DIFRACCION-REFRACCION COMBINADAS DE ONDAS DE AGUA. CALCULO UTILIZANDO ELEMENTOS FINITOS HIBRIDOS. INCLUYE BORDES ABSORBENTES Y DISIPACION POR FRICCION

Carlos A. Vionnet
Angel N. Menéndez
Dpto. de Modelos Matemáticos y Est. Espec.
Laboratorio de Hidráulica Aplicada (LHA)
INCYTH
Ezeiza - Argentina

RESUMEN

Este trabajo describe un modelo matemático que resuelve el efecto combinado de la difracción, refracción y reflexión de ondas. Esto permite estimar el grado de agitación, producto del oleaje, presente en el interior de puertos, bahías y en las inmediaciones de estructuras off-shore, información de gran utilidad en proyectos de ingeniería marítima. Se incorporan mecanismos físicos de disipación de energía, incluyendo contornos parcialmente absorbentes, fricción contra el fondo y pérdidas localizadas. Se presentan comparaciones entre resultados numéricos y soluciones analíticas.

ABSTRACT

This paper describes a numerical model which calculates the combined effects of wave diffraction, refraction and reflection. This program is useful in determining the agitation in harbors, bays and in the neighborhood of off-shore structures. Energy dissipation mechanics are incorporated. These include boundary absorption, bottom friction and localized dumping due to, for example, submerged bodies. Comparissons between numerical and analytical solutions are shown.

INTRODUCCION

El conocimiento del oleaje en puertos y áreas costeras es esencial, desde el punto de vista económico, para estimar y/o modificar las condiciones de operación en sus inmediaciones. Su estudio se enfoca, en general, analizando por separado cada uno de los efectos físicos intervinientes, tales como difracción, refracción, bajío, reflexión y amortiguamiento. Sin embargo, éstos pueden ocurrir simultáneamente y con diferentes grados de interacción entre sí, por lo cual es conveniente adoptar una formulación totalizadora.

Las ondas provenientes de mar adentro, se refractan al ir encontrando zonas de menor profundidad (fig.1). Una vez situadas sobre la región de interés, el problema de estimar la penetración de la onda en el puerto se agudiza por la aparición de difracción y de múltiples reflexiones, las cuales producen ondas estacionarias y, en ciertos casos, el fenómeno de resonancia.

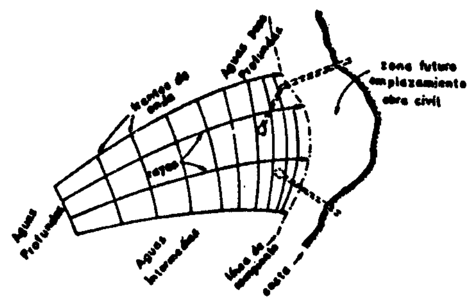

Fig.1 - Efecto de la refracción en la zona de aguas poco profundas

Para determinar las condiciones en las inmediaciones de la obra, partiendo de situaciones conocidas en aguas profundas, se utilizan modelos numéricos de refracción de ondas [1]. Estas, junto a las corrientes [2], intervienen como condiciones de contorno para calcular la agitación en la zona de interés.

El Laboratorio de Hidráulica Aplicada del INCYTH ha encarado un proyecto de investigación y desarrollo para tratar estos aspectos. En el presente trabajo se discute el programa DIFRAC2, el cual constituye una herramienta de gran utilidad en problemas de ingeniería marítima.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Desde el punto de vista de la Mecánica de los Fluídos, las olas son ondas gravitatorias, es decir, motorizadas por gradientes de presiones. La teoría aquí utilizada asume un flujo irrotacional, donde la fricción es luego introducida como una perturbación. Supone además, que la pendiente del fondo es suave, y que la amplitud de la onda, comparada con su longitud y la profundidad local, es lo suficientemente pequeña como para adoptar una formulación lineal. Entonces, es posible expresar el potencial de velocidades de la siguiente manera [3]:

$$\phi(x,y,z,t) = \phi(x,y)\,\frac{\cosh[k(h+z)]}{\cosh(kh)}\,e^{-iwt} \qquad (1)$$

donde z es la coordenada vertical, con origen en la superficie no perturbada del fluído, w la pulsación de la onda, k el número de ondas respectivo y h la profundidad local, ligadas por la relación de dispersión:

$$w^2 = g\ k\ \tanh(kh) \qquad (2)$$

siendo g la aceleración de la gravedad, y ϕ el "potencial plano reducido", que satisface la denominada ecuación de BERKHOFF [4]:

$$\nabla.(c\ cg\ \nabla\phi) + \frac{cg\ w}{c}\,\phi = 0 \qquad (3)$$

en (3), c es la celeridad de fase, cg=nc la celeridad de grupo, y n el coeficiente de bajío, definido por:

$$n = \frac{1}{2}\left[\,1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh}(2kh)}\,\right] = \frac{1}{2}\,(1 + G) \qquad (4)$$

Ha sido puesto en evidencia en numerosas ocasiones, tanto desde el punto de vista teórico [5] como experimental [6], lo adecuado de la ecuación elíptica (3) en la predicción de procesos combinados de difracción, refracción y reflexión de ondas que se propagan sobre un lecho de suave pendiente. Mas aún, la ecuación de BERKHOFF se reduce, cuando $kh<(2\pi/20)$, a la clásica ecuación de ondas en aguas poco profundas [2], y cuando $kh>\pi$, a la conocida ecuación de HELMHOLTZ que gobierna los procesos de difracción pura en aguas de profundidad constante o infinita [3].

Ciertas condiciones de borde deben ser satisfechas por la solución de la ecuación diferencial. Así, la velocidad del fluído normal a un contorno debe ser nula:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \qquad (5)$$

donde n es aquí la normal exterior al contorno. Esta condición implica la reflexión total de la onda, tal como ocurre ante la presencia de paredes verticales impermeables. En problemas reales, es común encontrar contornos capaces de restar energía a la onda; hasta apreciar un zona de rompientes (fig.1). En otros casos, la reflexión es solo parcial, por ejemplo al incidir las olas contra un espigón de enrocado, cuya naturaleza porosa impide que la velocidad normal sea nula. Para tales bordes, la condición a cumplir puede ser escrita en la siguiente forma [7]:

$$\alpha \frac{\partial \emptyset}{\partial t} + \frac{c}{\cos\theta} \quad \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

siendo α un coeficiente de absorción adimensional, mientras que θ es el ángulo formado entre la dirección de propagación de la onda y el eje x. Así, $\alpha = 0$ representa reflexión total, y $\alpha = 1$ implica absorción completa. Luego $0 < \alpha < 1$ puede usarse para cualquier situación de absorción parcial. En ciertos procesos donde intervienen efectos inerciales, como ser en zonas de rompientes, α puede devenir complejo [4], a consecuencia del desfasaje que se produce entre las ondas incidente y reflejada. Sin embargo, dada la enorme dificultad en determinar experimentalmente tales constantes, su utilización práctica se restringe a coeficientes reales.

En el contorno del infinito, el potencial debe verificar la condición de radiación de SOMMERFELD. A tal fin, si se representa al potencial como la superposición del correspondiente a la onda incidente $\tilde{\emptyset}$, conocido, y el que resulta del proceso de "scattering" $\emptyset^s$ originado por la presencia de obstáculos, dicha condición puede escribirse como:

$$\lim_{ro \to \infty} \sqrt{ro} \; \left(\frac{\partial \emptyset^s}{\partial ro} - i \; k \; \emptyset^s \right) = 0 \qquad (7)$$

donde ro es la distancia medida a partir de un cierto origen ubicado en la región con presencia de bordes.

De esta manera, el problema diferencial queda totalmente planteado. Sin embargo, puede desarrollarse una formulación alternativa que conduce a una vía distinta de solución. En primer lugar, se divide el espacio en dos regiones, una interior A y otra exterior R, separadas por el contorno matemático ∂A (fig.2). En R se considera que la profundidad es constante o infinita. En consecuencia, allí puede plantearse para $\emptyset^s$ una formulación integral indirecta, en términos de una distribución continua de fuentes de intensidad u, desconocida, que se extiende sobre ∂A, obteniéndose:

$$\phi_R^s(P) = -\frac{1}{2}\int_{\partial A} u(Q)\, H_0^{(1)}(kr)\, ds(Q) \qquad (8)$$

donde r es la distancia entre los puntos P y Q, k el número de ondas sobre ∂A y $H_0^{(1)}$ es la función de HANKEL de primera clase y orden nulo. La solución (8) satisface la condición de borde (7) automáticamente.

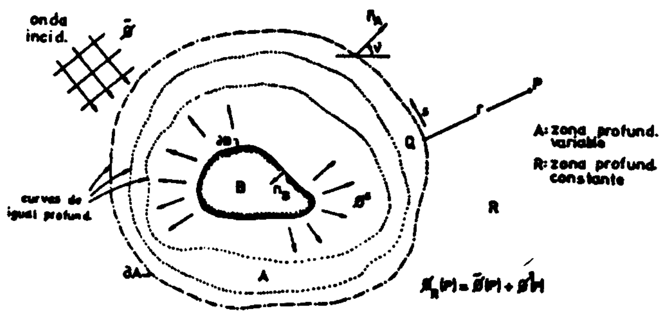

Fig. 2 - División del dominio de cálculo

En la zona interior A, por su parte, puede desarrollarse una formulación variacional para ϕ. La funcional $J(\phi)$ es la "energía compleja" [8], definida como:

$$J(\phi) = JA(\phi) + JFA(\phi) + JDA(\phi) + JCA(\phi) + JCB(\phi) \qquad (9)$$

donde:

$$JA(\phi) = \iint_A \frac{1}{2}\left[c\, cg\, (\nabla\phi)^2 - \frac{cg\, w}{c}\phi^2\right] dx\, dy \qquad (10)$$

representa la suma de las energías cinética y potencial contenidas en A;

$$JCA(\phi) = -\int_{\partial A} c\, cg\, \phi\, \frac{\partial\phi}{\partial n}\, ds \qquad (11)$$

corresponde al flujo de energía irradiado hacia la zona exterior R;

$$JCB(\phi) = -\frac{1}{2}\int_{\partial B} c\, cg\, \phi\, \frac{\partial\phi}{\partial n}\, ds \qquad (12)$$

está asociada al flujo de energía compleja a través del contorno absorbente ∂B;

$$JFA(\phi) = -\iint_A \frac{i}{2\omega} F \left[1 - l^2\right] (\nabla\phi)^2 \, dx \, dy \qquad (13)$$

està ligada a la energía disipada por fricción contra el fondo, siendo $F=F(x,y)$ una función de pérdida que depende de la capa límite (laminar o turbulenta) y, l es la longitud de onda adimensionalizada con el valor que toma en aguas profundas.

$$JDA(\phi) = -\iint_A i \, n \, \omega \, \gamma \, \phi^2 dx \, dy \qquad (14)$$

representa pèrdidas energèticas localizadas, siendo γ un coeficiente de amortiguamiento [9,10]

Nòtese que no existían contribuciones similares a JFA y JDA en el planteo diferencial original.

La contribución $JCB(\phi)$ al funcional debe satisfacer la condición (6), para la cual se presentan dos aproximaciones que prescinden del conocimiento previo del àngulo θ [7]:

1er. orden: $$\frac{\partial\phi}{\partial n} - i\alpha k \phi = 0 \quad \text{en } \partial B \qquad (15)$$

2do. orden: $$i k \frac{\partial\phi}{\partial n} + \alpha k^2 \phi + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} = 0 \quad \text{en } \partial B \qquad (16)$$

La solución ϕ_A en la zona A se acopla a la solución ϕ_R en la zona R, estableciendo la continuidad de la altura de la onda y de la velocidad normal sobre el contorno ∂A:

$$\phi_A(P) = \tilde{\phi}(P) + \phi_R^s(P) \qquad (17)$$

$$\frac{\partial\phi_A}{\partial n}(P) = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial n}(P) + u(P) - \frac{i}{2}\int_{\partial A} u(Q) \frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial n} \, ds(Q) \qquad (18)$$

METODO NUMERICO

En base a la formulación del problema desarrollada en la sección anterior, es natural adoptar el mètodo de los elementos finitos (MEF) para la zona interior A, y el mètodo de los elementos de contorno (MEC) (en particular el mètodo panel) para la zona exterior R.

Entonces, la región A se particiona en "E" elementos finitos triangulares trinodales, quedando así definidos "N" nodos. Luego, el funcional (9) se obtiene como la suma de cada contribución elemental $Je(\phi)$:

$$J(\phi) = \sum_{e=1}^{E} Je(\phi) \qquad (19)$$

El potencial en cada elemento se aproxima de acuerdo al la práctica usual del MEF:

$$\phi^e = N^e . \phi^e \qquad (20)$$

siendo ϕ^e el vector columna con las incógnitas nodales en cada elemento, y $\underline{N}$ el vector fila de las funciones de forma adoptadas.

Por su parte, de acuerdo al método de los paneles, se acepta que la función u(Ω) se mantiene constante en cada segmento de la frontera ∂A (es decir, sobre cada panel). Entonces, las condiciones de continuidad (17) y (18) conducen a las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{2}(\phi_i + \phi_n) = \tilde{\phi}_k - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} u_j \, H_0^{(1)}(kr_{kj})\Delta S_j \qquad k=1,2,..M \qquad (21)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_k} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n_k} + u_k - \frac{1}{2}\sum_{j=} u_j \frac{\partial H_0^{(1)}(kr_{kj})}{\partial n_k} \Delta S_j \qquad k=1,2,..M \qquad (22)$$

donde r_{kj} es la distancia entre los puntos medios de los segmentos k y j, ΔS_j es la longitud del segmento j y M es el número de elementos en que se divide el contorno A.

Introduciendo (20) en Je(φ) y efectuando la suma indicada en (19), donde JCA(φ) se evalúa de acuerdo a la expresion (22), se llega a:

$$J(\phi) = \frac{1}{2}\, \phi^t A\, \phi + \phi^t (\, B\, \underline{u} - \underline{r1}\,) \qquad (23)$$

y puesto que la solución surge de la condición de estacionariedad del funcional, se obtiene:

$$A\, \phi + B\, \underline{u} = \underline{r1} \qquad (24)$$

donde:

$\underline{A}$: matriz compleja y simétrica de NxN elementos, de estructura banda generada por el MEF.

$\underline{B}$: matriz compleja de NxM elementos, obtenida en base al MEC y constituída por las derivadas normales de la función de Hankel.

ϕ : vector complejo conteniendo las N incógnitas del potencial en cada nodo de la red de elementos finitos.

$\underline{u}$: vector complejo con las M intensidades incógnitas de las fuentes distribuídas en ∂A.

$\underline{r1}$: vector complejo conteniendo las derivadas normales del potencial incidente $\tilde{\phi}$.

Por su parte, la ecuación (21) se expresa matricialmente como:

$$C\ \underset{\sim}{\phi} + D\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{r2} \qquad (25)$$

donde:

$\underset{\sim}{C}$: matriz real constituída por los coeficientes 1/2 de la expresión (21).

$\underset{\sim}{D}$: matriz compleja compuesta por las funciones de Hankel.

$\underset{\sim}{r2}$: vector complejo, producto del potencial incidente ϕ.

El sistema de ecuaciones lineales complejas (24) y (25), se resuelve utilizando un método directo de solución, obteniéndose primero el vector incógnita u, y calculándose luego con estos valores el campo completo del potencial ϕ buscado.

RESULTADOS NUMERICOS

En el proceso de prueba del modelo matemático, existen dos aspectos importantes. Por un lado, en aquellos casos en que la ecuación diferencial (3) admite soluciones analíticas, deben efectuarse las correspondientes comparaciones con las soluciones numéricas para garantizar la bondad del modelo adoptado. En segundo lugar, debe verificarse si la descripción matemática y la solución numérica asociada, concuerdan en buena medida con los procesos físicos observados. Este último aspecto es particularmente importante, puesto que la formulación matemática no incluye todos los efectos físicos intervinientes. Esta verificación se realiza sobre la base de mediciones de campo o de experiencias en escala reducida (modelos físicos). Al respecto, existen suficientes evidencias que confirman la validez de la ecuación de BERKHOFF [6].

Respecto del primer punto, una prueba consistió en simular los efectos de difracción y reflexión que se producen a partir de una onda que incide sobre una pila o isla circular de bordes opacos (fig.3), que constituye un ejemplo simple de estructura off-shore. La fig.4 muestra la red de elementos finitos utilizada, mientras que en la fig.5 se aprecia la variación de la altura de la onda, relativa a la altura de la onda incidente, en torno a la pila. Se observa que los resultados numéricos concuerdan satisfactoriamente con los analíticos. En la fig.6 se graficaron las líneas de igual amplitud relativa, y en la fig.7 puede verse la típica figura de difracción detrás de la pila.

La siguiente prueba se refiere a la agitación en un puerto rectangular, geometría que ha sido ampliamente investigada por numerosos autores [11]. Se utilizaron bordes totalmente reflejantes (fig.8). Se muestra en la fig.9 la correspondiente solución numérica comparada con la solución analítica que surge de la teoría propuesta por UNLUATA & MEI [11], para un amplio rango de frecuencias. El acuerdo es excelente, excepto en la última parte de la curva, donde los valores numéricos caen por encima de la solución analítica. Quizás sea esta última quien falle, pues una de las hipótesis básicas de la teoría es que kb<<1, mientras que para kL=5 se tiene kb=O(1). En las figs.10-11 se muestran perfiles de la onda estacionaria a lo largo de la línea central del puerto.

Se realizó una tercera prueba para chequear el rendimiento de las aproximaciones de primer y segundo orden en bordes transparentes, a partir de un océano semi-infinito de profundidad constante, limitado por una costa recta infinita (fig.12), y considerando que una porción de la misma es absorbente. Así, para coeficientes crecientes de absorción, se calculó la reflexión parcial de la onda introducida por el borde semi-transparente (fig.13). Una forma alternativa de presentar los resultados es graficando los errores absolutos (fig.14). De esta prueba, surgen dos conclusiones. Por un lado, el ajuste alcanzado es altamente satisfactorio y, por otra parte, se aprecia un rendimiento más parejo y eficiente en la aproximación de segundo orden.

Otra prueba de absorción se presenta en las fig.15, 16 y 17. Se basa en la solución analítica [11] para una onda que se propaga en un océano semi-infinito, y que se introduce en un canal rectangular de longitud semi-infinita. En la fig.15 se muestra la red de elementos finitos adoptada, de longitud L=1000 mts. y ancho b=40 mts., aplicándose una condición de absorción total (segundo orden) al final del canal. El ajuste conseguido en este caso puede considerarse excelente para todo el rango de frecuencias ensayado (fig.16). La fig.17 muestra un corte de la solución a lo largo del canal para kL=1.

Finalmente, se analizó un caso de pérdida de energía por fricción de fondo, adoptándose un canal rectangular semi-infinito de características similares al tratado previamente (figs. 18 y 19). Se observa el decaimiento de la amplitud a medida que la onda penetra en el canal, registrándose una discrepancia no mayor al 10% respecto de lo esperado según cálculos teóricos [3]. Las oscilaciones de la solución se deben a la difracción acaecida en la boca.

CONCLUSIONES

Se presenta el programa DIFRAC2 para resolver el efecto combinado de la difracción, refracción y reflexión de ondas. Las pruebas a las que fue sometido arrojaron resultados altamente satisfactorios.

El programa se utiliza en estudios de ingeniería marítima encarados por el LHA, y, eventualmente se encuentra a disposición de profesionales de la Hidráulica interesados en contar con una herramienta de estas características.

REFERENCIAS

[1] Vionnet, C.A.; Menéndez, A.N. (1986): "Simulación numérica de olas para el diseño de puertos". XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, San Pablo (Brasil), Vol.1, pp.439-449.

[2] Menéndez, A.N. (1985): "Simulación numérica de flujos cuasi-bidimensionales a superficie libre", informe LHA-INCYTH S5-086-85.

[3] Ippen, A.T. (1966): "Estuary and Coastline Hydrodynamics", Iowa Inst. Hydraulic Research.

[4] Berkhoff, J.C.W. (1976): "Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction", Publication Nro.163, Delft Hydraulics Lab.

[5] Jonsson, I.G.; Skovgaard, O. and Brink-Kjaer (1976): "Diffraction and refraction calculations for waves incident on a island", J. Marine Res., Vol.34, nro.3, pp.469-496.

[6] Berkhoff, J.C.W.; Booy, N. and Radder, A.C. (1982): "Verification of Numerical Wave propagation models for simple harmonic linear water waves", Coastal Engineering, Vol.6 nro.3, pp.255-279.

[7] Engquist, B. and Majda, A. (1977): "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves", Mathematics of Computation, Vol.31, nro.139, pp.629-651.

[8] Behrendt, L.; Jonsson, I.G. (1984): "The physical basis of the mild-slope wave equation", Proc. 19th. Coastal Eng. conf., Houston, ASCE, New York.

[9] Dalrymple, R.A.; Kirby, J.; Hwang P.A. (1984): "Wave diffraction due to areas of energy dissipation", J.of Waterways, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol.110, Nro.1, pp.67-79.

[10] Vionnet, C.(1987): "Difracción-refracción combinadas en ondas de agua", Inf. LHA-INCYTH 064-02-87

[11] Unluata, U.; Mei, C.C. (1973): "Long wave excitation in harbours - an analytical study", Rep. no. 171, Parsons Lab.,MIT.

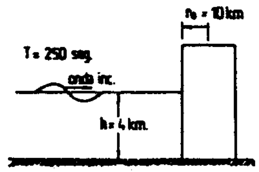

Fig.3 – Pila circular

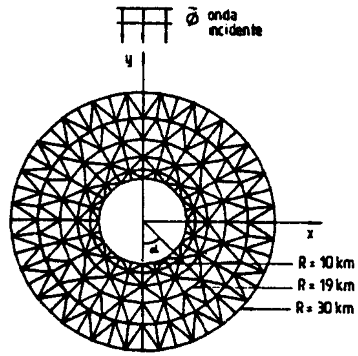

Fig.4 – Red Elem. Finitos

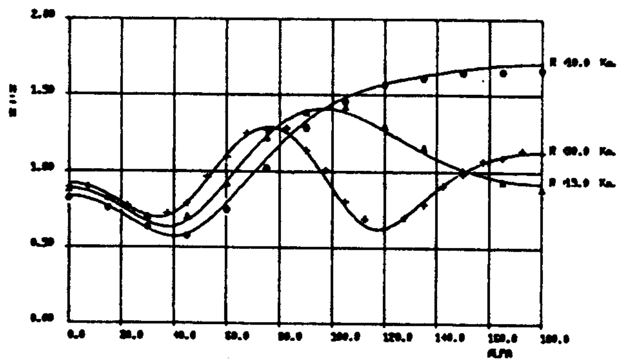

Fig.5 – Variación de la altura relativa de la onda en torno a la pila circular (H: altura onda incid.)

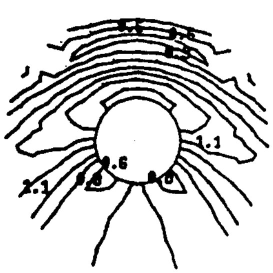

Fig.6 – Líneas de igual amplitud relativa c/0.1 u.

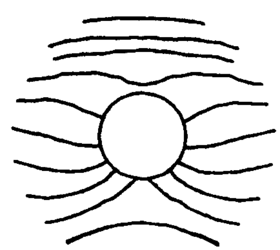

Fig.7 – Líneas de igual fase cada $\pi/4$ rad.

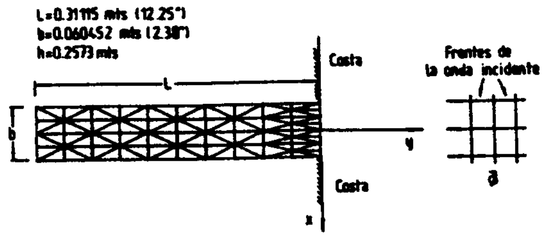

Fig.8 - Red de Elementos Finitos (Puerto Rectang.)

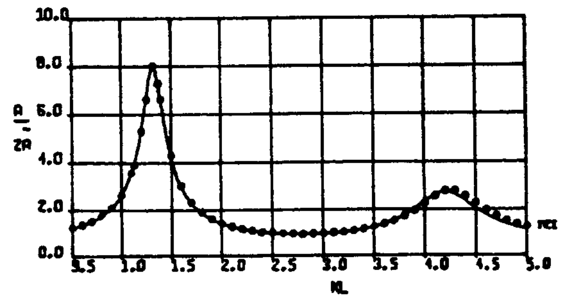

Fig.9 - Solución Analítica (UNLUATA & MEI - 1973)
o Solución numérica (MEF)

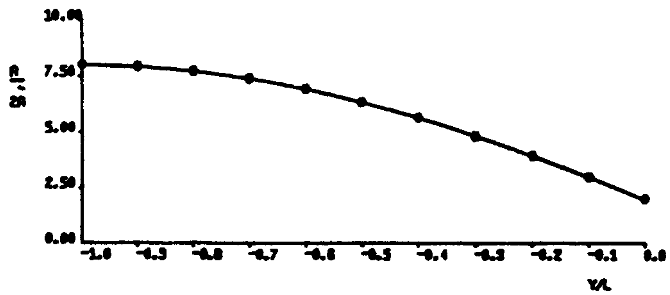

Fig.10 - Perfil onda estacionaria en el interior del puerto rectangular (kL=1.324)

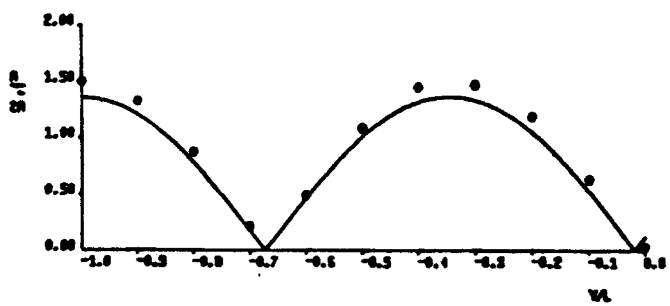

Fig.11 - Perfil onda estacionaria en el interior del puerto rectangular (kL=5.)

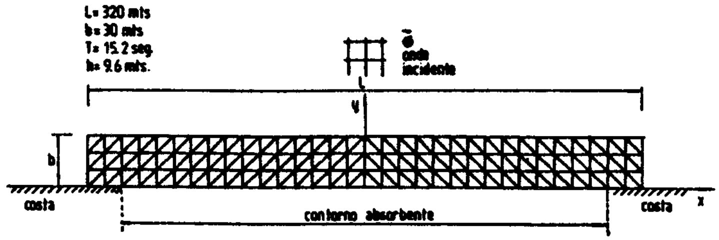

Fig.12 - Red de Elementos Finitos
Longitud contorno absorbente = 280 mts.

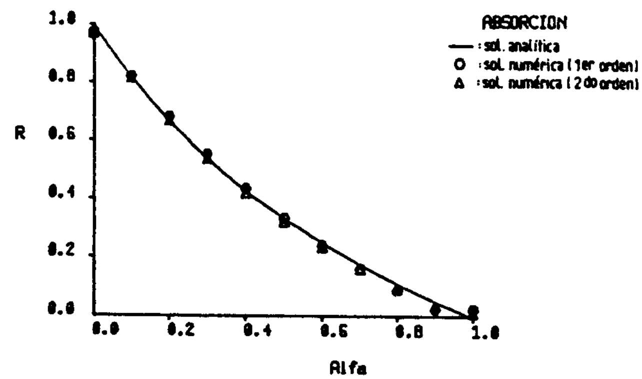

Fig.13 - Comparación entre las aproximaciones de 1er. y 2do. orden sobre una costa parcialmente transparente (α : coeficiente de absorción)

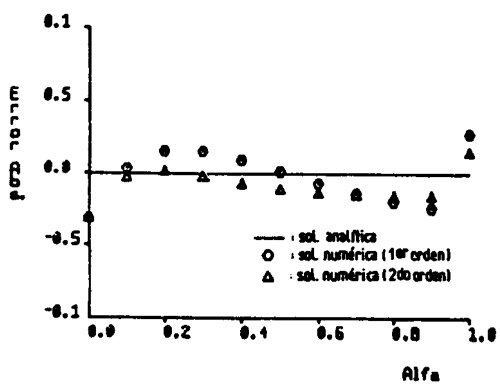

Fig.14 - Errores absolutos de los resultados correspondientes a la fig.13.

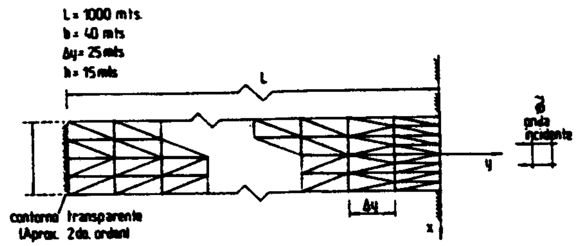

Fig.15 - Red de Elementos Finitos (Canal Semi-infinito)

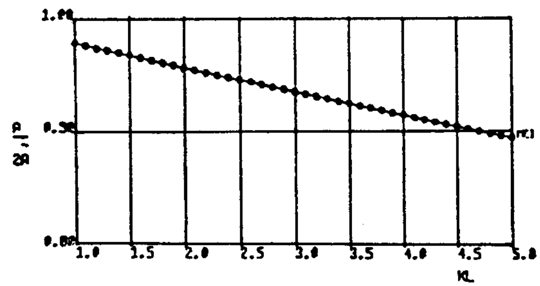

Fig.16 - Solución analítica (UNLUATA & MEI - 1973)
o Solución numérica (MEF)

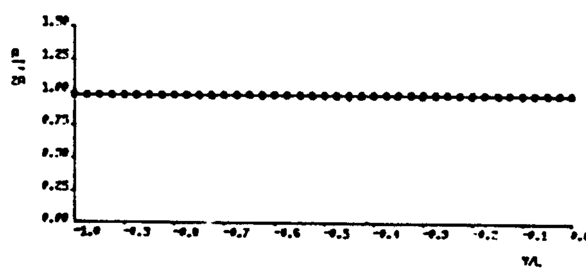

Fig.17 - Amplitud relativa de la onda a lo largo de la línea central del canal semi-infinito
- Solución analítica (UNLUATA & MEI)
o Solución numérica (MEF)

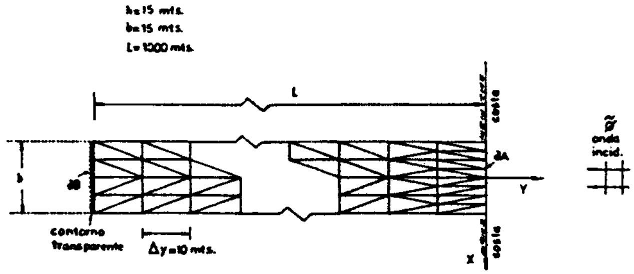

Fig.18 - Red de Elementos Finitos (Canal semi-infinito)

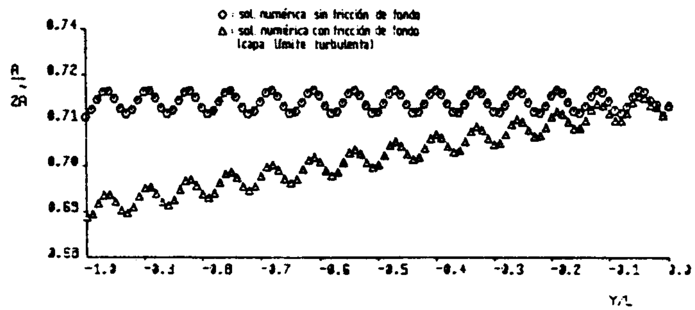

Fig.19 - Variación de la amplitud relativa de la onda a lo largo de la línea central del canal