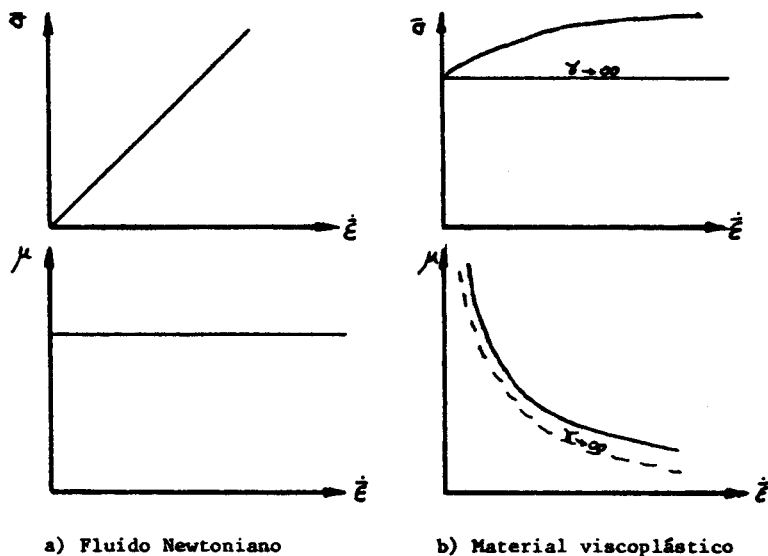


Fig. 1. Relaciones entre la tensión ($\bar{\sigma}$), la viscosidad (μ) y la velocidad de deformación ($\dot{\bar{\epsilon}}$)

Como para valores de $\dot{\bar{\epsilon}}$ muy pequeños la viscosidad tiende a infinito deberá adoptarse un valor límite que corresponderá al desplazamiento como cuerpo rígido.

3. FORMULACION DEL PROBLEMA DE MECANICA DE FLUIDOS

Para obtener las expresiones a discretizar, se parte del principio de los trabajos virtuales:

$$\int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i X_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma = 0 \quad (16)$$

donde el 1º término corresponde a las fuerzas internas, el segundo a las externas por unidad de masa y el tercero a las ejercidas a través de la superficie Γ_t , que es la porción del contorno donde estas fuerzas están especificadas.

Incluyendo la condición de incompresibilidad

$$\dot{\bar{\epsilon}}_v = \dot{\bar{\epsilon}}_{ii} = 0 \quad (17)$$

y la relación constitutiva (10), queda el sistema a discretizar:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} p d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i x_i d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta p \dot{\epsilon}_{ii} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (18)$$

La segunda ecuación de las (18) indica que el trabajo es nulo para cualquier variación de presión, y aquí queda dicha presión actuando como multiplicador de Lagrange.

Para la discretización se utiliza un elemento de 9 nodos para las velocidades y 4 para la presión, isoparamétrico.

Cuando de (18) se desprecian los términos dinámicos queda la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_o(\mu) & \underline{K}_{\sim p} \\ \underline{K}_{\sim p}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde la viscosidad μ aparece como factor común en todos los términos de la matriz \underline{K}_o , y es lo que introduce la no linealidad al problema.

A la fecha de esta presentación el sistema se resuelve por iteraciones sucesivas calculando, dentro de cada iteración la viscosidad para cada punto de Gauss, a partir de la solución anterior y con ella se construye la nueva matriz de rigidez que sirve para hallar la nueva solución. Con este esquema la convergencia es lenta y por eso está en desarrollo un esquema de solución por Newton Raphson. Tiene la particularidad de que, por ser la viscosidad un factor común de toda la matriz \underline{K}_o , siendo el resto de los términos sólo factores geométricos

$$\underline{K}_o = \mu \underline{K}_g \quad (20)$$

para calcular la matriz tangente sólo hay que hallar la derivada de la viscosidad respecto de cada uno de los grados de libertad:

$$\underline{R}^{(n)}(q) = \begin{bmatrix} \underline{K}_{\sim o}^{(n)}(q) & \underline{K}_{\sim p} \\ \underline{K}_{\sim p}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\omega}^{(n)} \\ \underline{p}^{(n)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{g} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\underline{K}_T^{(n)} = - \left(\frac{\partial \underline{R}}{\partial q} \right)^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{R}}{\partial \omega} & \frac{\partial \underline{R}}{\partial p} \end{bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{K}_{\sim o}}{\partial \omega} \underline{\omega} + \underline{K}_o \frac{\partial \underline{K}_{\sim o}}{\partial p} + \underline{K}_p \end{bmatrix}^{(n)} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \underline{K}_{\sim o}}{\partial q} = \frac{\partial \mu}{\partial q} \cdot \underline{K}_g \quad (23)$$

4. CONDICIONES DE CONTORNO

Se fijan las velocidades en el contorno y la presión al menos en un punto. De esta manera es posible modelar el caso de deslizamiento puro (sin fricción) y el caso sin deslizamiento. Para tener en cuenta la

fricción entre el material y las superficies de trabajo se dispone una hilera delgada de elementos (Fig. 2) cuyos bordes exteriores están fijados en sus dos velocidades, y cuya tensión de fluencia es variable con la tensión media o sea con la presión en cada punto:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_y &= \alpha p = -\alpha \sigma_m & 0 \leq \alpha p < \sigma_y \\ \sigma'_y &= \sigma_y & \sigma_y < \alpha p \\ \sigma'_y &= 0 & p < 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

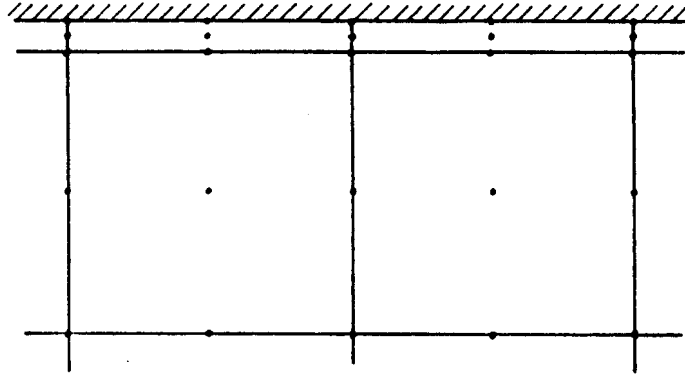
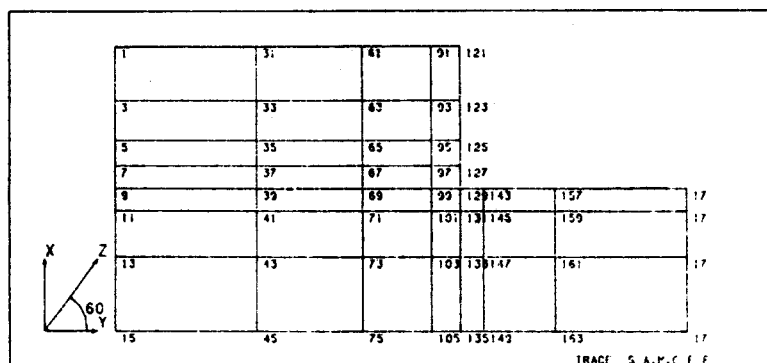


Fig. 2: Elementos de fricción

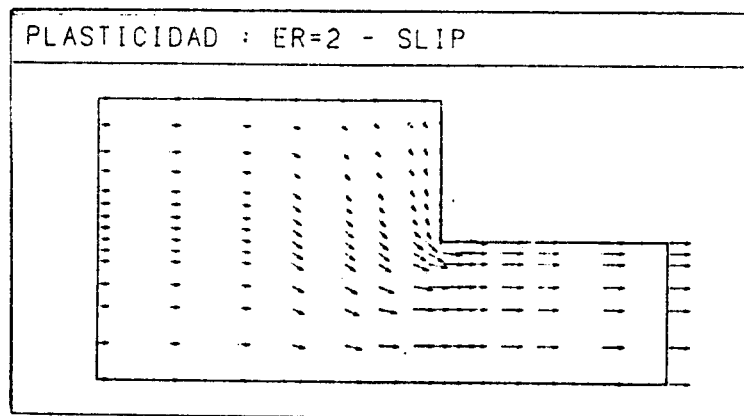
5. RESULTADOS

Para evaluar el funcionamiento del modelo se reprodujeron ejemplos recogidos en las referencias [1] y [3], que a su vez están confrontados con la teoría de la línea de deslizamiento (slip line) en los casos en que ésta es aplicable, a saber, estado plano de deformación y condiciones de contorno sin fricción. En las figuras 3 a 6 están reproducidos la malla de elementos finitos y el campo de velocidades de cada uno de ellos y la comparación de resultados se recoge en las tablas I y II, discriminando extrusión directa o inversa, caso plano o axisimétrico, relación de extrusión (ER) y condiciones de contorno, indicadas por medio del coeficiente de fricción α , siendo $\alpha=0$ para el caso sin fricción y $\alpha \rightarrow \infty$ para el caso sin deslizamiento. La comparación se hace en base a la presión de extrusión, adimensionalizada con la tensión de fluencia.

Se observa, con respecto al trabajo de Zienkiewicz y otros [1], y a otros resultados, para el caso sin fricción una mayor aproximación a la solución teórica, mientras que al considerar la fricción los resultados son superiores a los alcanzados en [1], mostrando una mayor sensibilidad del modelo a las condiciones de contorno. Se estima que estas diferencias se deben a haber considerado elementos de nueve nodos en lugar de ocho, a haber calculado una viscosidad y una tensión de fluencia para los elementos de fricción por cada punto de Gauss y no por cada elemento, como en [1]. Por último, para los desplazamientos de cuerpo rígido (velocidad de deformación muy pequeñas), debe adoptarse una viscosidad máxima, pues ésta tiende a infinito en esta situación. Este valor afecta a la solución y para estos ejemplos fue de $(\sqrt{3}/3) \cdot 10^5$ y $(\sqrt{3}/3) \cdot 10^6$.

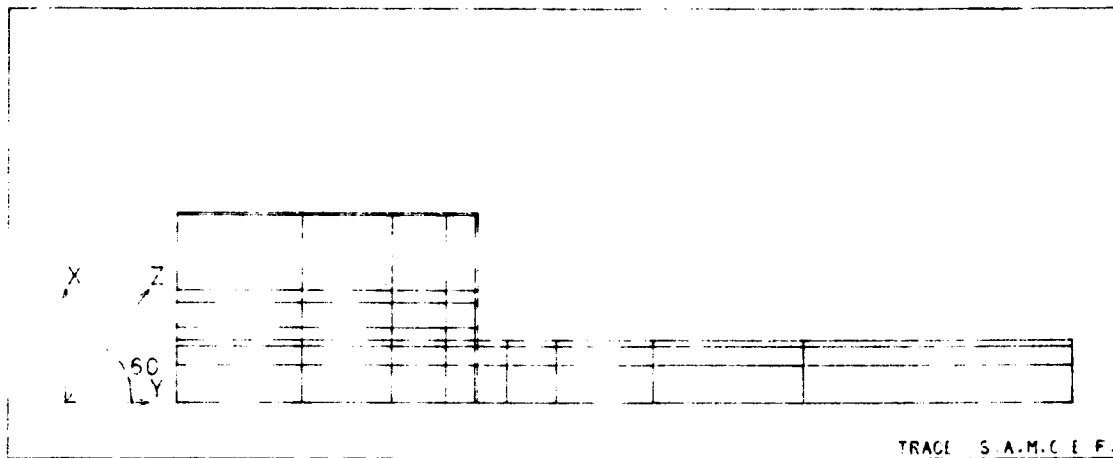


a) Discretización

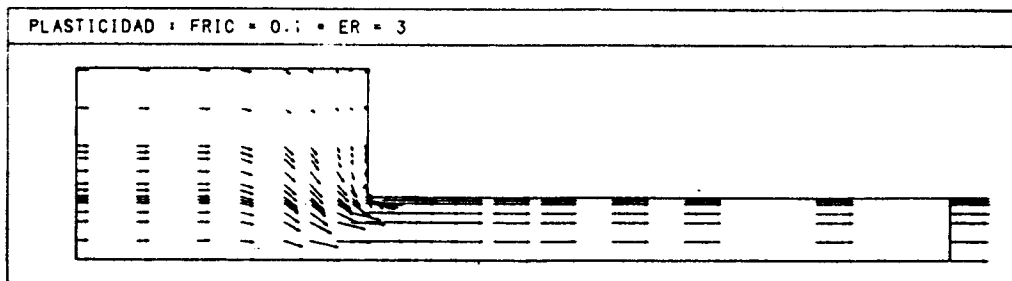


b) Campo de Velocidades

Fig. 3: Relación de extrusión ER = 2. Plano

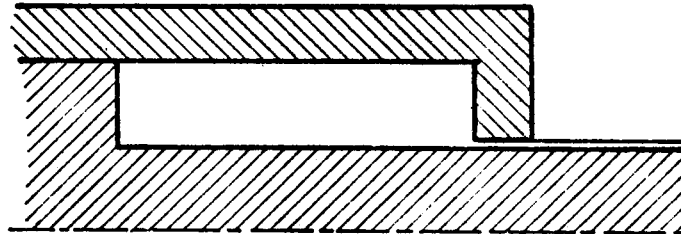


a) Discretización

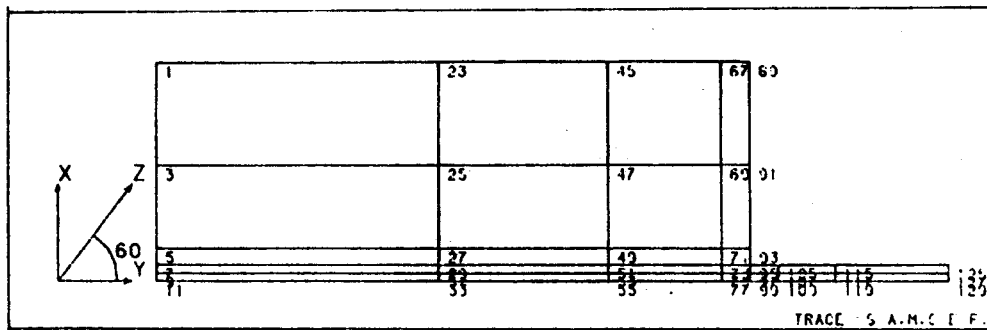


b) Campo de Velocidades

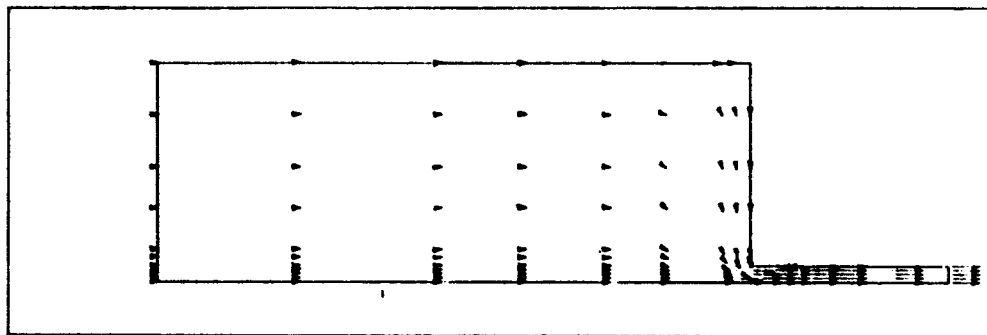
Fig. 4: Relación de extrusión $ER = 3$. Distintos valores del coeficiente de fricción. Plano.



a) Esquema

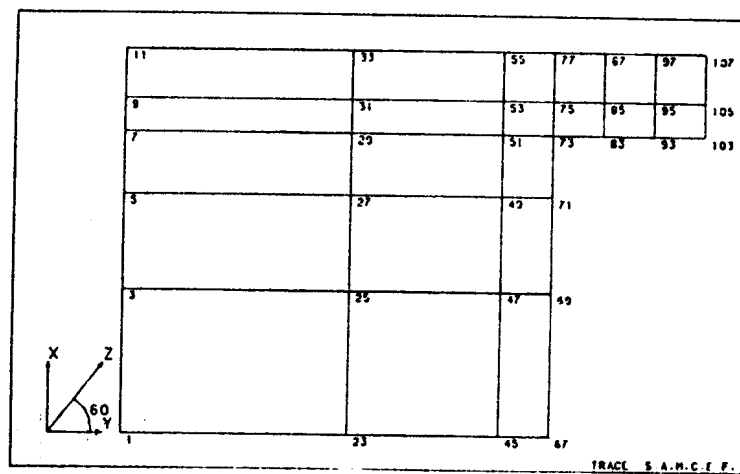


b) Discretización

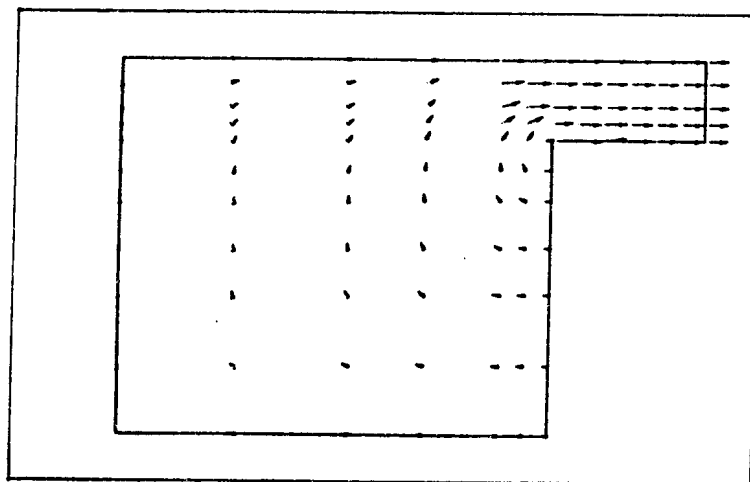


c) Campo de velocidades

Fig. 5: Relación de extrusión $ER = 13,33$. Axisimétrico



a) Discretización



b) Campo de Velocidades

Fig. 6: Extrusión inversa. $ER = 2,633$. Axisimétrico

P/k ; $k = \frac{c}{\sqrt{3}}$	Extrusión Directa							Inv.
	Plano					Axisimétrico		
	ER = 2	ER = 3				ER = 13,33	ER = 2633	
Coef. de fricción	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = \alpha$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$
Ejemplo N°	1	2	2	2	2	3	3	4
Slip line	2.6	3.425	-	-	-	-	-	-
Experimental [1]	-	-	-	-	-	-	8.660	-
Zienkiewicz et al.[1]	2.704	3.700	4.186	-	4.537	-	7.486	5.825
Ejemplo	2.683	3.495	4.607	4.989	5.147	6.976	7.498	5.317

Tabla I: Comparación de resultados

Autor	P/k
Pacheco (U/P y Penalidad)	2.8
Oñate (Penalidad)	2.9
Bianchi & Sheppard	2.724
Ejemplo 1	2.683
Slip line	2.6

Tabla II: Comparación de resultados ([3]).

6. CONCLUSIONES

Se ha reproducido un modelo para simular la extrusión en estado estacionario e isotérmico, con un esquema sencillo para tener en cuenta la fricción, aplicable a problemas planos y axisimétricos.

A partir de aquí y de las exigencias para tratar casos más complejos surgen como próximos desarrollos a encarar el considerar pasos sucesivos en la deformación de manera de poder hallar por integración la deformación total, y así por ejemplo, considerar el endurecimiento por deformación; posibilidad de actualizar y regenerar la malla acompañando a la deformación; introducir el acoplamiento térmico, considerando el calentamiento que tiene lugar por la deformación y a su vez la variación en las propiedades físicas del material en función de la temperatura. También la recuperación elástica es de gran interés para la modelación completa del proceso para conocer la forma final del material y las tensiones residuales. Por último, todo este análisis es fácilmente aplicable a problemas de laminación, mediante un tratamiento adecuado de las condiciones de contorno.

REFERENCIAS

- [1] O.C. Zienkiewicz, P.C. Jain and E. Oñate, Flow of Solids during Forming and Extrusion: Some Aspects of Numerical Solutions. Int. J. Solids Structures, Vol. 14, pp. 15-38 (1978).
- [2] P. Perzyna, Fundamental Problems in Visco-Plasticity, Recent Advances in Applied Mechanics, Chap. 9, pp. 243-377, Academic Press, New York (1966).
- [3] J.H. Bianchi, T. Sheppard, A Comparison of a Viscoplastic Finite-Element Model with Slip Line Field and Upper Bound Solution for Non-Hardening Material Subjected to Planestrain and Axisymmetric Extrusion, Ing. J. Mech. Sci., 29, 1 pp. 61-68 (1987).