

PREPARO DE UM PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE
DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR SUBESTRUTURAÇÃO

Mário Pinotti Jr.

Departamento de Engenharia Mecânica. Escola de
Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP. - Brasil

Maria Ângela V. dos Santos

Departamento de Materiais e Construção.
Universidade do Rio Grande, RS.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo o preparo da ferramenta computacional necessária a aplicação do método de subestruturação tendo como apoio um programa científico de elementos finitos, permitindo assim a análise dinâmica de grandes estruturas através de um problema numérico de tamanho reduzido. É utilizado o método "Component Modes Synthesis" (Hurty) (que resulta com uma matriz massa simétrica que é diagonalizado por uma transformação de coordenadas). São apresentados dois exemplos que tem seus resultados comparados com o método de elementos finitos.

ABSTRACT

This work has the objective of prepare a computational program needful to the application of the substructure method that has support of a scientific finite element method program, which permit the dynamic analysis of large structures through a numerical problem of a reduced size. It is utilized the Component Modes Synthesis (Hurty) (that result with a symmetric mass matrix which became diagonal by a coordinate transformation). Two examples are shown and their results are compared with finite element method.

1. INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é o de a partir de uma bibliografia completa sobre subestruturação expor a teoria desse método e simultaneamente fazer indicações sobre como adaptar um programa de elementos finitos para o uso dessa técnica e esclarecer como pode ser preparada a entrada de dados para um programa. Colocamos antes do resumo teórico de subestruturação uma descrição da área de aplicação desse método, bem como da sua evolução ao longo do tempo.

Um problema que surge na análise dinâmica de grandes estruturas pelo método de elementos finitos é o grande número de graus de liberdade necessárias a obtenção das baixas frequências naturais e modos de vibrar associados. Uma das técnicas desenvolvidas nas últimas décadas para contornar este problema é o método de subestruturação no qual a estrutura é dividida em estruturas menores chamadas subestruturas, as quais são analisadas dinamicamente e os resultados obtidos usados para sintetizar um sistema de coordenadas global para a estrutura permitindo assim uma análise de razoável precisão com um problema matricial de reduzido tamanho.

Variações nas considerações feitas na análise de cada subestrutura determinam diferentes tipos de métodos de subestruturação. Podemos citar como principais: (1) "Component mode Synthesis" [1], [2] as subestruturas são analisadas com suas interfaces fixadas; (2) "Branch Mode Analysis" [3], sucessivos conjuntos vínculos são impostos a estrutura e os modos obtidos usados em uma análise de Rayleigh-Ritz; (3) "Compled free-free Component Modos" [4], [5], as subestruturas são analisadas com suas interfaces livres; (4) "Component mode Substitution" [6], uma estrutura é escolhida como corpo principal e analisada com suas interfaces livre, as demais com suas interfaces fixadas ou livres.

São dois os problemas básicos na aplicação de tais métodos: (1) como selecionar um conjunto de modos para a

subestrutura e (2) como assegurar as condições de compatibilidade entre as interfaces das subestruturas. Várias são as sugestões apresentadas na tentativa de solucioná-los, entre elas podemos citar: Mac Neal [7], modos híbridos; Rubin [8], Flexibilidade Residual; Kuhar [9], subestruturação mais condensação dinâmica, Leung [10], condensação dinâmica na subestrutura, Meirovitch/Hale [11], subestrutura representada por um conjunto de funções admissíveis.

Da análise dos métodos de subestruturação baseada em vários critérios, por exemplo, convergência das frequências naturais, modos de vibrar e tensões, o método "Component mode Synthesis" tem-se mostrado um dos de maior utilidade, sendo por este motivo o método base deste estudo.

2. O MÉTODO "COMPONENT MODE SYNTHESIS"

Neste método a estrutura complexa é dividida em várias regiões chamadas subestruturas. As matrizes massa e rigidez de cada subestrutura junto com as condições de compatibilidade geométrica ao longo das fronteiras das subestruturas são usadas para estabelecer duas formas de coordenadas generalizadas para a estrutura: (1) as coordenadas generalizadas de contorno as quais fornecem os deslocamentos e rotações dos pontos ao longo das fronteiras das subestruturas e estão relacionadas com os modos de deslocamento da subestrutura conhecidas como "modos constraint", que representam a relação entre as coordenadas físicas internas e as coordenadas físicas de interface das subestruturas; (2) as coordenadas generalizadas dos modos normais da subestrutura as quais fornecem os deslocamentos e rotação dos pontos internos das subestruturas e estão relacionadas com os modos de vibração livre da subestrutura com as interfaces totalmente fixadas. As equações de Lagrange são obtidas em termos deste sistema de coordenadas generalizadas. O método é essencialmente um processo de discretização de Rayleigh-Ritz com redução das coordenadas da subestrutura, uma vez que apenas uma parcela dos modos normais da subestrutura é utilizada como coordenada generali

zada, permitindo assim representar uma estrutura complexa por um número reduzido de graus de liberdade.

A equação do movimento da j -ésima subestrutura é dada por:

$$\begin{bmatrix} m^{bb} & | & m^{bi} \\ \hline m^{ib} & | & m^{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^b \\ x^i \end{Bmatrix}_j + \begin{bmatrix} k^{bb} & | & k^{bi} \\ \hline k^{ib} & | & k^{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^b \\ x^i \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} F^b \\ F^i \end{Bmatrix}_j \quad (1)$$

onde:

o índice i indica interior

o índice b indica contorno

Considerando-se as forças nulas para obtenção da equação de movimento livre, e considerando-se as interfaces fixadas tem-se:

$$[m^{ii}]_j \{x^i\}_j + [k^{ii}]_j \{x^i\}_j = 0 \quad (2)$$

A solução da equação (2) fornece a matriz dos modos normais de vibração da j -ésima subestrutura, $[\theta]_j$.

Considerando-se agora as forças internas e as acelerações nulas para a obtenção do equilíbrio estático da subestrutura tem-se:

$$[k^{ib}]_j \{x^b\}_j + [k_{ii}]_j \{x^i\}_j = \{0\} \quad (3)$$

então,

$$\{x^i\}_j = [\psi]_j \{x^b\}_j \quad (4)$$

em que,

$$[\psi]_j = -[k^{ii}]_j^{-1} [k_{ib}]_j \quad (5)$$

é a matriz de deformação estática da j -ésima subestrutura e representa a relação estática entre as coordenadas i_n

ternas e as de contorno.

Com base nos conceitos de modos normais e de deformações pode-se montar a matriz transformação de coordenadas para a subestrutura, que transformará as coordenadas físicas de interior e contorno em coordenadas generalizadas, da subestrutura formadas das coordenadas de contorno e coordenadas dos modos normais da mesma.

$$\begin{pmatrix} x^b \\ \vdots \\ x^i \end{pmatrix}_j = [S]_j \{p\}_j \quad (6)$$

onde

$$[S]_j = \begin{bmatrix} I & | & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_j & | & \theta_j^L \end{bmatrix}_j \quad \text{e} \quad \{p\}_j = \begin{pmatrix} p^b \\ \vdots \\ p^L \end{pmatrix} \quad (7)$$

em que

$\{p^b\}$ são as coordenadas generalizadas de contorno da subestrutura.

$\{p^L\}$ são as coordenadas generalizadas dos modos normais da subestrutura considerados apenas os modos normais baixos.

$[I]$ é a matriz identidade.

$\{\theta^L\}_j$ são os modos nas baixas frequências da subestrutura retiradas de $\{\theta\}_j$ que foi dividido em $\{\theta^L \ \theta^H\}_j$ sendo $\{\theta^H\}_j$ os modos nas frequências altas.

Aplicada a transformação proposta obtém-se a equação do movimento da j-ésima subestrutura nas coordenadas $\{p\}_j$ dada por:

$$[\bar{m}]_j \ddot{\{p\}}_j + [\bar{K}]_j \{p\}_j = \{0\} \quad (8)$$

onde:

$$[\bar{m}]_j = [S]_j^T [m]_j [S]_j \quad (9)$$

$$[\bar{K}]_j = [S]_j^T [K]_j [S]_j \quad (10)$$

A equação matricial desecoplada do movimento do sistema é

$$\begin{bmatrix} [\bar{m}]_1 & 0 \\ 0 & [\bar{m}]_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \vdots \\ \ddot{p}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{K}]_1 & 0 \\ 0 & [\bar{K}]_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{Bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Cada matriz \bar{m} e \bar{K} das subestruturas contem coordenadas de contorno e coordenadas normais. Reorganizando suas matrizes de maneira que as coordenadas de contorno das diversas matrizes fiquem juntas, bem como as coordenadas normais. Feito isso e expresso na forma compacta teve-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}^{bb} & \bar{m}^{bL} \\ \bar{m}^{Lb} & \bar{m}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^b \\ p^L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}^{bb} & 0 \\ 0 & \bar{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^b \\ p^L \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (12)$$

onde:

O índice b é contorno.

O índice L é normal.

A transformação de coordenadas que acopla as submatrizes da equação (12) é a seguinte:

$$[A] = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (13)$$

A matriz T é a responsável pela compatibilidade geométrica entre as coordenadas de contorno das submatrizes [2].

Aplicada a transformação [A] sobre a equação (12) obtem-se a equação de movimento da estrutura:

$$\begin{bmatrix} M^{BB} & | & M^{BL} \\ \hline M^{LB} & | & M^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}^B \\ \hline \ddot{q}^L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^{BB} & | & 0 \\ \hline 0 & | & K^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^B \\ \hline q^L \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (14)$$

em que

$\{q^B\}$ são as coordenadas generalizadas de contorno da estrutura.

$\{q^L\}$ são as coordenadas generalizadas dos modos normais da estrutura.

Na forma compacta

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (15)$$

onde

$[M]$ é a matriz massa da estrutura.

$[K]$ é a matriz rigidez da estrutura.

$\{q\}$ são as coordenadas generalizadas da estrutura.

3. PROCESSAMENTO COMPUTACIONAL

O processamento computacional foi dividido em três partes:

3.1. Alterações no programa de elementos finitos para obtenção dos dados necessários, de cada subestrutura, à aplicação do método.

Nessa alteração é introduzido no programa dados que informem quem são os graus de liberdade de contorno, para que a subestrutura representada pela equação (1) possa ser resolvida por elementos finitos, calculando $\{\theta\}_j$, eq.(2), $\{\psi\}_j$, eq (5), a partir desses resultados são montadas sub

rotinas que compõe [5], eq (7) com a qual obtem-se a eq(8).

3.2. Elaboração de um programa para acoplamento das subestruturas.

Esse programa lê os dados da eq(8) fornecido pela etapa anterior, recebe como dado de entrada a matriz [A] montada externamente e monta a equação (15).

3.3. Alterações no programa de elementos finitos para receber as matrizes massa e rigidez da estrutura resultantes da aplicação do método.

4. DIAGRAMA EM BLOCOS

Conforme segue Figura 4.1.

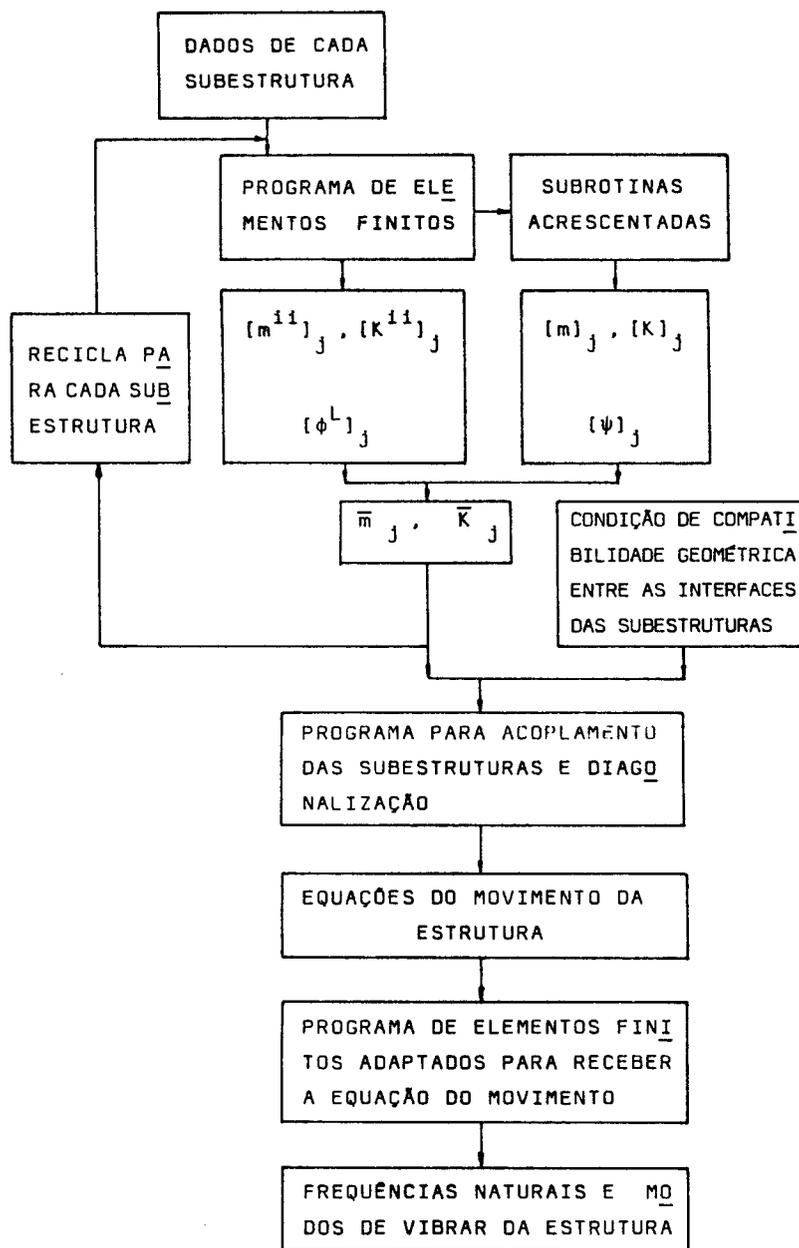


Figura 4.1 - Diagrama em blocos do pacote de elementos finitos.

5. EXEMPLOS

São considerados dois exemplos: uma viga biapoiada (Figura 1.a), e uma placa com um dos lados parcialmente engastado (Figura 2.a), ambas de aço carbono possuindo propriedade de massa e rigidez uniformes.

A viga é um perfil padronizado nº 40 A com 30,75 dm de comprimento e está dividida em três subestruturas, cada uma com três elementos (Figura 1.b), dois graus de liberdade por nó, uma rotação e uma translação. É considerada uma coordenada generalizada de modo normal para cada subestrutura e são pesquisados os três primeiros modos da viga. Os resultados obtidos pelo método de subestruturação são comparados com os obtidos pelo programa de elementos finitos considerando o número de elementos igual a soma do número de elementos de todas as subestruturas. A Tabela I mostra estes resultados.

A placa é retangular com 8,0 x 4,0 dm e 9,5 mm de espessura e está dividida também em três subestruturas, cada uma com quatro elementos (Figura 2.b), três graus de liberdade por nó, duas rotações e uma translação. Também uma coordenada generalizada de modo normal por subestrutura e os três primeiros modos da placa são pesquisados. A Tabela II mostra os resultados obtidos.

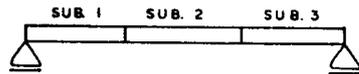


FIG. 1a

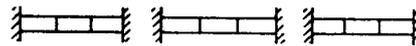


FIG. 1b

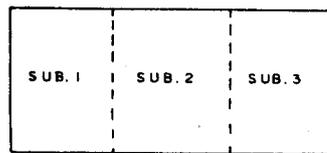


FIG. 2a

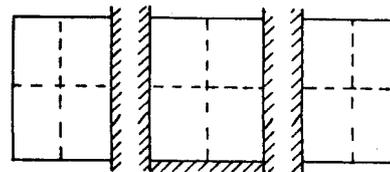


FIG. 2b

Tabela I - Viga Biapoiada

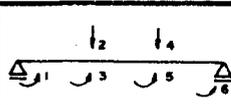
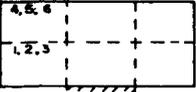
	SUBESTRUTURAÇÃO			ELEMENTOS FINITOS		
ORDEM DA EQ. MATRICIAL	9			18		
	MODOS			MODOS		
	1º	2º	3º	1º	2º	3º
FREQUÊNCIA	26,46	105,4	235,1	26,46	105,4	235,1
DESLOCAMENTOS						
1	0,1853	-0,3674	-0,5390	0,1853	-0,3674	0,5390
2	$-0,1575 \cdot 10^{+1}$	$0,1576 \cdot 10^{+1}$	$0,2440 \cdot 10^{-8}$	$-0,1575 \cdot 10^{+1}$	$0,1575 \cdot 10^{+1}$	$0,1538 \cdot 10^{-4}$
3	$0,9266 \cdot 10^{-1}$	0,1837	0,5390	$0,9266 \cdot 10^{-1}$	0,1835	-0,5390
4	$-0,1575 \cdot 10^{+1}$	$-0,1576 \cdot 10^{+1}$	$-0,2440 \cdot 10^{-8}$	$-0,1575 \cdot 10^{+1}$	$-0,1575 \cdot 10^{+1}$	$-0,7601 \cdot 10^{-5}$
5	$-0,9266 \cdot 10^{-1}$	0,1837	-0,5390	$-0,9266 \cdot 10^{-1}$	0,1837	0,5390
6	-0,1853	-0,3674	0,5390	-0,1853	-0,3674	-0,5390

Tabela II - Placa semi-engastada

	SUBESTRUTURAÇÃO			ELEMENTOS FINITOS		
ORDEM DA EQ. MATRICIAL	15			54		
	MODOS			MODOS		
	1º	2º	3º	1º	2º	3º
FREQUÊNCIA DESLOCAMENTOS	37,36	46,97	82,76	37,1	46,73	82,57
1	$0,1239 \cdot 10^{+1}$	-0,8715	-0,4856	$-0,1229 \cdot 10^{+1}$	0,8633	0,4582
2	0,9756	-0,4860	-0,6491	-0,9677	0,4824	0,6283
3	0,1593	-0,7309	0,9810	-0,1574	0,7229	-0,9780
4	$0,3450 \cdot 10^{+1}$	$-0,1822 \cdot 10^{+1}$	$-0,2425 \cdot 10^{+1}$	$-0,3421 \cdot 10^{+1}$	$0,1808 \cdot 10^{+1}$	$0,2351 \cdot 10^{+1}$
5	$0,1162 \cdot 10^{+1}$	-0,4566	$-0,1283 \cdot 10^{+1}$	$-0,1152 \cdot 10^{+1}$	0,4548	$-0,1257 \cdot 10^{+1}$
6	0,1465	$-0,1323 \cdot 10^{+1}$	$0,1383 \cdot 10^{+1}$	-0,1459	$0,1312 \cdot 10^{+1}$	$-0,1363 \cdot 10^{+1}$

6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta o esquema do processamento computacional necessário para aplicação do método "component mode synthesis" através de um programa científico de elementos finitos para análise dinâmica de estruturas. Pelos exemplos observa-se uma grande redução na ordem da equação matricial que representa o movimento da estrutura pela aplicação do método, o que traduz-se em economia de tempo e capacidade computacional. Isto reafirma então a grande aplicação do método de subestruturação na solução de problemas dinâmicos de grandes estruturas.

7. REFERÊNCIAS

- [1] HURTY, W.C., "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", Jet Propulsion Laboratory, California. Institute of Technology, Los Angeles, Calif.(1965)
- [2] CRAIG, R.R., and BAMPTON, M.C.C., "Compling of substructures for dynamic analysis", AIAA J., 6, 7, (1968).
- [3] GLADWELL, G.M.L., "Branch mode Analysis of Vibrating Systems", Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, England (1963).
- [4] GOLDMAN, R.L., "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning", AIAA Journal, Vol.7, Nº 6, (1969).
- [5] HOU, S.N., "Review of Modal Synthesis Techniques and A New Approach", The Shock and Vibration Bulletin, Bulletin 40, Pt. 4, Naval Research Lab., Washington, D.C.(1969)
- [6] BENFIELD, W.A. and HRUDA, R.F., "Vibration Analysis of Structures by component Mode

- Substitution", AIAA Journal, Vol.9, Nº 7.
(1971).
- [7] MAC NEAL, R.H., "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis", Computers & Structures, Vol. 1, (1971).
- [8] RUBIN, S., "Improved Component - Mode Representation for Structural Dynamic Analysis", AIAA Journal, Vol. 13, (1975).
- [9] KUHAR, E.I. and STAHL, C.V., "Dynamic Transformation Method for Modal Synthesis", AIAA/ASME/SAE 147h Structures, Structural Dynamics, and materials Conference, Williamsburg, Va., (1973).
- [10] LEUNG, Y.T., "An accurate method of Dynamic Substructuring with Simplified Computation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, (1979).
- [11] MEIROVITCH, L. and HALE, A.L., "On the substructure Synthesis Method", AIAA Journal, Vol. 19, Nº 7, (1981).
- [12] BATHE, K.J., WILSON, E.L. and PETERSON, F.E., "A Structural Analysis Program For Static and Dynamic Response of Linear Systems", University of California, Berkely, California, (1973- Revisado 1974).
- [13] LAZARINI, C. and FRANCO, N.M.B., "Tópicos de Cálculo Numérico", Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, USP. (1984).
- [14] SANTOS, M.A. VAZ dos, "Análise Dinâmica de Grandes Estruturas pelo Método de Subestruturação", Dissertação de Mestrado em Desenvolvimento, EESC, USP. (1986).