

APROXIMACION NUMERICA A UN PROBLEMA DE CAVIDADES

Néstor E. Aguilera
Marcela B. Giscafré

Programa Especial de Matemática Aplicada - Instituto
de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química.
Santa Fe - Argentina.

RESUMEN

Se tratan de encontrar flujos bidimensionales de chorros y cavidades de fluidos ideales. El algoritmo que se utiliza obtiene un mínimo local del funcional correspondiente. Se presentan resultados en diversas geometrías.

ABSTRACT

We study two dimensional flows with jets and cavities of ideal fluids. The algorithm used obtains a local minimum of the corresponding functional. We present results for several geometries.

GENERALIDADES

En el estudio de problemas de cavidades y chorros en flujos ideales bidimensionales (irrotacionales, invíscidos, incompresibles, sin gravedad, sin tensión superficial) surge que la función línea de corriente que es solución al problema, minimiza el funcional

$$J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + m(\{x:v(x) > 0\})$$

entre todas las funciones v que satisfacen $v = u_0$ en el borde de Ω .

El funcional J no es convexo ni continuo, por lo que en general, puede haber mínimos locales que no son mínimos absolutos.

Uno de los autores (N. Aguilera) presentó en un encuentro anterior, resultados más bien teóricos sobre la aproximación mediante elementos finitos de este problema.

En la discretización se considera el funcional

$$J_h(v) = \int_{\Omega_h} |\nabla v|^2 dx + \sum_{v_i > 0} p_i$$

donde $v = \sum_i v_i \psi_i$, siendo $\{\psi_i\}$ el conjunto de funciones base de los elementos finitos y $p_i = \int_{\Omega_h} \psi_i dx$.

Se trabaja con malla fija puesto que, proponiendo la frontera libre resulta un algoritmo que puede ser inestable dependiendo de la geometría.

Por supuesto, el funcional J_h tampoco es continuo ni convexo. Más aún, surgen distintas posibilidades de definición de mínimo local.

La más sencilla es la de l-mínimo local:

Definición:

$u = \sum_i u_i \psi_i$ es l-mínimo local si

$$J_h(u) \leq J_h(v)$$

para toda $v = \sum_i v_i \psi_i$ tal que $u_i = v_i = u_i^0$ en $\Gamma = \partial\Omega$ y se verifica:

$$\{i:v_i > 0\} \Delta \{i:u_i > 0\} = \{j\}.$$

(Δ indica la diferencia simétrica de conjuntos), es decir a lo sumo hay un único nodo donde $v_i > 0$ y $u_i = 0$ o viceversa.

Es claro que si u_i es l-mínimo local, entonces:

$$a) \int (\nabla \psi_i \nabla \psi_j dx) u_j = 0 \quad \text{si } u_i > 0, \text{ i nodo interno}$$

o

b) $u_i = 0$.

Si la condición (a) se satisface, decimos que u es armónica discreta en el nodo i -ésimo.

Para obtener un mínimo local estable, utilizamos un algoritmo de cálculo mejorado con respecto al presentado anteriormente en el ENIEF, en los siguientes aspectos:

- 1) Las mallas son más generales, antes se trabajaba con todos los elementos iguales.
- 2) Se utiliza una propiedad del funcional que permite agregar varios nodos simultáneamente.
- 3) Se utiliza descomposición de Cholesky en vez de relajación. Este último tiene el inconveniente de la sensibilidad del parámetro de relajación, pues la geometría va cambiando a medida que avanza el algoritmo.

Podemos describir el algoritmo utilizado para construir un l -mínimo local, de la siguiente manera:

- 1) Inicialmente $u = u^0$, es decir $u = 0$ en los nodos interiores.
- 2) Buscar un nodo j a agregar, es decir, buscar j tal que $u_j = 0$ y $\int \nabla \psi_i \nabla \psi_j \neq 0$ para algún i tal que $u_i > 0$. Nos referimos a tales nodos como nodos potables.
- 3) Construir la función w tal que:
 - $w_i = u_i = u_i^0$ en nodos del borde,
 - $w_i > 0$ si $u_i > 0$ en nodos internos o $i = j$,
 - $w_j = 0$ en otros nodos internos,
 que sea armónica discreta en los nodos internos donde es positiva.
 En la nueva implementación utilizamos una descomposición de Cholesky para resolver el sistema.
- 4) Calcular $J_h(w)$
 - Si $J_h(w) < J_h(u)$ agregamos nodo j a la lista de positivos, hacemos $u = w$ y volvemos a (2).
 - Si $J_h(w) \geq J_h(u)$ buscamos otro nodo potable. Si no hay más nodos potables, u es un l -mínimo local y terminamos.

El l -mínimo local así construido, satisface además que si $v_i \leq u_i$ y $v_i = u_i$ en el borde, entonces

$$J_h(v) > J_h(u)$$

siempre que la matriz $\int \nabla \psi_i \nabla \psi_j$ satisfaga el "principio del máximo"

$$\int \nabla \psi_i \nabla \psi_j \leq 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Una definición más adecuada de mínimo local (discreto) es:

Definición:

u es un mínimo local fuerte si

$$J_h(u) \leq J_h(v)$$

para toda $v = \sum v_i \psi_i$ (con $v_i = u_i^0$ en el borde) tal que: para todo $j \in \{i: v_i > 0\} \Delta \{i: u_i > 0\}$ se verifica que, para algún k con $\int \nabla \psi_j \nabla \psi_k \neq 0$:

a) $u_k > 0$ si $v_j > 0$

o

b) $v_k > 0$ si $u_j > 0$

Es claro que un mínimo local fuerte es un l-mínimo local.

La propiedad de mínimo local fuerte es más apropiada desde el punto de vista teórico pues, bajo ciertas condiciones, se puede probar que cuando el tamaño de la malla tiende a cero ($h \rightarrow 0$), los mínimos locales fuertes (discretos) convergen a un mínimo local continuo.

Sin embargo, desde el punto de vista computacional es muy difícil encontrar un algoritmo razonable para hallar mínimos fuertes locales. Actualmente estamos trabajando en este problema.

Algunos ejemplos numéricos.

1) Presentamos primero geometrías sencillas. Aquí

$$\Omega = \{(x,y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$u^0 = \max\{ax+by, 0\}, \text{ donde } a^2 + b^2 = 1$$

La malla utilizada es de (32×32) . (Figura 1).

Mostramos los resultados presentados ya en otros ENIEF, correspondientes a distintos valores de (a,b) , donde se indican algunas líneas de corriente.

En este caso se puede ver que el único mínimo local (continuo) es precisamente, $\max\{ax+by, 0\}$.

$a = 1, b = 0$, Figura 2.

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ Figura 3}$$

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ Figura 4}$$

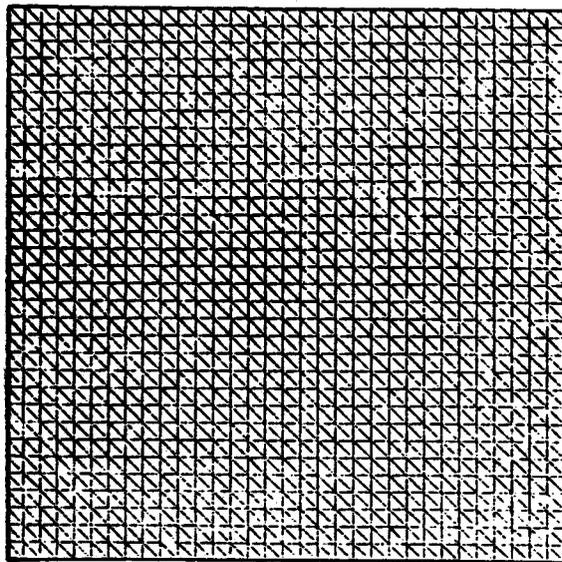


Figura 1

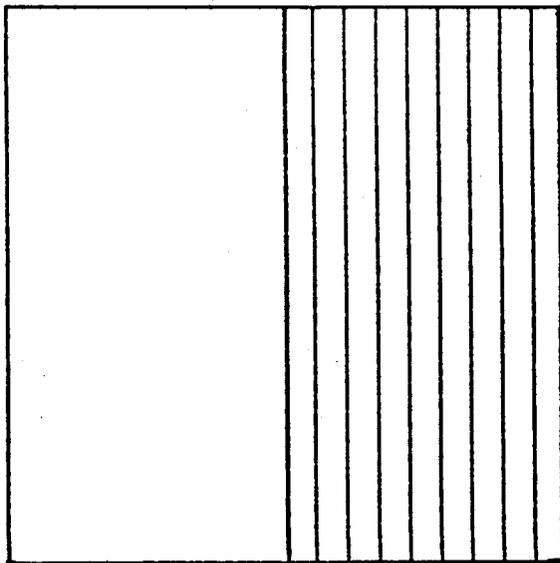


Figura 2

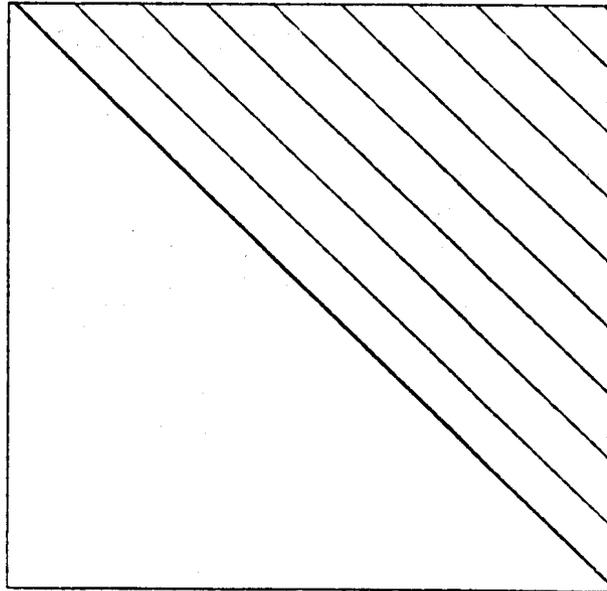


Figura 3

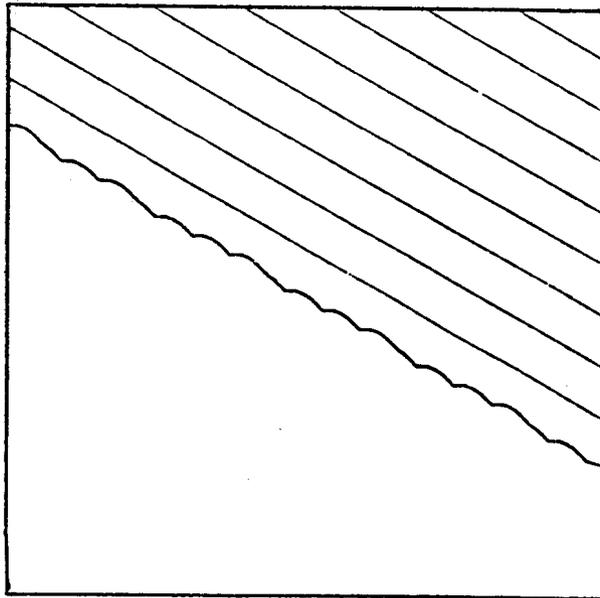


Figura 4

2. Bifurcación del flujo en una geometría de tipo T.

El flujo está dentro de la región:

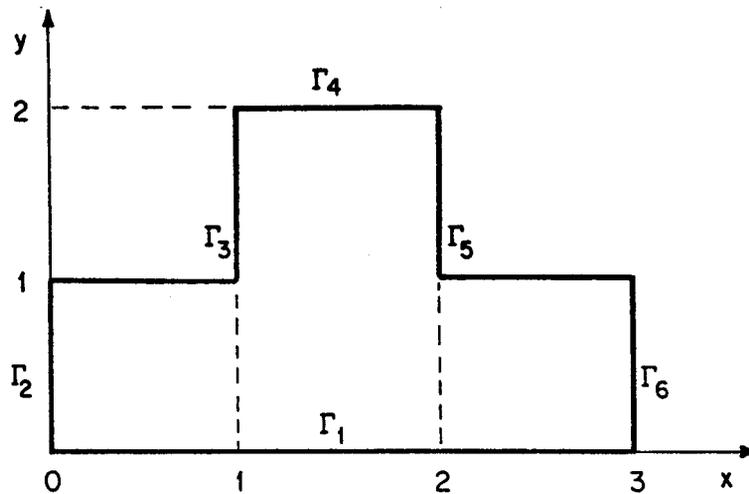


Figura 5

La malla utilizada puede verse en la Figura 6.

Los datos en el borde son:

$$\begin{array}{ll} u^0 = 1 & \text{en } \Gamma_1 \\ u^0 = 1-y & \text{en } \Gamma_2 \\ u^0 = 0 & \text{en } \Gamma_3 \\ u^0 = \max(0, x-1.5) & \text{en } \Gamma_4 \\ u^0 = 0.5 & \text{en } \Gamma_5 \\ u^0 = 1-0.5y & \text{en } \Gamma_6 \end{array}$$

El resultado de la aplicación del algoritmo se observa en la Figura 7.

Incluimos una salida gráfica con las velocidades correspondientes (Figura 8).

Comparamos este resultado con la aplicación de otro algoritmo que da una cota superior para los mínimos locales, es decir se encuentra v , denominada super-solución, tal que si u es l-mínimo local (o mínimo local fuerte), entonces $u \leq v$ (Figura 9).

Como se ve, el algoritmo de l-mínimo local es bastante bueno en este caso.

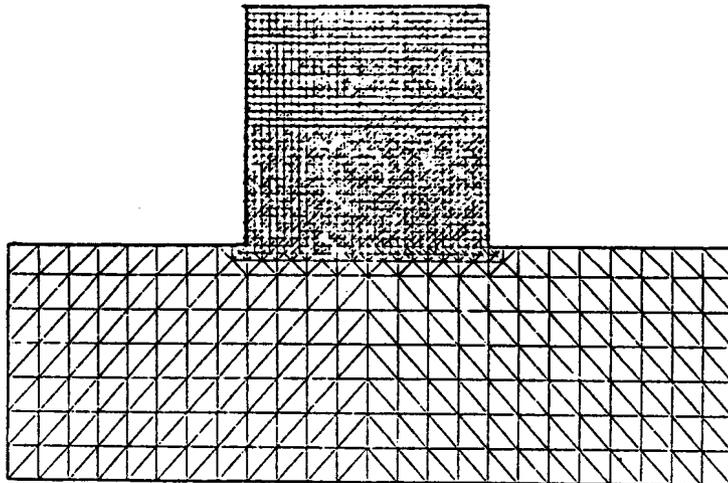


Figura 6

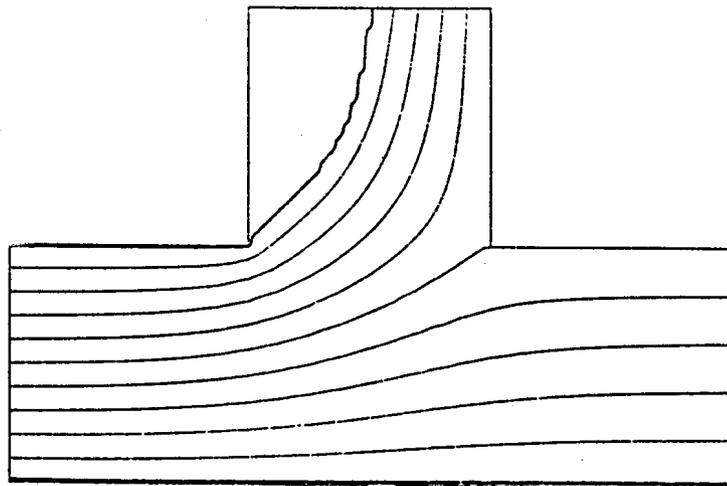


Figura 7

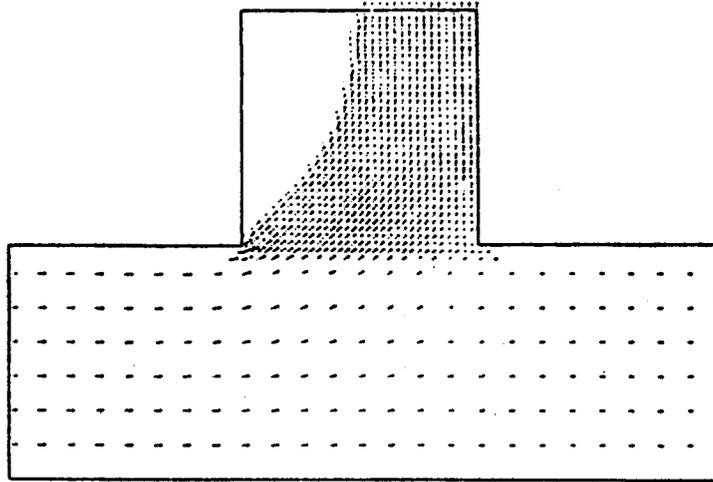


Figura 8

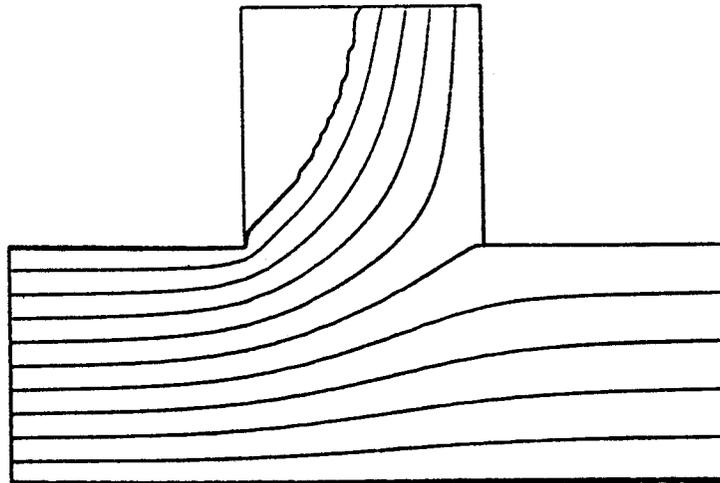


Figura 9

3) Flujo con un obstáculo.

La geometría aquí es:

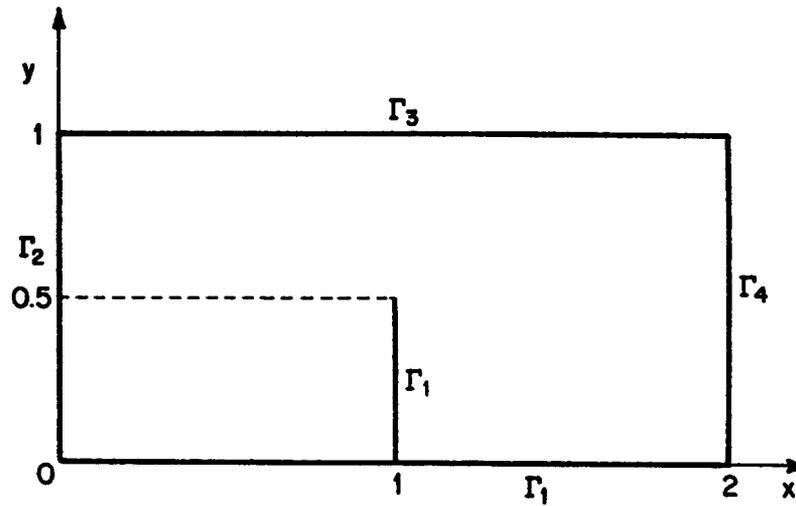


Figura 10

La malla utilizada puede verse en la Figura 11.

Tomamos distintos valores de u^0 :

a) $u^0 = 0$ en Γ_1
 $u^0 = 0.25 y$ en Γ_2
 $u^0 = 0.25$ en Γ_3
 $u^0 = \max(0, y - 0.75)$ en Γ_4

Figura 12

b) $u^0 = 0$ en Γ_1
 $u^0 = 0.5 y$ en Γ_2
 $u^0 = 0.5$ en Γ_3
 $u^0 = \max(0, y - 0.5)$ en Γ_4

Figura 13

c) $u^0 = 0$ en Γ_1
 $u^0 = 0.75 y$ en Γ_2
 $u^0 = 0.75$ en Γ_3
 $u^0 = \max(0, y - 0.25)$ en Γ_4

Figura 14

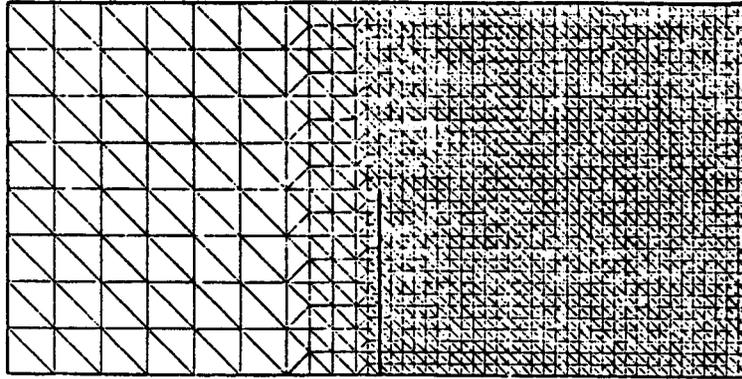


Figura 11

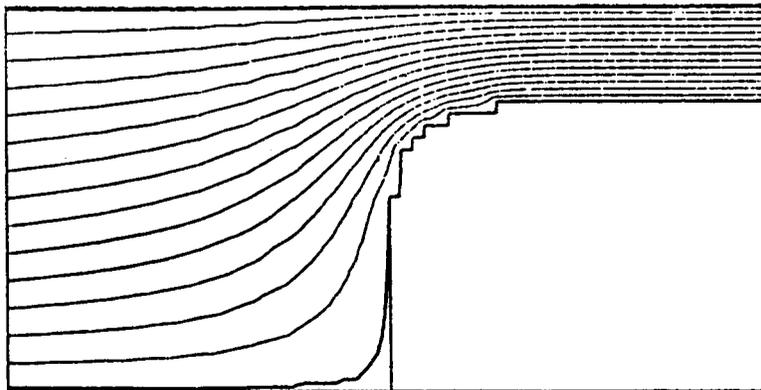


Figura 12

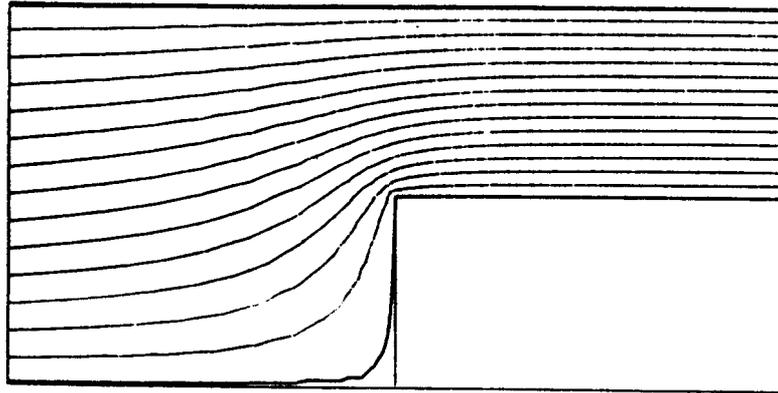


Figura 13

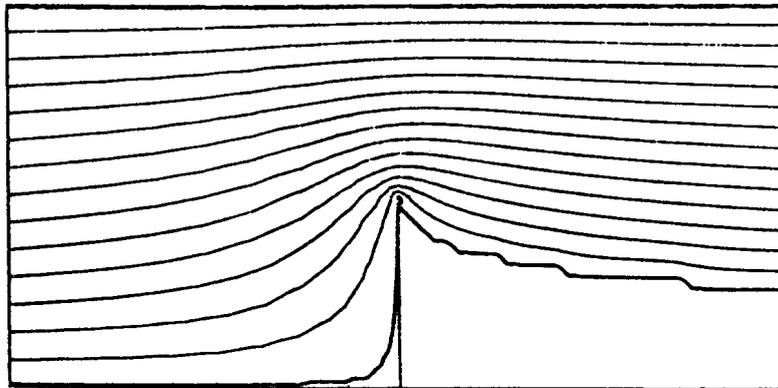


Figura 14

4) Otro tipo de flujo con obstáculo.

La geometría es:

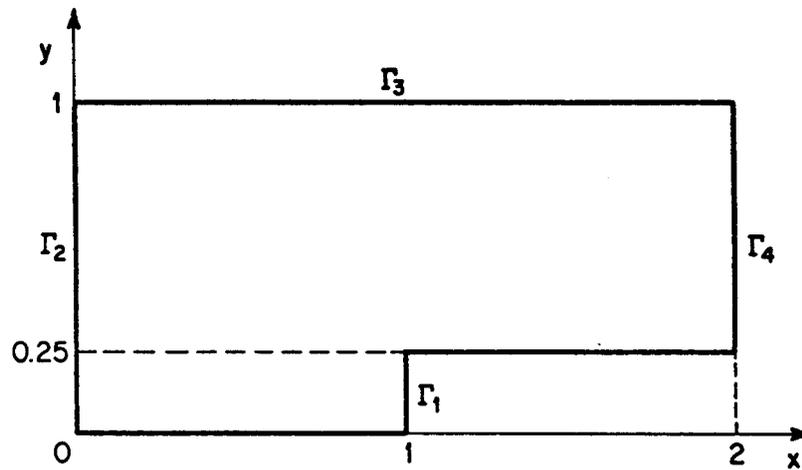


Figura 15

La malla puede verse en la Figura 16.

Los valores en el borde son:

$$u^0 = 0.625 \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$u^0 = \max(0, 0.625 - y) \quad \text{en } \Gamma_2$$

$$u^0 = 0 \quad \text{en } \Gamma_3$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en } \Gamma_4$$

Presentamos el resultado obtenido con el algoritmo de l-mínimo local (Figura 17) y el correspondiente al algoritmo para súper-solución (Figura 18).

Como se ve, en este caso el l-mínimo local no es una buena solución.

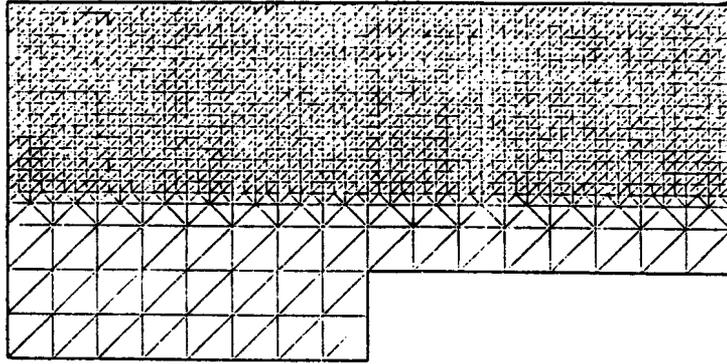


Figura 16

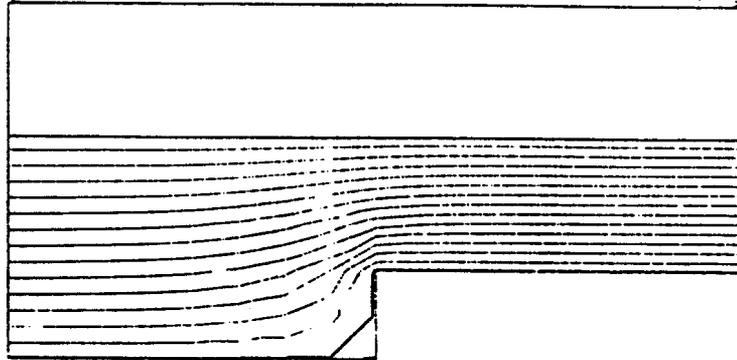


Figura 17

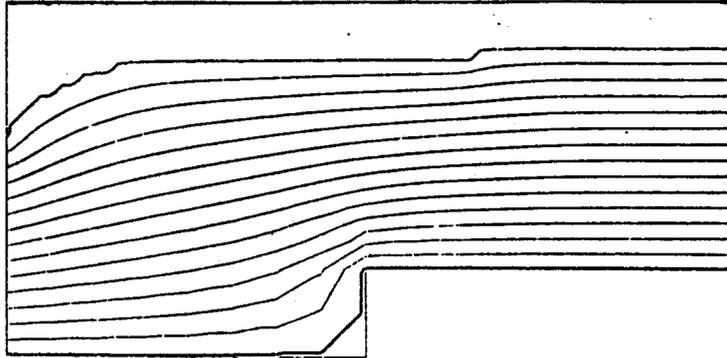


Figura 18

Conclusiones:

Si bien en algunas geometrías el l-mínimo local es una buena aproximación, es necesario desarrollar algoritmos para encontrar mínimos locales más generales.

Nota:

Toda la parte de pre y post-procesamiento se ha realizado con el sistema MODULEF.