CONVOLUCION DIGITAL DEL SEÑALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Juan L. Almarà
Profesor Titular de Computación I.
Facultad de Ingenieria - Bioingenieria.
Universidad Nacional de Entre Rios.
Oro Verde. Entre Rios.
Argentina.

RESUMEN

En este trabajo se describe un programa de computadora para el cálculo de la respuesta de un sistema, caracterizado por una función de transferencia, al cual se le aplica una señal de entrada, todo especificado en el dominio del tiempo.

Tanto la función de transferencia como la señal de entrada se dan como tablas de pares de valores, leidas desde el disco, obteniéndose como salida del programa la función de respuesta, en forma de gráfica o de tabla de valores.

La integración numèrica se realiza por cuadratura gaussiana, con fórmulas de Tschebycheff, dividiendo el intervalo de interès en segmentos; las ordenadas intermedias se calculan por interpolación de mínimos cuadrados en cuatro puntos.

ABSTRACT

This paper describes a computer program for the calculation of the response of a system, characterized by a transfer function, to which is applied an input signal, all specified in time domain.

The transfer function as the input signal are given in tables of values, read from disc. The program output may be a graphic, or a printed or disc table of values, of the response function of the system.

The numerical integration is made through gaussian cuadrature, with Tschebycheff formulaes, dividing the desired interval in segments; the ordinates are calculated using least squares interpolation, taking four data points each time.

1.0. INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es presentar un programa para obtener la función de salida de un sistema, en forma numérica, utilizando la convolución de la función de entrada con la función de transferencia, ambas dadas en forma de tablas de valores en función del tiempo.

Existen otras implementaciones previas de convolución numérica, como la indicada en [1]. Sin embargo, la presente se distingue en varios aspectos:

1) Las funciones de entrada y de transferencia están dadas en forma de tablas de valores, de abcisas no necesariamente equidistantes ni coincidentes. Esto implica que no es necesario realizar subprogramas específicos para el cálculo numérico de funciones analíticas, o bien, que el programa puede ser utilizado para el tratamiento de resultados experimentales o industriales.
2) Es posible ampliar una zona o intervalo de abcisas, para focalizar el estudio.
3) Los resultados pueden presentarse como gráficas o como tablas, en papel o en archivos de disco, para una mayor versatilidad en el uso.
4) La integración no se realiza según métodos rectangulares, trapeciales o de Simpson, sino mediante fórmulas de Tschebycheff, de igual peso y abcisas desigualmente espaciadas.
5) El número de puntos en que se evalúan las funciones no es constante a medida que avanza el cálculo, a diferencia de otras implementaciones.
6) Los datos de entrada se leen desde un archivo en disco, y pueden contener comentarios. Esto implica mejor documentación, y que pueden ser generados de diversas maneras (funciones analíticas, transductores, interfaces), y ser procesados en forma diferida.
7) Las ordenadas de las funciones de entrada y de transferencia se calculan mediante parábolas de segundo grado, de mínimos cuadrados, lo que aporta cierto grado de filtrado de errores de medición o ruido.

El programa está codificado en BASIC, y ha sido ejecutado en los equipos IBM Sistema/34 y Texas Instruments PC. No obstante, por su estructura y estilo, es fácilmente convertible a otros dialectos de BASIC, y, aun, a otros lenguajes.

2.0. RESEÑA TEORICA

2.1. Convolución de funciones

La integral de convolución de dos funciones unidimensionales con igual variable independiente se define como:

$$R(t) = E(t) * H(t) = \int_0^t E(x).H(t-x).dx$$

En los sistemas lineales invariables con el tiempo, si se conoce la respuesta para un impulso unitario H(t), la respuesta R(t) para una entrada arbitraria E(t), con estado inicial nulo, queda definida por la integral de convolución.

La posibilidad e interpretación del cálculo numérico de esta integral pueden consultarse en [1], y el estudio del tema, desde el punto de vista de la transformación de Laplace, está explicado en [2].

2.2. Integración numérica

Las fórmulas de Tschebycheff tienen la expresión:

$$\int_{-1}^{1} y(x).dx \cong \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} y(xi)$$

donde 'n' es el número de puntos en que se evalúa la función, y 'xi' son abcisas seleccionadas, desigualmente distribuidas en el intervalo (-1,1). Las fórmulas son exactas para integrandos y(x) polinomiales de grado 'n' o menor.

Los valores numéricos de las abcisas 'xi' se hallan tabulados en [3], y los detalles matemáticos pueden consultarse en las referencias [4] y [5].

3.0. IMPLEMENTACION DIGITAL

Como puede verse en las ecuaciones, se trata, en definitiva, de hallar, en forma numérica, el valor de una integral definida. Existen varios métodos para el cálculo, siendo los más difundidos el de la fórmula de Simpson y sus variantes, y el de la integración de Gauss.

3.1. Método utilizado

El método de Simpson requiere, usualmente, el uso de gran número de abcisas para aportar las cifras equivalentes de otros métodos, y es el usado en la referencia [1].

La presente implementación esta basada en la integración mediante cuadratura gaussiana, utilizando fórmulas de igual peso y abcisas no equidistantes, como se indicó en el párrafo 2.2, o integración de Tschebycheff. Usualmente, este método reduce el número de evaluaciones de la función integrando, para igual precisión de salida.

La exactitud del resultado disminuye si el intervalo de integración es mayor de 2, segun [4] y [5]. Para superar esta situación, el usuario puede indicar al programa que integre en intervalos menores que 2, prefijados, y luego, que acumule los resultados de cada segmento.
A diferencia de otros programas, el número de evaluaciones de la función a integrar se va incrementando a medida que avanza el cálculo hacia el último valor a determinar. Se utiliza la fórmula de nueve puntos, que se distribuyen en cada subintervalo. La longitud de cada segmento varla ligeramente, de modo que haya un número entero de ellos para la abcisa actual en proceso.

Las fórmulas originales de Tschebycheff son válidas para el intervalo (-1,1). Dado que los segmentos tienen comienzos y finales arbitrarios y cambiantes, segun el avance del programa, se realizan automáticamente las conversiones necesarias para lograr los cambios de escala.

3.2. Limites de integración

Muchas veces, la respuesta total del sistema es muy extensa, o bien, es deseable o necesario concentrar la atención en una pequeña zona de la respuesta. Por ello, es posible indicar,como parámetros externos, los limites de cálculo inferior y superior.

Para evaluar alternativas y opciones en la aplicación, a medida que avanza el cálculo se informa en la pantalla del número de evaluaciones realizado para esa abcisa en particular, y el total acumulado hasta el presente, además de otros datos que podrlan resultar de interés, para documentación y control.

3.3. Determinación de las ordenadas

La facilidad de poder aportar los datos a intervalos irregulares en abcisas está soportado por un módulo de aproximaciones, incorporado al programa debido a que las abcisas de integracion 'xi' no están igualmente espaciadas.
Las ordenadas necesarias se determinan mediante interpolación, utilizando un polinomio cuadrático de mlnimos cuadrados, a través del análisis de conjuntos de cuatro ordenadas consecutivas, dando un tratamiento especial a los extremos. Esto hace que el polinomio vaya cambiando, lo que implica cierto grado de filtrado de errores de medicioń aleatorios, variaciones bruscas en la función de entrada o en la función de transferencia, o presencia de ruido.

4.0. DATOS DE ENTRADA

Los datos de entrada están estructurados en tres unidades conceptuales: parámetros de la ejecución, tablas de valores y comentarios (opcionales). Estos datos se leen desde el disco, en formato de caracteres ASCII o EBCDIC, quedando a cargo del programa el análisis de cada linea y la extracción de los valores numéricos adecuados.

4.1. Parámetros de ejecución

Es posible definir, para cada ejecución, las abcisas mi nima y máxima para el cálculo de la respuesta, el número de puntos a calcular en esta función de salida,y el subintervalo de integración por segmentos. La inclusión de estos datos como parámetros da bastante flexibilidad en el uso del programa, pues permite centrar la atención sobre un intervalo especifico, o controlar la exactitud o dimensión de la respuesta.

4.2. Origen de los datos

Los valores numéricos de la función de entrada y de la función de transferencia deben indicarse en dos columnas cada uno: una para las abcisas, y otra para las ordenadas. No es necesario que las abcisas estén igualmente espaciadas, o que haya coincidencia entre las de la función de entrada y las de la función de transferencia.El programa considera que una tabla de valores termina al encontrar una abcisa menor que la anterior.

Estas tablas pueden ser generadas por otros programas, ya sea como resultado del cálculo de funciones matemáticas, o como resumen de mediciones a través de interfaces adecuadas.

4.3. Documentación de los datos

Está reconocida la importancia de la documentación de las aplicaciones y programas, y la inclusión de comentarios en el texto de entrada puede clarificar la procedencia de la tabla, su objetivo, fecha de compilación, fundamentos para seleción de determinados valores de los parámetros e informa ciones varias sobre los valores numéricos que se incluyen.

5.0. PRESENTACION DE LOS RESULTADOS

Con el objetivo de ofrecer la mayor versatilidad posible, la función de respuesta de salida puede ser registrada como una gráfica en la pantalla, una tabla de valores impresa o desplegada, o como un archivo de texto.

La salida gráfica es totalmente autoajustable, una vez que se ha adaptado el programa al equipo en que esta utilizando.

La salida en forma de tabla (en impresora, en pantalla o en archivo de texto) posibilita encadenar los resultados de diversos procesos, analizar determinados valores, o llevar un registro histórico de investigaciones y trabajos.

6.0. CONCLUSIONES

El programa presentado puede considerarse desde los siguientes dos criterios:

Por una parte, se trata de la implementación de la convolución en computadoras, a través de un método diferente.

Por otra parte, los detalles de la implementación pueden sugerir líneas de pensamiento a explorar en nuevos estudios de éste y de otros temas, tales como: entrada documentada de datos, parametrización, eliminación de restricciones en los datos, previsión de la posiblidad de existencia de ruido o errores, o distintas formas de presentar los resultados.

7.0. REFERENCIAS

[1] Torres F. J. y Czitrom V.: "Métodos para la solución de problemas con computadora digital". Representaciones y Servicios de Ingenierla S.A., Méjico, 1980.
[2] Wylie, C. R.: "Matemáticas superiores para ingenierla". McGraw-Hill, 1970.
[3] Abramowitz, M. y Stegun, I.: "Handbook of mathematical functions". Dover Publications Inc., New York.
[4] Hildebrand, F.: "Introduction to numerical analysis". McGraw-Hill, 1974.
[5] Scheid, F.: "Theory and problems of numerical analysis". Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, 1968.