

FORMULACION DE UN MODELO PARA ANALIZAR
EL COMPORTAMIENTO LINEAL DE UN ROTOR

Alejandro T. Brewer
Carlos A. Prato

Departamento de Estructuras, Facultad de
Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
U.N. de Córdoba
Córdoba - Argentina

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es representar el comportamiento de un rotor de sección circular. Para su formulación se utilizaron las Ecuaciones de Lagrange en conjunto con el Método de Elementos Finitos.

Como resultado se obtuvieron las ecuaciones que gobiernan al fenómeno, dejándose de lado los términos no lineales. Se analiza la influencia de masas que giran fuera del eje de rotación, que convierten las ecuaciones del movimiento en lineales de coeficientes variables.

En esta primera etapa no se tiene en cuenta el modelado de apoyos.

ABSTRACT

The aim of the present work is to represent the behaviour of a circular section shaft. For its formulation it have been used the Lagrange Equations and the Finite Elements Method.

As the result it has been obtained the Equations that rule the phenomenon paying no attention to the non linear terms. Also it has been analyzed the influence of masses rotating out of the axis of rotation; in this case the movement equations turn into variable coefficients linear equations.

In this first step it hasn't been taken into account the modelling of bearings.

INTRODUCCION

Muchos equipos industriales tienen maquinarias rotantes y debido a la sensibilidad de las mismas a las vibraciones, se hace necesario preveer su comportamiento real con modelos matemáticos cada vez más sofisticados. La descripción de un sistema como el esquematizado en la Fig. 1 requiere contemplar los siguientes aspectos:

- rotor: su masa, rigidez, efecto giróscopico, amortiguamiento interno, elementos asimilables a discos y masas excéntricas.
- apoyos: masa, rigidez, amortiguamiento de los soportes de cojinetes, propiedades de estos últimos en función de la velocidad de giro, etc.
- cargas actuantes: caracterización en tiempo y espacio.
- solución de las ecuaciones: de las que se obtienen las frecuencias naturales, desplazamientos y esfuerzos y la estabilidad del movimiento.

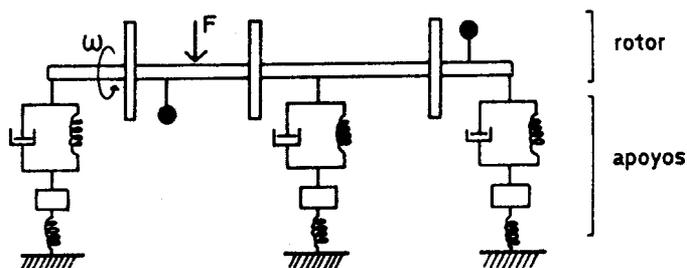


Fig. 1 Esquema de un rotor y sus apoyos

La literatura sobre este tema es bastante vasta, como así también los problemas que pueden presentarse y los métodos de resolución utilizados para abordarlos. Se han desarrollado trabajos que analizan la influencia en la estabilidad del movimiento al considerar el amortiguamiento de los apoyos [1], del amortiguamiento interno del rotor [2], de la asimetría en la rigidez de los apoyos y del eje [3]. Otros investigadores estudiaron problemas vinculados al desbalanceo [4] y [5], etc. Sobre aspectos de lubricación puede consultarse [6].

El objetivo del presente trabajo es presentar un modelo matemático que permita considerar los efectos introducidos por la masa en traslación y rotación y las propiedades elásticas asociadas a flexión del eje. El efecto giroscópico del rotor es representado por una matriz consistente y se puede también tratar masas desequilibradas y discos. En todo el desarrollo se tomaron como grados de libertad los desplazamientos y giros de puntos pertenecientes al eje geométrico del rotor lo cual, en el tratamiento de masas desequilibradas, introduce coeficientes periódicos en las ecuaciones de equilibrio.

Se muestra la influencia de la velocidad de giro en los desplazamientos en función del contenido de frecuencias de la excitación y la diferencia en los mismos al modelar el efecto giroscópico del rotor con matrices concentradas o consistentes. En esta primera etapa del desarrollo no se ha considerado la influencia del lubricante en los cojinetes, por lo que los resultados han de valorarse teniendo presente que se obtuvieron para apoyos rígidos.

FORMULACION DEL MODELO

Ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de Lagrange para sistemas no conservativos son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = F_{q_r} \quad (1)$$

en donde "L" es la función de Lagrange definida como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, $L = T - V$; "q" son las coordenadas generalizadas y " \dot{q}_r " sus derivadas respecto al tiempo. Estas ecuaciones se utilizarán para obtener las ecuaciones de equilibrio del rotor, considerar discos y masas desequilibradas.

Rotor

El árbol se subdivide en elementos conectados entre sí por puntos nodales. Si el movimiento en la dirección axial no se considera y se asume que el sistema es rígido a torsión, el número de grados de libertad por nudo se reduce a cuatro. La Fig. 2 muestra un elemento en el cual:

- x,y,z es un sistema de referencia inercial.
- i,j nudos inicial y final del elemento.
- u_k ($k = 1,2,3,4$) desplazamientos de los nudos según los ejes "x" y "z".
- ϕ_k ($k = 1,2,3,4$) giros de los nudos según los ejes "x" y "z".
- L longitud del elemento.
- δ densidad del material. El mismo se considera homogéneo e isotrópico.
- E módulo de elasticidad.
- R radio de la sección transversal del eje.
- A área de la sección transversal del eje.
- I momento de inercia diametral de áreas.

Se considera al elemento constituido por una sucesión de "discos" de longitud "dy", ver Fig. 3, cada uno de los cuales puede desplazarse en las direcciones de los ejes "x" y "z" y girar alrededor de ejes que pasan por su centro de masas. La posición de cada disco queda determinada por las siguientes coordenadas: x,y,z, ψ , θ y ϕ . Las tres primeras fijan la posición del centro de masas "o" del "disco". De e

llas, "y", permanece constante durante el movimiento. Las siguientes, conocidas como ángulos de Euler, se fijan teniendo en cuenta que: el sistema de coordenadas "x,y,z" se considera inercial; el marco "X₁, Y₁, Z₁", cuyo origen coincide con el centro de masas, se mueve manteniéndose siempre paralelo al "x, y, z"; los ejes "X, Y, Z", están rigidamente unidos al disco y su origen coincide también con "o".

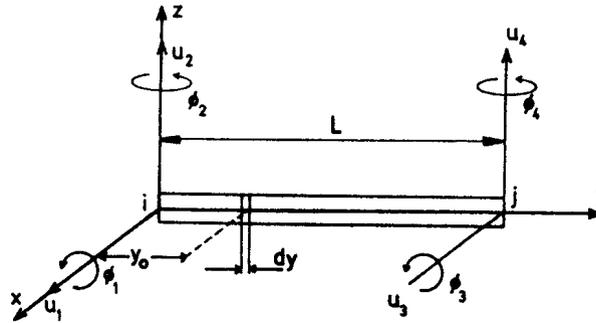


Fig. 2 Nudos y grados de libertad del elemento

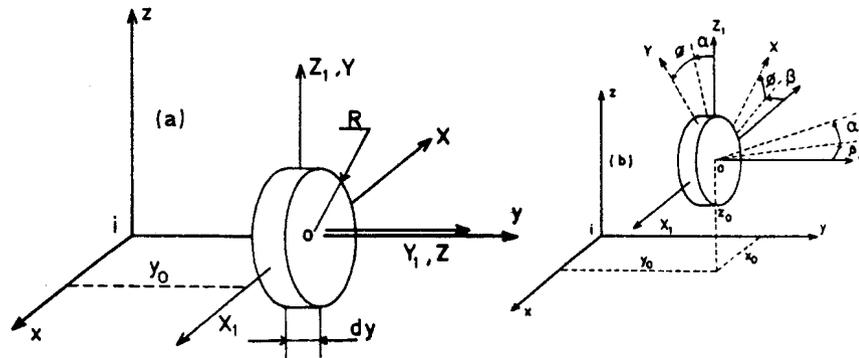


Fig. 3 Coordenadas para determinar desplazamientos y giros de cada sección del rotor

La Fig. 3-a, muestra la posición de equilibrio del disco. En ella, $x = z = 0$ y los ángulos de Euler: $\psi = \pi$, $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$. Cuando el disco sale de su posición de equilibrio, Fig. 3-b, su origen se desliza al punto de coordenadas x_0, y_0, z_0 y el marco "X, Y, Z" gira respecto al sistema "X₁, Y₁, Z₁" los siguientes ángulos

$$\psi = \pi + \beta \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \phi = \phi \quad (2)$$

Los ángulos "α" y "β" permanecerán pequeños, lo que nos permite tratarlos como magnitudes vectoriales [7].

La función Lagrangiana para el elemento está dada por

$$L_e = \frac{A}{2} \delta \int_0^L (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) dy + \frac{A R^2}{8} \delta \int_0^L (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) dy + \frac{A^2 R}{4} \delta \int_0^L (\dot{\phi} + \alpha \dot{\beta})^2 dy - \frac{E I}{2} \int_0^L \left(\left(\frac{d^2 x}{dy^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right)^2 \right) dy \quad (3)$$

en la cual el primer término es la energía cinética del elemento debida a la traslación, el segundo y tercero representan la energía cinética causada por las rotaciones y el último es la energía potencial elástica de flexión.

Los desplazamientos en el interior del elemento se aproximan utilizando funciones polinómicas

$$x = a_r y^r \quad z = b_r y^r \quad (r = 0, 1, 2, 3) \quad (4)$$

las que permiten expresar los desplazamientos y giros de puntos situados sobre el eje geométrico del elemento en función de los correspondientes a sus extremos

$$\begin{aligned} x &= \phi_1 u_1 + \phi_2 u_3 - \phi_3 \phi_2 - \phi_4 \phi_4 \\ z &= \phi_1 u_2 + \phi_2 u_4 + \phi_3 \phi_1 + \phi_4 \phi_3 \\ \alpha &= \phi_1' u_2 + \phi_2' u_4 + \phi_3' \phi_1 + \phi_4' \phi_3 \\ \beta &= -\phi_1' u_1 - \phi_2' u_3 + \phi_3' \phi_2 + \phi_4' \phi_4 \end{aligned} \quad (5)$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1 - 3 \eta^2 + 2 \eta^3 ; \quad \phi_2 = 3 \eta^2 - 2 \eta^3 ; \quad (\eta = \frac{y}{L}) \\ \phi_3 &= L \eta (1 - \eta)^2 ; \quad \phi_4 = L \eta^2 (\eta - 1) \end{aligned} \quad (6)$$

En las (5), las φ' se obtienen derivando las (6) respecto de "y"; y las velocidades ẋ, ż, α̇, β̇, derivando las (5) respecto del tiempo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \phi_1 \dot{u}_1 + \phi_2 \dot{u}_3 - \phi_3 \dot{\phi}_2 - \phi_4 \dot{\phi}_4 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Reemplazando las (7) y las (5) en la (3) se obtiene la función Lagrangiana para el elemento, y llevando esta última a la (1) se obtiene la ecuación de equilibrio del mismo

$$[[M] + [T]] [\ddot{u}] + [G] [\dot{u}] + [K] [u] = [F] \quad (8)$$

Las matrices [M], [T], [G] y [K] son las siguientes

$$[M] = m_e$$

$\frac{13}{35}$	0	0	$\frac{11L}{210}$	$\frac{9}{70}$	0	0	$\frac{13L}{420}$
	$\frac{13}{35}$	$\frac{11L}{210}$	0	0	$\frac{9}{70}$	$\frac{-13L}{420}$	0
		$\frac{L^2}{105}$	0	0	$\frac{13L}{420}$	$\frac{-L^2}{140}$	0
			$\frac{L^2}{105}$	$\frac{13L}{-420}$	0	0	$\frac{-L^2}{140}$
				$\frac{13}{35}$	0	0	$\frac{11L}{210}$
	SIMETRICA				$\frac{13}{35}$	$\frac{11L}{-210}$	0
						$\frac{L^2}{105}$	0
							$\frac{L^2}{105}$

$$[G] = \omega_z m_e \frac{R^2}{2}$$

0	$\frac{-6}{5L^2}$	$\frac{-1}{10L}$	0	0	$\frac{6}{5L^2}$	$\frac{-1}{10L}$	0
	0	0	$\frac{-1}{10L}$	$\frac{-6}{5L^2}$	0	0	$\frac{-1}{10L}$
		0	$\frac{-2}{15}$	$\frac{-1}{10L}$	0	0	$\frac{1}{30}$
			0	0	$\frac{-1}{10L}$	$\frac{-1}{30}$	0
				0	$\frac{6}{5L^2}$	$\frac{1}{10L}$	0
	ANTISIMETRICA				0	0	$\frac{1}{10L}$
						0	$\frac{-2}{15}$
							0

$$(9); [T] = m_e \frac{R^2}{4}$$

$\frac{6}{5L^2}$	0	0	$\frac{-1}{10L}$	$\frac{-6}{5L^2}$	0	0	$\frac{-1}{10L}$
	$\frac{6}{5L^2}$	$\frac{1}{10L}$	0	0	$\frac{-6}{5L^2}$	$\frac{1}{10L}$	0
		$\frac{2}{15}$	0	0	$\frac{-1}{10L}$	$\frac{-1}{30}$	0
			$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10L}$	0	0	$\frac{-1}{30}$
				$\frac{6}{5L^2}$	0	0	$\frac{1}{10L}$
	SIMETRICA				$\frac{6}{5L^2}$	$\frac{-1}{10L}$	0
						$\frac{2}{15}$	0
							$\frac{2}{15}$

$$(11); [K] = EI$$

$\frac{12}{L^3}$	0	0	$\frac{-6}{L^2}$	$\frac{-12}{L^3}$	0	0	$\frac{-6}{L^2}$
	$\frac{12}{L^3}$	$\frac{6}{L^2}$	0	0	$\frac{-12}{L^3}$	$\frac{6}{L^2}$	0
		$\frac{4}{L}$	0	0	$\frac{-6}{L^2}$	$\frac{2}{L}$	0
			$\frac{4}{L}$	$\frac{6}{L^2}$	0	0	$\frac{2}{L}$
				$\frac{12}{L^3}$	0	0	$\frac{6}{L^2}$
	SIMETRICA				$\frac{12}{L^3}$	$\frac{-6}{L^2}$	0
						$\frac{4}{L}$	0
							$\frac{4}{L}$

en donde m_e es la masa del elemento: $m_e = \delta A L$. El significado de los términos de (8) es el siguiente

- $[M]$ $[U]$ son las fuerzas debidas a la traslación de la masa del elemento.
- $[T]$ $[\dot{u}]$ representan las fuerzas originadas en la rotación de la masa alrededor de ejes diametrales.
- $[G]$ $[\ddot{u}]$ representan las fuerzas producidas por el cambio de dirección en el vector que mide la cantidad de movimiento angular.
- $[K]$ $[u]$ son las fuerzas elásticas asociadas a la flexión del elemento.
- u, \dot{u}, \ddot{u} desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los grados de libertad del elemento (ver Fig. 2).
- $[u]^T = [u_1 \ u_2 \ \phi_1 \ \phi_2 \ u_3 \ u_4 \ \phi_3 \ \phi_4]$
- $[F]$ vector de cargas nodales.

Discos

En el caso de que el rotor posea elementos que puedan ser asimilables a discos, su contribución a la función Lagrangiana estará dada por

$$L_d = T = \frac{1}{2} m_d (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \left\{ I_x^p (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_z^p (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 \right\} \quad (13)$$

en la que m_d es la masa del disco, I_x^p, I_z^p son los momentos de inercia principales del disco respecto a los ejes "x" y "z" fijos al mismo (Fig. 3); \dot{x} y \dot{z} son las velocidades del centro de masas del disco según los ejes "x" y "z" y ψ, θ y ϕ son los ángulos de Euler. Considerando la (2), que los ángulos α y β permanecen pequeños y que el disco está ubicado en el nudo "i", la (13) queda

$$L_d = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) + \frac{1}{2} I_x^p (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) + \frac{1}{2} I_z^p (\dot{\phi} + \dot{\phi}_2 \phi_1)^2 \quad (14)$$

Reemplazando la (14) en (1), teniendo en cuenta que al igual que para el caso anterior no actúan cuplas en el eje axial, y tomando como coordenadas generalizadas a los grados de libertad nodales se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio para el disco

$$[M_d] [\ddot{u}] + [G_d] [\dot{u}] = [F] \quad (15)$$

en donde

- $[M_d]$ tiene en cuenta los efectos asociados a la masa en traslación y rotación.
- $[G_d]$ matriz representativa del efecto giroscópico del disco.

- \dot{u}_i , u_i velocidades y aceleraciones de los grados de libertad del nudo "i".
- $[F]$ vector de fuerzas actuantes en el nudo "i".

Las matrices son las siguientes

$$[M_d] = \begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 & 0 \\ \text{SIMET.} & I_X^P & 0 & \\ & & & I_X^P \end{bmatrix} ; \quad [G_d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{ANTIS.} & 0 & -\omega_z I_Z^P & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Masas que giran fuera del eje de rotación

La Fig. 4 muestra una masa "m" que se considera rigidamente unida al marco "X,Y,Z". La posición de "m" en este sistema queda determinada por sus coordenadas: $X = X_m$, $Y = Y_m$, $Z = Z_m$. Al igual que en los casos anteriores, el marco "X, Y, Z", puede desplazarse y rotar; (ver Fig. 4-b).

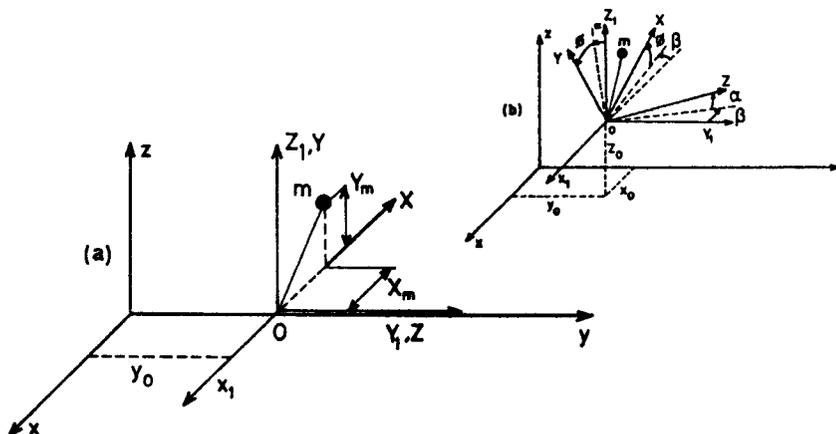


Fig. 4 Coordenadas de una masa genérica "m"

La expresión general de la energía cinética de un cuerpo rígido libre es

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z - 2 I_{xy} \omega_x \omega_y - 2 I_{xz} \omega_x \omega_z - 2 I_{yz} \omega_y \omega_z) +$$

$$+ m [v_x (\omega_y \bar{z} - \omega_z \bar{y}) + v_y (\omega_z \bar{x} - \omega_x \bar{z}) + v_z (\omega_x \bar{y} - \omega_y \bar{x})] \quad (17)$$

en donde

- m es la masa del cuerpo en cuestión.
- $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$, son los momentos y productos de inercia del cuerpo respecto a los ejes "X,Y,Z", que se consideran rigidamente unidos al mismo.
- $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ son las coordenadas del centro de masas del cuerpo respecto al sistema "X,Y,Z".
- $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ representan las componentes de la velocidad del punto "o" medidas respecto al sistema "x,y,z" que se supone inercial.
- v_x, v_y, v_z componentes de la velocidad del origen "o" según las direcciones instantáneas "X,Y,Z".
- $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ componentes de la velocidad angular " ω " del marco "X,Y,Z" respecto al sistema inercial "x,y,z" expresadas según las direcciones instantáneas del sistema "X,Y,Z".

La expresión (17) se simplifica bastante cuando el origen "o" del sistema "X,Y,Z" coincide con el centro de masas del cuerpo y cuando dicho sistema está orientado de tal forma que sus ejes son los principales de inercia. Esta fue la situación en los apartados anteriores.

Las componentes de la velocidad angular " ω ", ver [7], en función de los ángulo de Euler son

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + \dot{\theta} \operatorname{cos} \phi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \operatorname{cos} \theta + \dot{\theta} \end{aligned} \quad (18)$$

y las componentes de la velocidad "v" del origen "o" según "X,Y,Z", ver [8], están dadas por:

$$[v]_{XYZ} = [C] [v]_{xyz} \quad (19)$$

en donde la matriz de rotación [C] que relaciona los sistemas "X,Y,Z" y "x,y,z" es

$$[C] = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \psi \operatorname{cos} \phi - \operatorname{sen} \psi \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi & \operatorname{sen} \psi \operatorname{cos} \phi + \operatorname{cos} \psi \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \phi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ - \operatorname{cos} \psi \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \psi \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi & - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \operatorname{cos} \psi \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \phi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \phi \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi & - \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \psi & \operatorname{cos} \theta \end{bmatrix} \quad (20)$$

Teniendo en cuenta que los ángulos " α " y " β " permanecen pequeños, reemplazando (2) en (20) y (18), sustituyendo en (17) y llevando esta última a (1), se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio de la masa "m" como

$$[M_m] [\ddot{u}] + [G_m] [\dot{u}] = [F] \quad (21)$$

en la cual el significado de los vectores $[\ddot{u}]$ y $[\dot{u}]$ es análogo al de la expresión (15). Las matrices y el vector de cargas en el nudo "i" son los siguientes

$$[M_m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m (X_m \text{ sen } \phi + Y_m \text{ cos } \phi)^2 & m [(X_m^2 - Y_m^2) \text{ sen } \phi \text{ cos } \phi + X_m Y_m (\text{cos }^2 \phi - \text{sen }^2 \phi)] \\ 0 & 0 & m [(X_m^2 - Y_m^2) \text{ sen } \phi \text{ cos } \phi + X_m Y_m (\text{cos }^2 \phi - \text{sen }^2 \phi)] & m (X_m \text{ sen } \phi - Y_m \text{ cos } \phi)^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[G_m] = m \omega_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 [(X_m^2 - Y_m^2) f_2 + X_m Y_m f_1] & [(X_m^2 - Y_m^2) f_1 - 4 X_m Y_m f_2] - R_m^2 \\ 0 & 0 & [(X_m^2 - Y_m^2) f_1 - 4 X_m Y_m f_2] + R_m^2 & 2 [(Y_m^2 - X_m^2) f_2 - X_m Y_m f_1] \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 + m \omega_z^2 (Y_m \text{ sen } \phi - X_m \text{ cos } \phi) \\ F_2 + m \omega_z^2 (X_m \text{ sen } \phi + Y_m \text{ cos } \phi) \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

en las cuales

- ω_z es la velocidad angular del árbol
- ϕ^z es el ángulo girado $\phi = \omega_z t$. (Fig. 5)
- $f_1 = \text{cos }^2 \phi - \text{sen }^2 \phi$
- $f_2 = \text{sen } \phi \text{ cos } \phi$
- F_1, F_2 fuerzas actuantes en el nudo "i"
- τ_1, τ_2 momentos actuantes en el nudo "i"
- $R_m^2 = X_m^2 + Y_m^2$

Los elementos de la matriz M, dada en (22), que ocupan las posiciones i, j (i, j = 3, 4) son variables, en forma periódica, con el ángulo ϕ y su periodo es π . Estos términos representan los momentos y productos de inercia de la masa "m" respecto al sistema inercial "x, z". En forma análoga al caso anterior, los elementos de la matriz (23) son periódicos en π . En la (24) los dos primeros elementos del vector de cargas contienen términos que son las componentes según los ejes "x" y "z" de la fuerza centrífuga ($F_C = m \omega_z^2 R_m$) generada por la masa "m" (Fig. 5) y su periodo es 2π .

La Fig. 5 muestra dos masas " m_1 " y " m_2 " que giran con velocidad angular ω_z . La masa " m_1 " se encuentra adelantada respecto a la " m_2 " un ángulo igual a $\pi/12$.

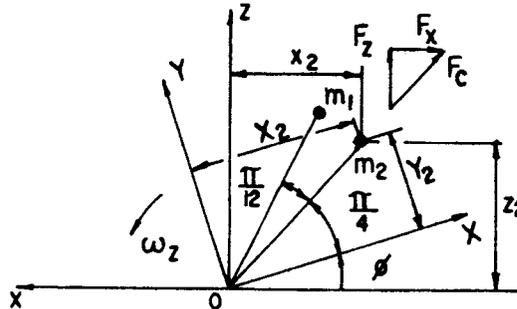


Fig. 5

La Fig. 6 muestra la variación de la fuerza en el eje "x" debido a cada masa, la Fig. 7 la variación de los elementos de la matriz (22) y la Fig. 8 la de los elementos ubicados en la posición 33 y 34 de la matriz (23).

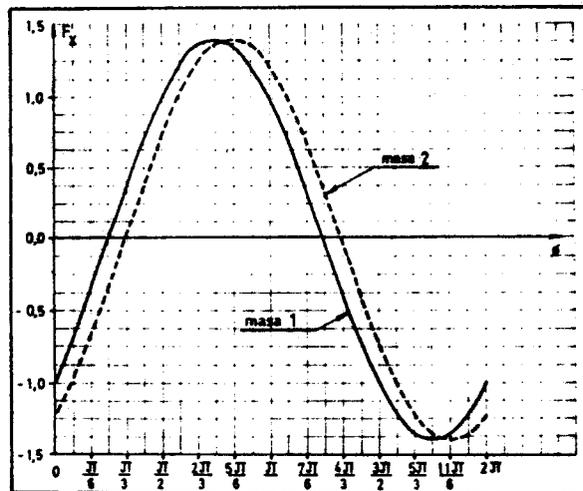


Fig. 6 Componentes según el eje "x" de las fuerzas centrífugas debidas a las masas " m_1 " y " m_2 "

De estos gráficos se desprende que si " m_1 " está desfasada un ángulo " π " respecto de " m_2 ", se anulan los términos originados en la fuerza centrífuga y se suman en fase los de las matrices (22) y (23). La simetría completa se logra con

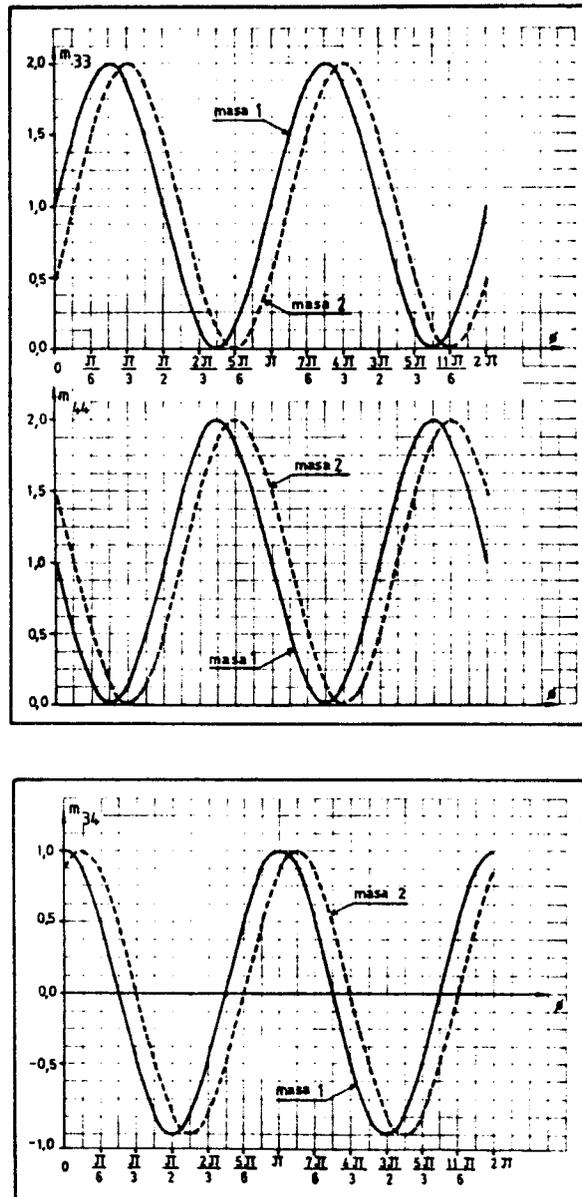


Fig. 7 Coeficientes de la matriz $[M_m]$
en función del ángulo girado

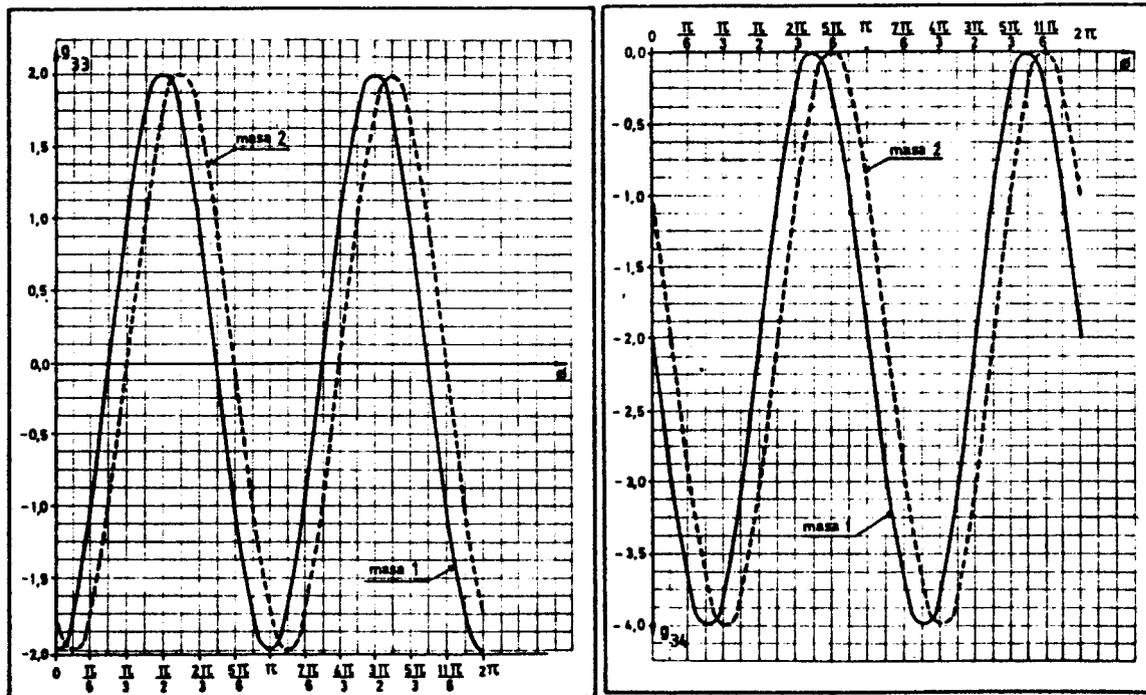


Fig. 8 Variación de los elementos 33 y 34 de la matriz $[G_m]$ en función del ángulo girado

4 masas espaciadas en $\pi/2$. En tal caso se eliminan las fuerzas centrífugas en (24) y las (22) y (23) toman la forma de las (16).

SOLUCIONES DE LA ECUACION DE MOVIMIENTO

Utilizando los elementos dados por las (9) a (12), las (16), y las (22) a (24), se puede modelar un rotor como el indicado en la Fig. 1. La ecuación de equilibrio resultante es

$$[M] [\ddot{u}] + [G] [\dot{u}] + [K] [u] = [F] \quad (25)$$

en la cual las matrices globales $[M]$, $[G]$, y $[K]$ representan la masa, el efecto giroscópico y la rigidez del sistema respectivamente. $[F]$ es el vector de fuerzas.

Como se vio en el apartado anterior, una masa desequilibrada introduce términos periódicos en las matrices $[M]$ y $[G]$ y además, esta última pierde su antisimetría. Para este caso, si el vector de cargas $[F]$ es periódico y puede desarrollarse en Series de Fourier, de tal modo que, la componente "i" del mismo se escribe como

$$f_i(t) = \frac{f_{0i}}{2} + f_{1ik} \cos(k\omega t) + f_{2ik} \sin(k\omega t) \quad (26)$$

(k = 1, 2, ..., ∞)

entonces, la solución de la ecuación (25) puede buscarse, ver [10], proponiendo

$$u_i(t) = \frac{A_{0i}}{2} + A_{ik} \cos(k\omega t) + B_{ik} \sin(k\omega t) \quad (27)$$

Derivando dos veces término a término la (27) y sustituyendo en (25) se obtienen los coeficientes A y B resolviendo los siguientes sistemas

$$[K] [A_0] = [F_0] \quad (28)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} [K] - k^2\omega^2 [M] & k\omega [G] \\ \hline \text{ANTIS.} & [K] - k^2\omega^2 [M] \end{array} \right] \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Para el caso de que los coeficientes de la ecuación (25) sean constantes, la solución puede hallarse utilizando un método de descomposición modal propuesto por Meirovitch [9] o utilizando el método de respuesta en frecuencia [10-11].

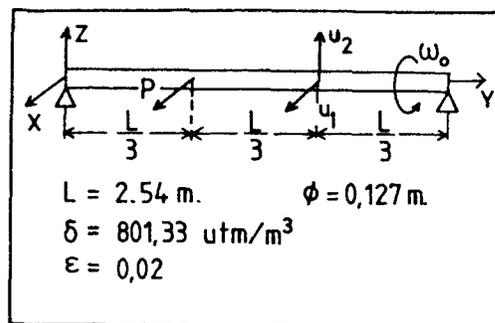
INFLUENCIA DE LA VELOCIDAD DE GIRO

La influencia que en el comportamiento a flexión de un rotor de sección circular tiene la velocidad de giro del árbol, se pone de manifiesto a través de las matrices de efecto giroscópico dadas por las (11), (16-b) y (23). La Fig. 9-a muestra un rotor sometido a la acción de un impulso contenido en el plano "x,y" localizado a L/3 del apoyo izquierdo y la Fig. 9-b la relación de las funciones de transferencia, en es

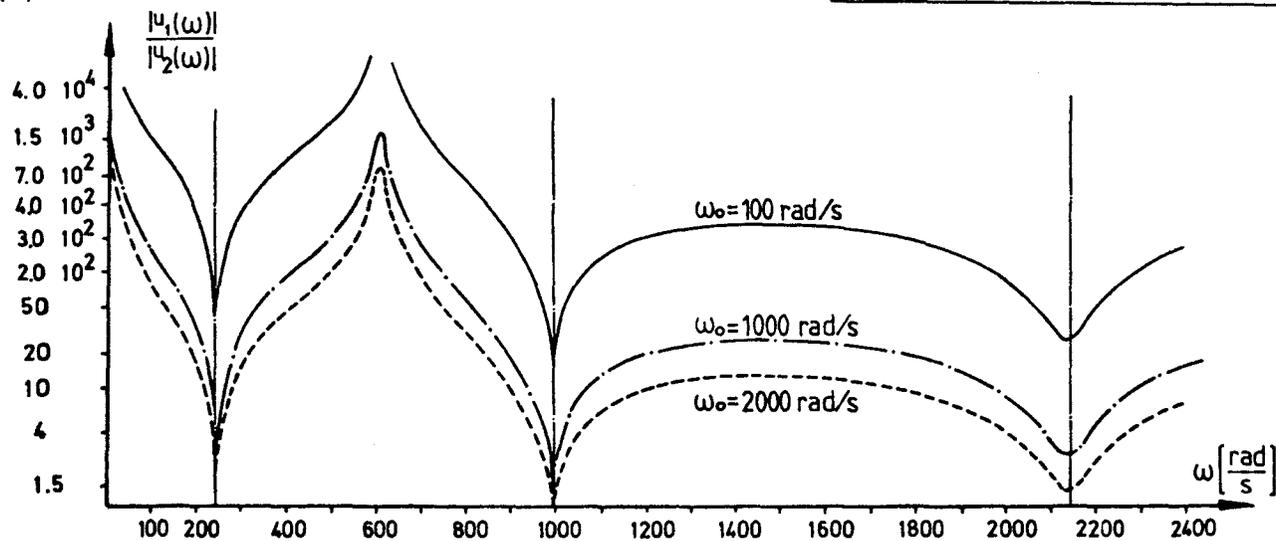
Fig. 9-a Esquema del rotor analizado

Fig. 9-b Relación de las funciones de transferencia de los grados de libertad "u₁" y "u₂".

(a)



(b)



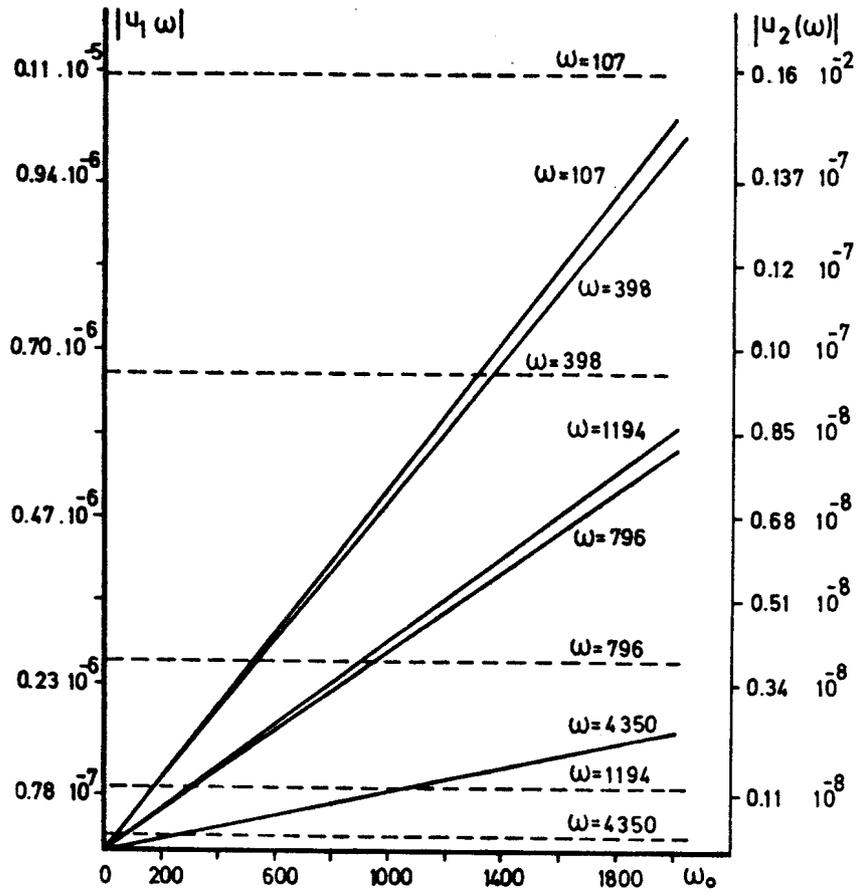


Fig. 10 Comportamiento de $u_1(\omega)$ y $u_2(\omega)$ con la variación de la velocidad de giro

cala logarítmica, de los grados de libertad " u_1 " y " u_2 " del nudo ubicado a $L/3$ del apoyo derecho. Se han graficado los resultados para tres velocidades de giro del eje: 100, 1000 y 2000 rad/s. Para modelar el efecto giroscópico se utilizaron matrices concentradas para el rotor, representando tal propiedad por discos nodales (16-b). Se observa que para la frecuencia de la excitación $\omega = 0$, que corresponde a cargas estáticas, el sistema se comporta idénticamente para cualquier velocidad. Es decir, $u_2 = 0$ y u_1 toma el valor correspondiente para satisfacer equilibrio. Analíticamente puede verse en la expresión de la función de transferencia dada por

$$[-\omega^2 [M] + i\omega [G] + [K]] [H(\omega)] = [1] \quad (30)$$

Cuando la frecuencia de la excitación se acerca a una frecuencia natural el cociente u_1/u_0 tiende a 1. Puede verse que la respuesta en el plano " x, y " está acoplada con la del plano " y, z " y que depende no sólo de la velocidad de giro, sino también del contenido de frecuencia de la excitación.

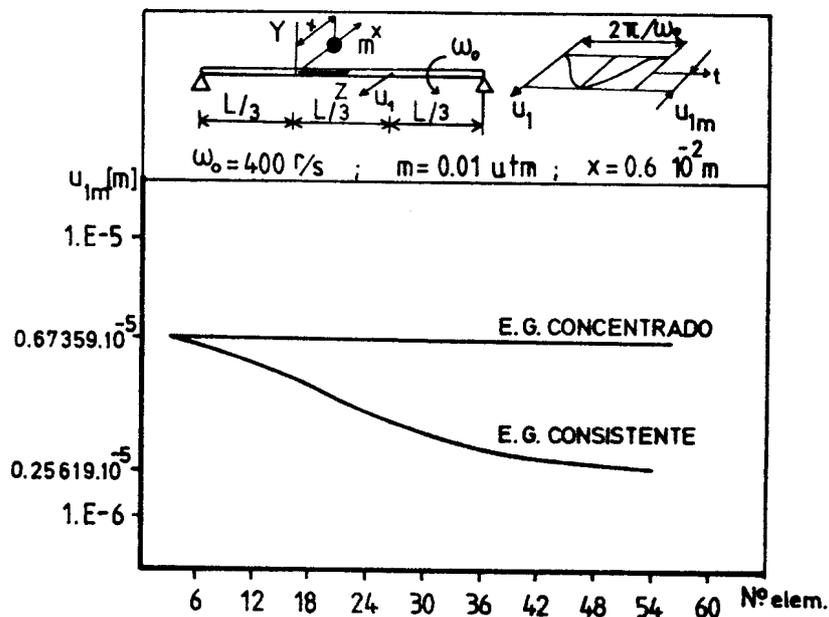


Fig. 11

La Fig. 10 muestra la variación de los desplazamientos $u_1(\omega)$ y $u_2(\omega)$ cuando cambia la velocidad de giro para distintas frecuencias. Se puede observar que, mientras la función de transferencia del grado de libertad u_1 permanece casi constante, la de u_2 crece linealmente con la velocidad de giro.

En la Fig. 11 se representa el valor máximo del desplazamiento alcanzado en el grado de libertad " u_4 " cuando el rotor posee una masa desequilibrada de 0,01 utm. y gira a 400 r/s. En este caso se utilizó el esquema de cálculo presentado en las (27) a (29). Se compara la solución utilizando versiones concentradas y consistentes para el efecto giroscópico. Se puede observar que los resultados difieren bastante y que utilizando e.g. consistente se necesitan más elementos para lograr convergencia en los resultados. Con matrices de efecto giroscópico concentrado no se observa un corrimiento apreciable en las frecuencias naturales del árbol al variar la velocidad de giro, por lo que podrían calcularse sin tener en cuenta la misma. Resultados análogos fueron obtenidos por Guether [12].

REFERENCIAS

- [1] Lund, W.L. "The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings With Flexible, Damped Supports", Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, 1965, pags. 911-920.
- [2] Bucciarelli, L.L. "On the Instability of Rotating Shafts Due to Internal Damping", Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, 1982, pags. 425-428.
- [3] Ota, H. y Mizutani, K. "Influence of Unequal Pedestal Stiffness on the Instability Regions of a Rotating Asymmetric Shaft", Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, 1978, pags. 400-408.
- [4] Victor, F. y Ellyin, F. "Acceleration of Unbalanced Rotor Through the Resonance of Supporting Structure", Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, 1981, pags. 419-424.
- [5] Tang, T. M. y Trumpler, P.R., "Dynamics of Synchronous-Precessing Turborotors with Particular Reference to Balancing", Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, 1968, pags. 25-31.
- [6] Gross, W. A. (editor), Fluid Film Lubrication, J. Wiley 1980.
- [7] Crandall, Karnopp, Kurtz y Pridmore-Brown, Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems, Mc. Graw Hill, 1968, cap. 4.
- [8] Wells, D. A., Dinámica de Lagrange, Mc. Graw Hill, 1972, cap. 8.
- [9] Meirovitch, L., "A Modal Analysis for the Response of Linear Gyroscopic Systems", Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, 1975, pags 446-450.
- [10] Clough, R.W. y Penzien J., Dynamics of Structures, Mc Graw Hill, 1975.

- |11| Brigham, E.O., The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, 1974.
- |12| Guether, T.G. y Lovejoy, D.C. "Analysis for Calculating Lateral Vibration Characteristics of Rotating Systems with any Number of Flexible Supports", Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, 1961, pags. 591-600.