

TÉCNICA DE REDUÇÃO EM ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR  
SUBESTRUTURAÇÃO COM ELEMENTOS FINITOS

Mario Pinotti Junior

Departamento de Engenharia Mecânica  
Escola de Engenharia de São Carlos - USP.  
São Carlos - SP. - Brasil

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é o de testar a validade de aplicação da técnica de redução em problemas de dinâmica estrutural resolvidos por subestruturação. É utilizado um programa de subestruturação que com algumas alterações passa a fazer também a condensação (Transformação Dinâmica). São apresentados alguns exemplos e os resultados obtidos por subestruturação, subestruturação-condensação e elementos finitos são comparados.

ABSTRACT

The objective of this work is the test of validity of the reduction technique in problems solved by substructuring. It is utilized a substructuring program which with changes became able to do condensation as well (Dynamic Transformation). It was show examples and the results obtained by substructuring, substructuring - condensation and by finite element methods are compared.

## 1. INTRODUÇÃO

Na análise de estruturas sujeitas a vibração, se faz necessário a determinação das frequências naturais e modos de vibrar das mesmas. Para isso, emprega-se com mais frequência o método dos elementos finitos. Sua aplicação entretanto pode gerar equações matriciais de elevada ordem o que pode demandar computador de grande porte, grande tempo de computação, problemas de convergência e de precisão na obtenção dos autovalores calculados.

Para diminuir-se esse problema a solução está em reduzir-se o tamanho da equação matricial utilizada na obtenção dos autovalores e autovetores. Duas interessantes alternativas tem sido usadas com essa finalidade: substruturação [1], [4], [6], [7] e condensação [2],[3],[5],[7].

Neste trabalho, da mesma maneira que em [7], pretende-se usar a alternativa de união dos dois métodos. Primeiramente é aplicado o método de substruturação e posteriormente, sobre a "equação matricial global" (da união das subestruturas) é feita uma redução de coordenadas conseguinte-se com isso uma equação matricial de ordem bastante reduzida.

O presente trabalho utiliza um programa de elementos finitos com modificações feitas por PINOTTI e SANTOS [6] que introduziu, no mesmo, substruturação para análise dinâmica. O método usado para isso foi o desenvolvido por Hurtz [1]. Nesse programa são introduzidas novas subrotinas para efetuar a redução de coordenadas pelo método exato segundo PAZ [5].

## 2. SUBESTRUTURAÇÃO-CONDENSAÇÃO

Do programa desenvolvido em [6] obtém-se a equação matricial global da união das  $j$  subestruturas:

$$[M] \{\ddot{y}\} + [K] \{y\} = \{0\} \quad (1)$$

onde:  $[M]$  = matriz massa simétrica não diagonal.

$[K]$  = matriz rigidez simétrica não diagonal.

$\{y\}$  = coordenadas generalizadas da estrutura.

Sobre a equação (1) é aplicada a Redução de Coordenadas e considerando-se  $\Omega$  um autovalor exato da equação (1) pode-se escrever:

$$[K] \{y\} - \Omega^2 [M] \{y\} = \{0\} \quad (2)$$

Para a solução da equação (2) a Redução pede que se pare-se  $\{y\}$  em  $\{y_k\}$ , coordenadas que ficarão, "masters", e  $\{y_r\}$ , coordenadas que sairão, "slaves" ficando em função de  $\{y_k\}$ , resultando a equação (2) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_{kk} & K_{kr} \\ K_{rk} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_k \\ y_r \end{Bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} M_{kk} & M_{kr} \\ M_{rk} & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_k \\ y_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Resolvendo-se a equação (3) para  $\{y_k\}$  e considerando-se uma frequência genérica  $\omega$  (frequência de redução) obtém-se:

$$\{y_r\} = [T] \{y_k\} \quad (4)$$

onde:

$$[T] = - [K_{rr} - \omega^2 M_{rr}]^{-1} [K_{kk} - \omega^2 M_{rk}] \quad (5)$$

O problema de autovalores reduzido fica então:

$$[\bar{K}] \{y_k\} - \omega^2 [\bar{M}] \{y_k\} = \{0\} \quad (6)$$

onde:

$$[\bar{K}] = [K_{kk}] [T] + [K_{rr}] \quad (7)$$

$$[\bar{M}] = [M_{kk}] [T] + [M_{rr}] \quad (8)$$

Para a continuidade da solução adota-se um valor pa  
ra  $\omega$ , calcula-se  $[\bar{M}]$  e  $[\bar{K}]$  e, então, determina o autova  
lor  $\Omega$  de (6), com o qual novas  $[\bar{M}]$  e  $[\bar{K}]$  são calculados  
até que a diferença entre  $\omega$  e  $\Omega$  esteja dentro de uma to  
lerância previamente estabelecida, quando então os últimos  
valores  $\Omega$  e  $\{y\}$  obtidas do processo iterativo serão  
a frequência natural e o modo de vibrar procurado. Para  
outras frequências e modos normais o procedimento é o mes  
mo, com a diferença de ter-se que adotar um valor inicial  
acima do último autovalor já calculado.

### 3. CÁLCULOS COMPUTACIONAIS

A Transformação Dinâmica foi implementada adaptando se um programa de análise dinâmica de estruturas por subestruturação [6]. Esse programa está composto de maneira que, a partir dos dados necessários, analisa dinamicamente cada subestrutura, acopla esses resultados, obtendo a equação matricial global, e a partir dela obtém os autovalores e autovetores da estrutura.

Esse programa foi alterado de maneira que, tendo recebido como dados adicionais:

$\omega$  - frequência inicial de redução

$\Delta\omega$  - tolerância na determinação dos autovalores

$V_{kr}$  - Vetor redução (que define os "masters" e "slaves" e possibilita a reordenação da equação (2) resultando a equação (3).

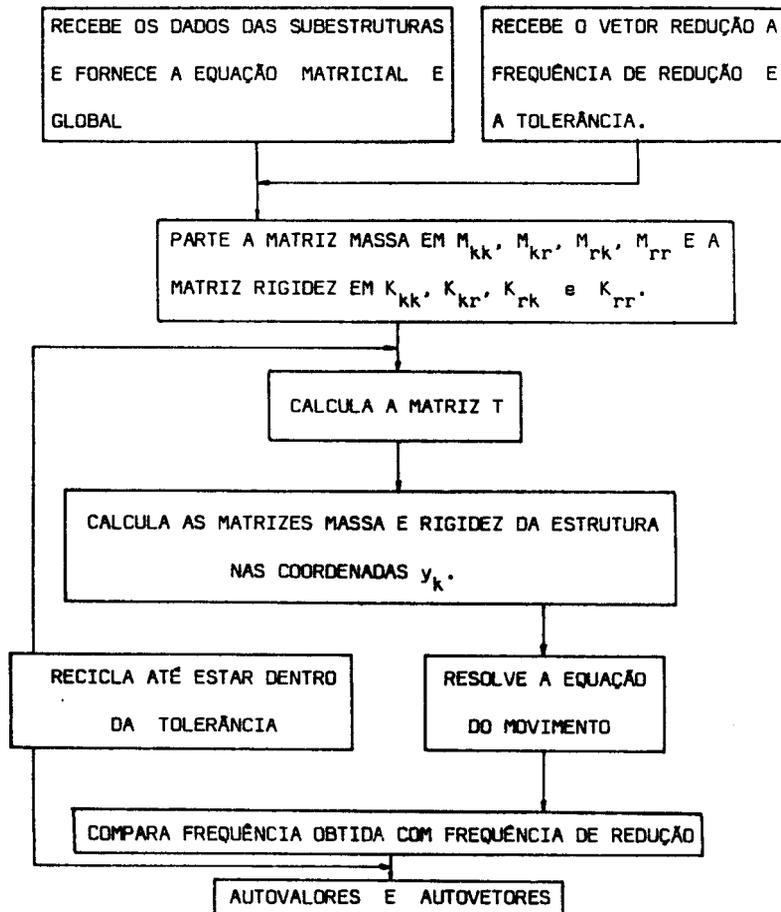
transforma a equação matricial global (2) reduzindo-a na equação (6), nesse ponto retorna-se ao programa original [6], que determina o autovalor  $\Omega$  e após esse cálculo foi feita nova adaptação para comparar esse valor com  $\omega e$ , se necessário retornar e obter uma nova equação (6).

Quando os resultados já tiverem convergido o programa imprimirá os valores de  $\Omega$  e  $\{y\}$ .

O diagrama em blocos seguinte ilustra essas operações.

#### 4. EXEMPLOS

É analisado pelo método subestruturação - condensação um exemplo resolvido em [6] o que permitiu a comparação entre resultados obtidos de três maneiras diferentes: elementos finitos, subestruturação e subestruturação - condensação.



Observa-se que os resultados por subestruturação-condensação e por subestruturação são perfeitamente coincidentes e ambas diferem muito pouco dos resultados obtidos por elementos finitos.

É analisada uma placa com uma de suas arestas semi-engastadas: placa retangular com 800 x 400 mm e 9,5 mm de espessura, conforme Figura 1.a. Na análise pelo método de subestruturação há uma divisão em três subestruturas cada uma com 4 elementos, Figura 1.b, sendo considerados três graus de liberdade por nó, duas rotações e uma translação. Considerando-se uma coordenada de modo normal por subestrutura a equação matricial global do movimento da estrutura resulta com 15 coordenadas generalizadas. No processo de condensação há uma redução de 15 para 9 coordenadas generalizadas. Na análise pelo método de elementos finitos a placa é dividida em 12 elementos resultando uma equação matricial com 54 coordenadas generalizadas. A Tabela 4.1 mostra esses resultados bem como as três primeiras frequências naturais da placa. A Tabela 4.2 mostra o número de iterações efetuadas quando é adotado 1 Hz para a frequência de redução e 0,1 Hz para a tolerância. Os modos normais calculados pelos três procedimentos são perfeitamente coincidentes não tendo sido, por isso, apresentados seus resultados.

TABELA 4.1

	PLACA SEMI-ENGASTADA				
	Nº DE COORD.	VARIACÃO %	FREQUÊNCIA NATURAIS		
			1ª	2ª	3ª
ELEMENTOS FINITOS	54	100%	37,1	46,7	82,6
SUBESTRUTURAÇÃO	15	25%	36,3	46,9	82,8
SUBESTRUTURAÇÃO- REDUÇÃO	9	16%	36,3	46,9	82,8

TABELA 4.2

	NÚMERO DE INTERAÇÕES PARA CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS		
	1ª	2ª	3ª
SUBESTRUTURAÇÃO- REDUÇÃO	3	2	3

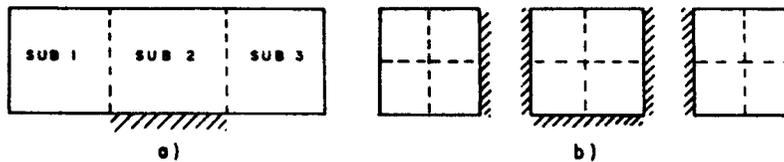


Figura 1 - Placa com um lado parcialmente engastado.

## 5. CONCLUSÕES

A principal conclusão é a de que há uma significativa redução do tamanho das matrizes, com um número de iterações pequeno. Essa conclusão é particularmente interessante, quando se pensa na utilização de computadores de pequeno e médio portes:

O programa é de fácil utilização pois basta introduzir como novos dados apenas a frequência de redução, a tolerância e o vetor redução.

## 6. REFERÊNCIAS

- [1] HURTZ, W.C., - "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", It Propulsion Laboratory, California. Institute of Technology, Los Angeles, California (1965).
- [2] KUJAR, E.J., and STAHL, C.V., - "Dynamic Transformation Method for Model Synthesis", AIAA J. Vol. 12, nº 5, Maio 1974.
- [3] LEUNG, A.T., - "An accurate method of Dynamic Condensation in structural analysis", International journal for numerical methods in engineering. Vol. 12. 1705-1715 (1978).

- [4] LEUNG, Y., - "An accurate method of dynamic substructuring with simplified computation", International journal for numerical methods in engineering, Vol. 14, 1241-1256 (1979).
- [5] PAZ M., - "Practical Reduction of Structural Eigenproblems", Journal of structural Engineering". Vol. 109, nº 11, November, 1983.
- [6] PINOTTI Jr., M., SANTOS, M.A.V. dos - "Análise Dinâmica por Subestruturação usando matriz massa diagonalizada". VII Congresso Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia. EESC-USP., São Carlos, São Paulo, Brasil, Novembro de 1986.
- [7] PRAKASH, B.G. and PRABHN, M.S.S. - "Reduction Techniques in Dynamic Substructures for Large Problems", Computers and Structures. Vol. 22, nº 4, pp. 539-552, 1986.