

CALCULO NUMERICO DE FACTORES DE VISTA ENTRE  
ELEMENTOS DE SUPERFICIE ISOTERMICOS DISPUESTOS  
ARBITRARIAMENTE EN UN ESPACIO TRIDIMENSIONAL

G. Sánchez Sarmiento

MECACOMP - Arenales 1999 (1124) Buenos Aires.

R. Alonso, M.V. Andrés y J. Bratina

Comisión Nacional de Investigaciones Espaciales.  
Centro Espacial San Miguel, Avda. Mitre 3100,  
(1663) San Miguel, Prov. Buenos Aires.

RESUMEN

Como parte del desarrollo de un paquete de programas computacionales para el control térmico de satélites artificiales, se han propuesto y estudiado sendos algoritmos numéricos para el cálculo de factores de vista entre dos triángulos o cuadriláteros planos dispuestos espacialmente en forma arbitraria. Los algoritmos están basados en transformaciones de coordenadas para cada elemento de superficie y en cuadratura de Gauss-Legendre si se trata de cuadriláteros, o de integración numérica mediante fórmulas de Hammer si se trata de triángulos. Se analiza la convergencia de los algoritmos con el incremento del número de puntos de integración. Los métodos desarrollados están implementados como parte de un programa general para el cálculo de factores de vista entre elementos de superficie de variada naturaleza, con consideración de obstrucciones entre los mismos.

ABSTRACT

Numerical algorithms for the calculation of view factors from a triangle or a plane quadrilateral to another similar surface element, were been posed and analyzed in the present paper. Both elements are positioned and oriented arbitrarily in a tridimensional space. The algorithms are based in coordinate transformation for each element and a Gauss-Legendre quadrature in the case of quadrilaterals, or a numerical integration by means of Hammer's formulae in the case of triangles. The convergence of the algorithms with the increment of the number of integration points is analyzed. A general program for the calculation of view factors is shown.

## A.- INTRODUCCION.

Los modelos geométricos que generalmente se desarrollan para el control térmico de satélites artificiales[1] suelen estar constituidos por conjuntos de elementos de superficie definidos arbitrariamente en un espacio tridimensional. Durante su permanencia en el espacio, la transferencia de calor a través de cavidades dentro de los mismos se efectúa fundamentalmente por radiación. Ello implica que, para la simulación numérica de dicho fenómeno, el cálculo de los factores de vista entre elementos de superficie diferentes sea una etapa esencial de dichos modelos. Para geometrías complejas, puede ocurrir que uno o varios de los elementos de superficie puedan encontrarse obstruyendo la radiación térmica entre otros dos elementos, disminuyendo el factor de vista entre ellos en forma total o parcial. Para la eficiencia del cálculo es de vital importancia que esa posibilidad sea analizada automáticamente en el programa[2].

Se presenta en este trabajo un programa computacional, denominado FVISTA-1, para el cálculo numérico de los factores de vista entre triángulos y cuadriláteros (especificados por las coordenadas x,y,z de sus respectivos vértices) y superficies con simetría de revolución de secciones meridionales rectilíneas arbitrarias (incluyendo discos, coronas circulares y cilindros rectos). Se consideran todas las combinaciones posibles entre estos tipos de superficie. Para los casos en que una de las superficies es un cuadrilátero, se ha formulado un algoritmo basado en transformaciones de coordenadas y en cuadratura de Gauss-Legendre, y si es un triángulo la integración numérica se realiza mediante fórmulas de Hammer y colab.[3]. Para superficies axisimétricas se ha implementado un método numérico similar al publicado por Garot y Gendre en ref. [4]. Finalmente, para configuraciones mixtas de un triángulo o de un cuadrilátero con una superficie axisimétrica, se descompone esta última en un conjunto de cuadriláteros y se calculan separadamente los factores de vista del primero con cada uno de ellos.

En todos los casos el programa considera automáticamente la eventualidad de que ambos elementos de superficie no se miren entre ellos, y/o de que un tercer elemento se interponga total o parcialmente entre los mismos, en base a una metodología que se describe al final del trabajo.

## 2.- CALCULO DEL FACTOR DE VISTA ENTRE TRIANGULOS ARBITRARIOS

El factor de vista  $F_{12}$  desde un elemento de superficie  $A_1$  a otro elemento de superficie  $A_2$ , ubicados arbitrariamente en un espacio tridimensional, es igual a la rela-

ción entre la cantidad de energía radiante que llega al segundo elemento y la que es emitida desde el primero.

Llamando  $r_{12}$  a la distancia entre dos puntos cualesquiera de las superficies  $A_1$  y  $A_2$ , y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  a los ángulos que forman la dirección así definida con las normales a ambas superficies respectivamente (ver figura 1), el factor de vista de la superficie  $A_1$  a la superficie  $A_2$  queda expresado por:

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (1)$$

En el caso en que ambas superficies  $A_1$  y  $A_2$  sean triángulos planos definidos arbitrariamente en un espacio tridimensional, a través de las coordenadas de sus respectivos vértices

$$(x_i, y_i, z_i); (x_i, y_i, z_i), \quad i=1,2,3,$$

la integración numérica sobre ambas áreas es particularmente simple. Emplearemos al efecto fórmulas especiales deducidas por Hammer y colab. [3] para cada triángulo, consistentes en sumas ponderadas con pesos  $Q_q$  y  $Q_r$  de valores del integrando evaluados en conjuntos de puntos  $P_q$  y  $P_r$  respectivamente:

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \sum_{q=1}^L \sum_{r=1}^L Q_q Q_r I_{12}(P_q^{(1)}, P_r^{(2)}) A_1 A_2 \quad (2)$$

donde:

$$I_{12}(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} \quad (3)$$

Hammer y colab. han publicado en ref. [3] (ver [5]) los sucesivos pesos y las ubicaciones de los puntos de integración hasta un número de puntos  $L=7$ , correspondiente a un error del orden  $O(h^6)$ .

Para cada par de puntos  $(P_q^{(1)}, P_r^{(2)})$  el integrando  $I_{12}$  se calcula en base a relaciones geométricas elementales [5].

### 3.- CALCULO DEL FACTOR DE VISTA ENTRE CUADRILATEROS PLANOS

Si las dos superficies  $A_1$  y  $A_2$  son ahora cuadriláteros planos arbitrarios, para el cálculo numérico de la in

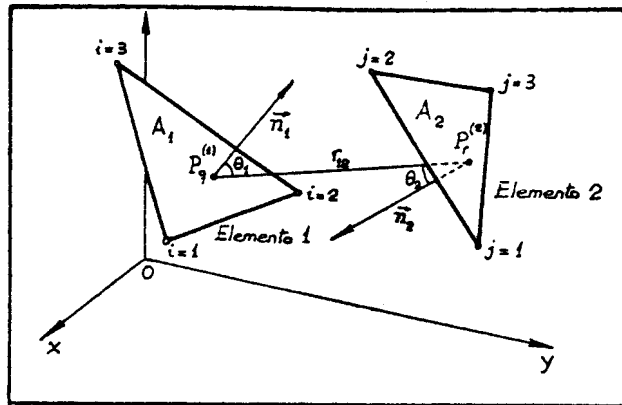


Figura 1.- Parámetros geométricos para el cálculo del factor de vista entre dos triángulos planos arbitrarios.

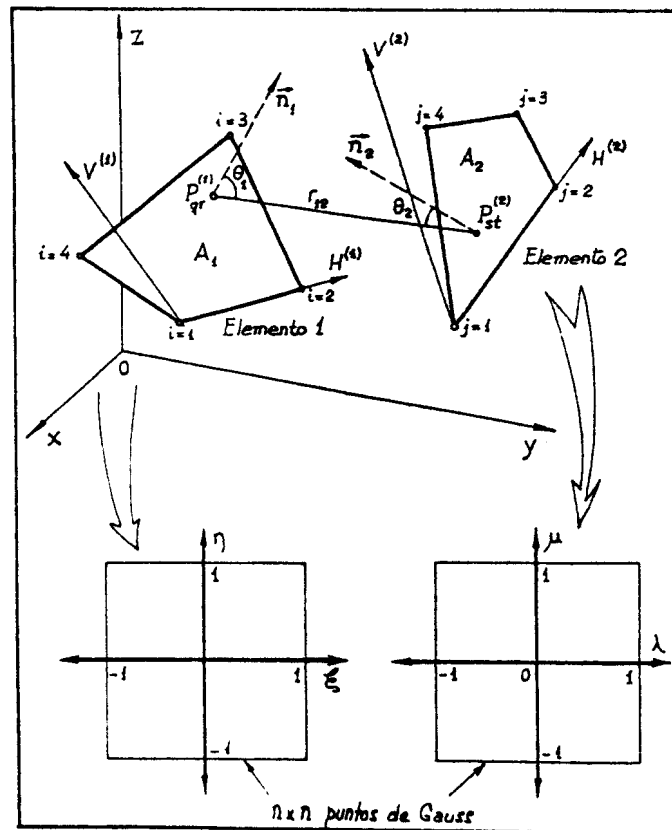


Figura 2.- Parámetros geométricos para el cálculo del factor de vista entre dos cuadriláteros planos arbitrarios.

tegral (1) se consideran dos sistemas de coordenadas locales:  $(H^{(1)}, V^{(1)})$  para el primer cuadrilátero y  $(H^{(2)}, V^{(2)})$  para el segundo. Al primero de estos sistemas, por ejemplo, lo consideramos definido por tres puntos: el origen 0, un punto sobre el eje  $H^{(1)}$  y un punto  $v$  sobre el eje  $V^{(1)}$ . Se toma el origen 0 coincidente con el vértice 1 del cuadrilátero en cuestión, y el punto  $h$  coincidente con el vértice 2. Las coordenadas  $(x_v, y_v, z_v)$  del punto  $v$  surgen de considerar las dos condiciones siguientes:

- a) El vector  $\vec{Ov}$  se encuentra en el plano determinado por los vértices 1, 2 y 3.
- b) El vector  $\vec{Ov}$  es perpendicular a la dirección definida por los vértices 1 y 2 (eje  $H^{(1)}$ ).

Llamando:

$$d = (u_2 - u_1) \cdot (u_3 - u_1)$$

donde  $u_i$  es el vector desde el origen al vértice 1 ( $i=1,2,3$ ), si  $d > 0$  la condición a) se traduce en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_v - x_1 &= -(x_2 - x_1) + \alpha(x_3 - x_1) \\y_v - y_1 &= -(y_2 - y_1) + \alpha(y_3 - y_1) \\z_v - z_1 &= -(z_2 - z_1) + \alpha(z_3 - z_1)\end{aligned} \quad (4)$$

mientras que si  $d < 0$  las ecuaciones (4) se convierten en:

$$\begin{aligned}x_v - x_1 &= (x_2 - x_1) + \alpha(x_3 - x_1) \\y_v - y_1 &= (y_2 - y_1) + \alpha(y_3 - y_1) \\z_v - z_1 &= (z_2 - z_1) + \alpha(z_3 - z_1)\end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro a ser determinado. Finalmente, si  $d = 0$ , resulta  $v = u_3 - u_1$ . La condición b), por su parte, puede expresarse por:

$$\begin{aligned}(x_v - x_1)(x_2 - x_1) + (y_v - y_1)(y_2 - y_1) + (z_v - z_1)(z_2 - z_1) \\= 0\end{aligned} \quad (6)$$

Sustituyendo las (4) o las (5) según el caso, en la (6), resultan sendas ecuaciones de primer grado en  $\alpha$  cuyas soluciones coinciden y valen:

$$\alpha = \left| \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1) + (z_3 - z_1)(z_2 - z_1)} \right|$$

Conocido el valor de  $\alpha$ , los valores de  $x_v$ ,  $y_v$ ,  $z_v$  resultan inmediatamente de las (4) o (5), según el caso.

De las coordenadas de los puntos h y v en el sistema (x,y,z) surgen los valores de los cosenos directores de la transformación (x,y,z)  $\rightarrow$  (H<sup>(1)</sup>, V<sup>(1)</sup>), con los cuales se determinan directamente las coordenadas de los vértices 3 y 4 del cuadrilátero en el plano (H<sup>(1)</sup>, V<sup>(1)</sup>).

La integración numérica sobre cada elemento de superficie es realizada en el método propuesto mediante una doble cuadratura de Gauss-Legendre separadamente para cada uno. Comenzando por el elemento A<sub>1</sub> se define a tal efecto un nuevo sistema local de coordenadas ( $\xi, \eta$ ) tal que dicho elemento que da transformado en un cuadrado de área igual a 4 (ver figura 2), a través de la relación: [6]

$$\begin{aligned} H^{(1)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i^{(1)}(\xi, \eta) H_i^{(1)} \\ V^{(1)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i^{(1)}(\xi, \eta) V_i^{(1)} \end{aligned} \quad (7)$$

donde:

$$\begin{aligned} N_1^{(1)} &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2^{(1)} &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3^{(1)} &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4^{(1)} &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (8)$$

El elemento de superficie dA<sub>1</sub> puede expresarse entonces por:

$$dA_1 = dH^{(1)} dV^{(1)} = \det J^{(1)} d\xi d\eta \quad (9)$$

donde:

$$J^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \xi} & \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \eta} & \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 \eta & B_1 + B_2 \eta \\ A_3 + A_4 \xi & B_3 + B_4 \xi \end{bmatrix} \quad (10)$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{4} (- H_1^{(1)} + H_2^{(1)} + H_3^{(1)} - H_4^{(1)}) \\
 A_2 &= \frac{1}{4} (+ H_1^{(1)} - H_2^{(1)} + H_3^{(1)} - H_4^{(1)}) \\
 A_3 &= \frac{1}{4} (- H_1^{(1)} - H_2^{(1)} + H_3^{(1)} + H_4^{(1)}) \\
 A_4 &= \frac{1}{4} (+ H_1^{(1)} - H_2^{(1)} + H_3^{(1)} - H_4^{(1)}) \\
 B_1 &= \frac{1}{4} (- V_1^{(1)} + V_2^{(1)} + V_3^{(1)} - V_4^{(1)}) \\
 B_2 &= \frac{1}{4} (+ V_1^{(1)} - V_2^{(1)} + V_3^{(1)} - V_4^{(1)}) \\
 B_3 &= \frac{1}{4} (- V_1^{(1)} - V_2^{(1)} + V_3^{(1)} - V_4^{(1)}) \\
 B_4 &= \frac{1}{4} (+ V_1^{(1)} - V_2^{(1)} + V_3^{(1)} - V_4^{(1)})
 \end{aligned} \tag{11}$$

Por su parte, para el elemento 2 se define otro sistema de coordenadas  $(H^{(2)}, V^{(2)})$  de manera análoga a la del elemento  $A_1$ , y a su vez otro sistema  $(\lambda, \mu)$  mediante la transformación:

$$\begin{aligned}
 H^{(2)}(\lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^4 N_i^{(2)}(\lambda, \mu) H_i^{(2)} \\
 V^{(2)}(\lambda, \mu) &= \sum_{i=1}^4 N_i^{(2)}(\lambda, \mu) V_i^{(2)}
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde las expresiones de las  $N_i^{(2)}(\lambda, \mu)$  resultan de sustituir  $\xi$  por  $\lambda$  y  $\eta$  por  $\mu$  en las (8).

De manera análoga a la ecuación (9), se tiene para el elemento  $A_2$ :

$$dA^{(2)} = dH^{(2)} dV^{(2)} = \det J^{(2)} d\lambda d\mu \tag{13}$$

donde  $J^{(2)}$  tiene una expresión idéntica a la (14) si se sustituye  $\xi$  por  $\lambda$  y  $\eta$  por  $\mu$ .

De la definición (1) y de las fórmulas (3), (9) y (13) resulta la siguiente expresión para el factor de vista en tre los cuadriláteros  $A_1$  y  $A_2$  en término de las variables  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  y  $\mu$ :

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 I_{12}(\xi, \eta, \lambda, \mu) \det J^{(1)} \det J^{(2)} d\xi d\eta d\lambda d\mu \tag{14}$$

Una cuadratura de Gauss para las cuatro últimas variables conduce a la siguiente expresión aproximada de  $F_{12}$ :

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n w_q w_r w_s w_t I_{12}(\bar{\xi}_q, \bar{\eta}_r, \bar{\lambda}_s, \bar{\mu}_t) \times \\ \times \det J^{(1)}(\bar{\xi}_q, \bar{\eta}_r) \det J^{(2)}(\bar{\lambda}_s, \bar{\mu}_t) \quad (15)$$

donde los sucesivos pesos y ubicaciones de los puntos de integración están tabulados por ejemplo en [5].

#### 4.- CALCULO DEL FACTOR DE VISTA ENTRE UN CUADRILATERO PLANO Y UN TRIANGULO.

Este caso resulta ser simplemente una combinación de los dos anteriores. Por ejemplo, la aproximación correspondiente al factor de vista desde un triángulo a un cuadrilátero plano resulta en forma inmediata de lo deducido en las secciones 2. y 3. (ver figura 3):

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \sum_{q=1}^L \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n Q_q w_r w_s I_{12}(P_q^{(1)}, \bar{\lambda}_r, \bar{\mu}_s) A_1 \det J^{(2)}(\bar{\lambda}_r, \bar{\mu}_s) \quad (16)$$

#### 5.- CALCULO DEL FACTOR DE VISTA ENTRE ELEMENTOS DE SUPERFICIE SIENDO UNO DE ELLOS AXISIMETRICO DE SECCION MERIDIONAL RECTILÍNEA ARBITRARIA.

Para el caso en que los dos elementos de superficie tengan simetría de revolución alrededor de un eje común, con secciones meridionales rectilíneas arbitrarias (ver figura 4), en el Programa FVISTA-1 se ha implementado un algoritmo que sigue los lineamientos generales del publicado por Garot y Gendre [4]. Por su parte, si por ejemplo el primero de los elementos es axisimétrico y el segundo es un triángulo o un cuadrilátero ubicado en una posición arbitraria respecto del primero, se descompone éste en cuadriláteros iguales en la forma indicada en la figura 5, y se superponen luego los factores de vista calculados separadamente según los algoritmos de las Secciones 2 y 3.

#### 6.- TRATAMIENTO DE LAS OBSTRUCCIONES ENTRE TRIANGULOS Y CUADRILATEROS PLANOS DISPUESTOS ARBITRARIAMENTE.

El cálculo de  $F_{12}$  entre dos elementos de superficie  $A_1$  y  $A_2$  cuando una o más del resto de las superficies se en-



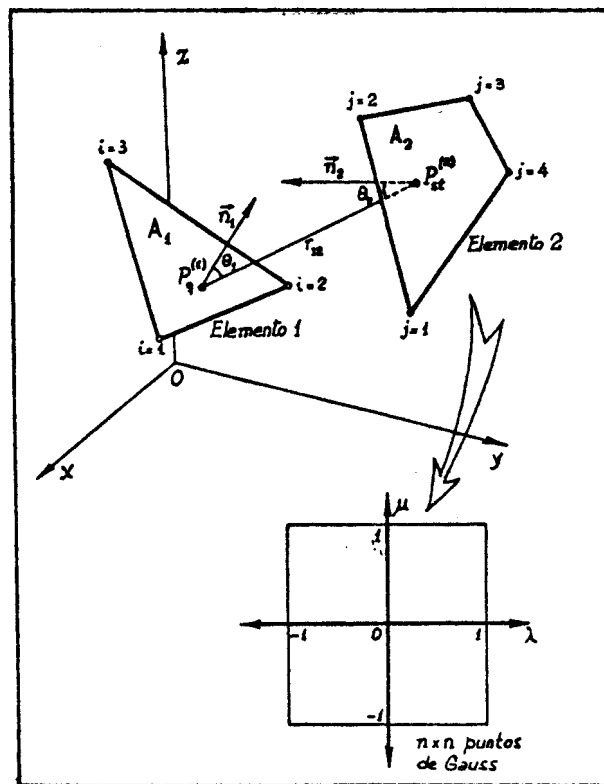


Figura 3.- Parámetros geométricos para el cálculo del factor de vista entre un triángulo plano y un cuadrilátero plano arbitrarios

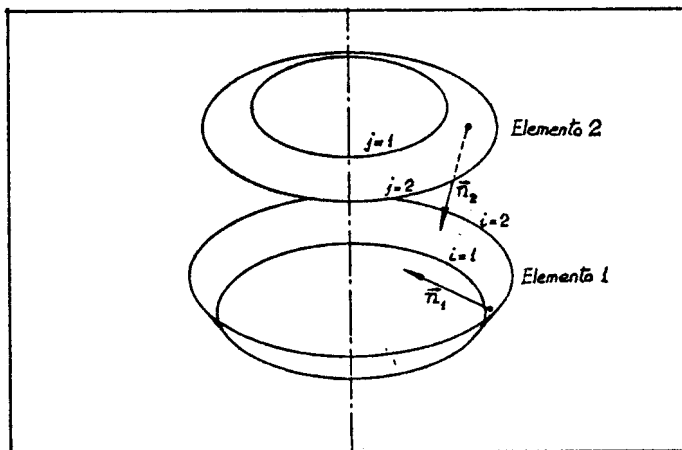


Figura 4.- Parámetros geométricos para el cálculo del factor de vista entre dos superficies de simetría de revolución con eje común y sección meridional rectilínea arbitraria.

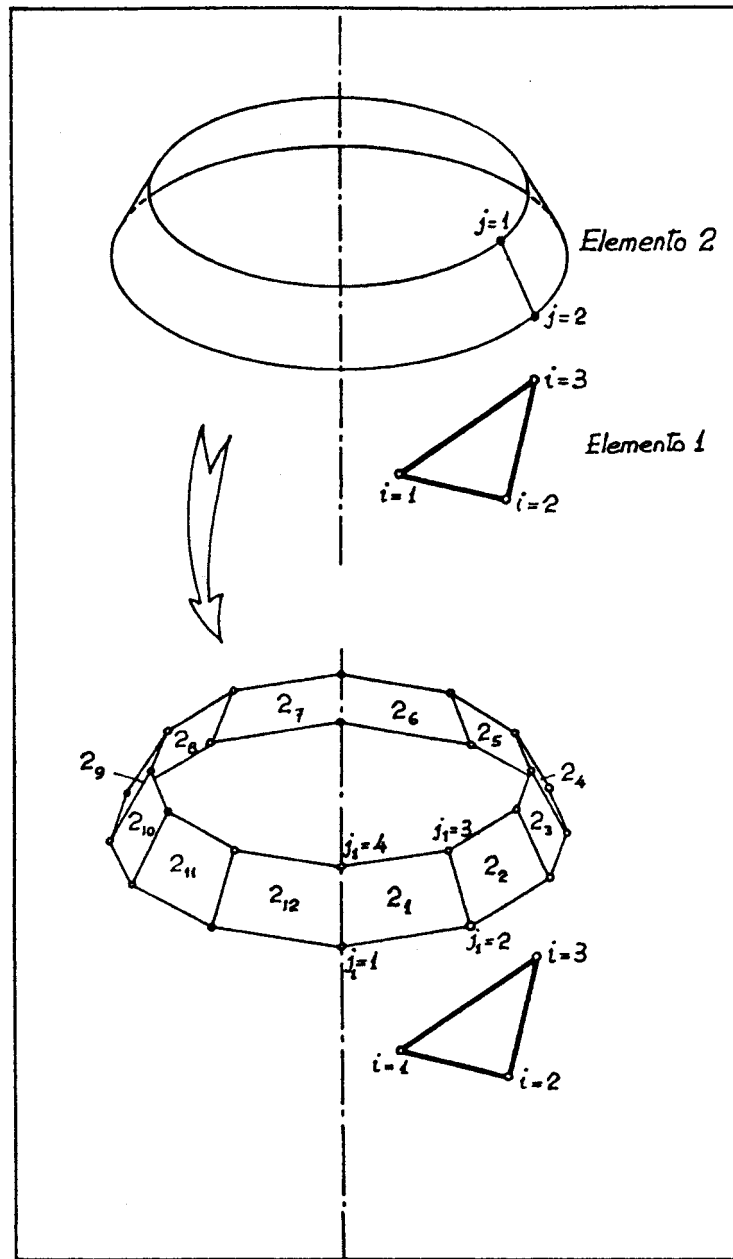


Figura 5.- Descomposición de un elemento de superficie de simetría de revolución en un conjunto de cuadriláteros para el cálculo del factor de vista entre dicho elemento y un triángulo plano.

cuentran interpuestas en el trayecto entre puntos de las mismas, es la parte más difícil y de mayor costo computacional del presente modelo. A los fines de acelerar este cálculo, no deben escatimarse esfuerzos para eliminar previamente de dicha búsqueda toda superficie que, de un análisis elemental, pueda saberse a priori que no se interpone entre el par de elementos considerados.

Consideremos la situación mostrada esquemáticamente en la figura 6. Una manera elemental de realizar este "descarte" previo, adoptado en el programa FVISTA-1, consiste en la sucesión de los dos pasos siguientes:

a) Referido al sistema de coordenadas original  $(x,y,z)$ , se define el paralelepípedo rectangular de menor volumen y de aristas paralelas a los ejes que contiene a las superficies  $A_1$  y  $A_2$  ("prisma de vista"), indicado con líneas punteadas en el dibujo superior de la figura 6. Se eliminan a continuación todas las superficies que no penetran este prisma. Se verifica además si alguna superficie atraviesa completamente a dicho prisma, en cuyo caso el factor de vista ya es nulo y no es necesario continuar el cálculo.

b) Se define un nuevo sistema de coordenadas  $(x',y',z')$  con el eje  $z'$  dirigido a lo largo de la línea que conecta a los centroides de las superficies  $A_1$  y  $A_2$ , y en este nuevo sistema se realiza un segundo proceso de "descarte" idéntico al anterior. Nuevamente se verifica la posibilidad de corte completo del paralelepípedo por parte de alguna otra superficie.

Este proceso de descarte mediante los prismas de vista es posiblemente el más simple que pueda pensarse. Sólo requiere verificaciones elementales de bajo costo y una transformación de coordenadas. Procedimientos más complicados podrían resultar inaceptablemente costosos.

Posteriormente al proceso descrito, al calcular cada uno de los términos de las aproximaciones (2), (15) o (16) según el caso, debe analizarse primero si el segmento  $r_{12}$  no penetra alguna de las superficies que han quedado sin ser descartadas. Esta determinación se realiza en base a una construcción geométrica elemental que es esquematizada en la figura 7. Proyectando dicha superficie en la dirección de  $r_{12}$  sobre alguno de los planos coordenados, se determina analíticamente si el punto que es la proyección de  $r_{12}$  es interior o exterior o interior a la proyección de aquella. Dado que eventualmente pueden haber quedado muy pocas superficies después del proceso de descarte, esta verificación es relativamente rápida. Sólo si dicho análisis es negativo, se procede al cálculo del término correspondiente en las expresiones (2), (15) o (16).

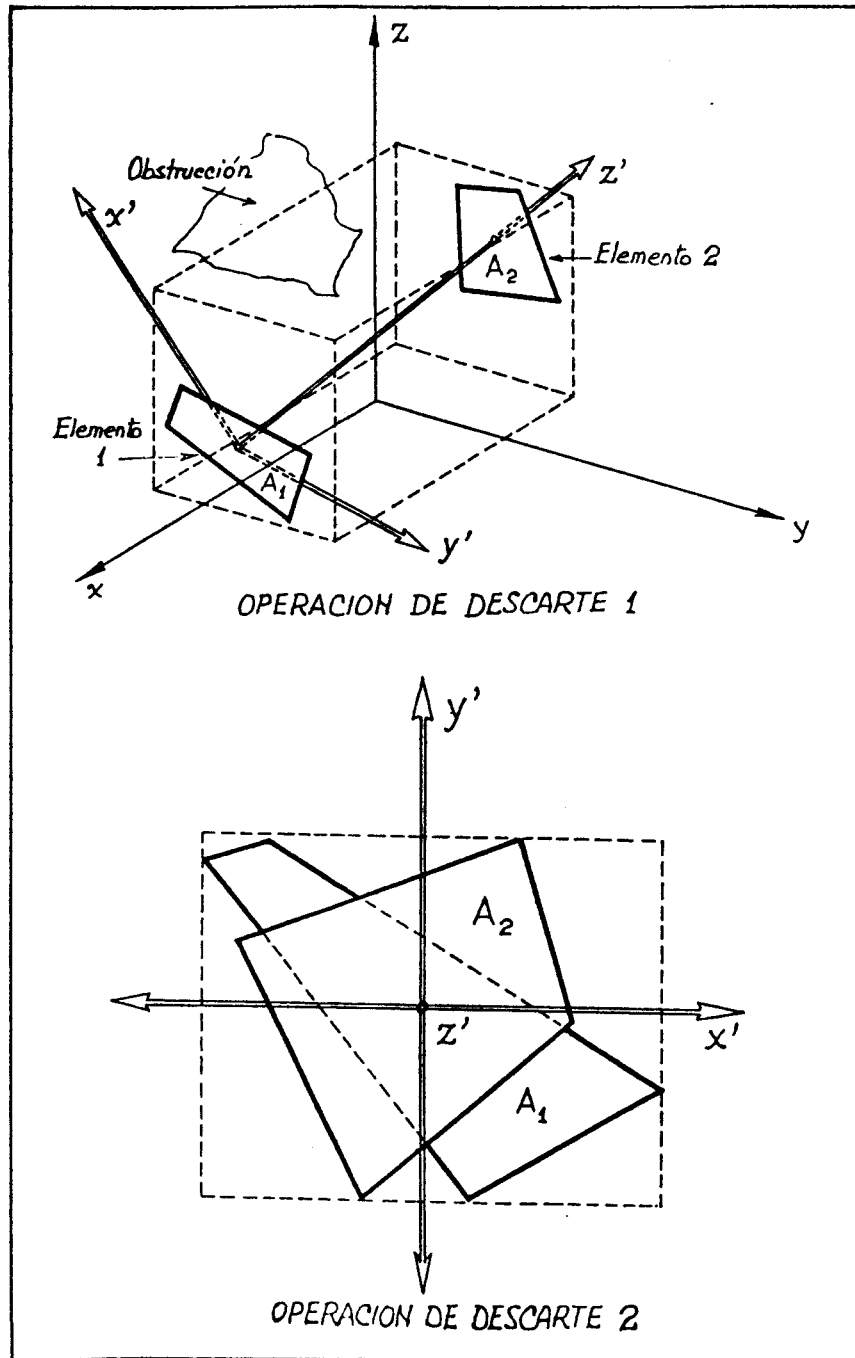
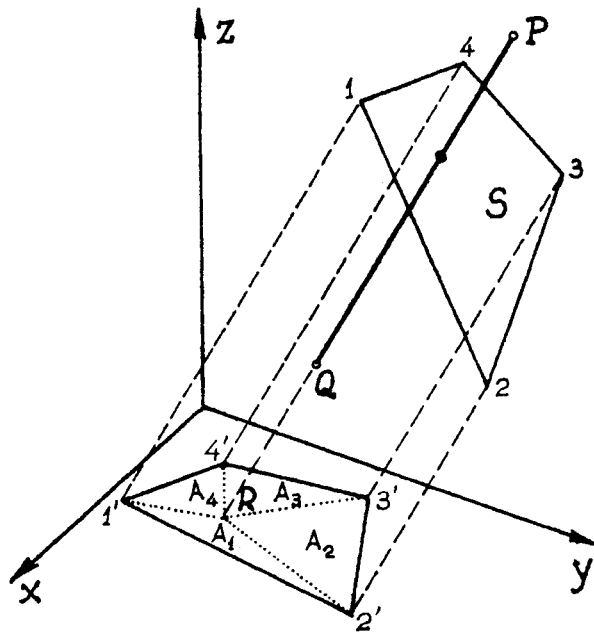


Figura 6.- Eliminación previa de otros elementos de superficie para el análisis de la posibilidad de obstrucción de energía radiante entre dos elementos.



Si  $A_1 > 0$  y  $A_2 > 0$  y  $A_3 > 0$  (y  $A_4 > 0$ ), entonces  
el triángulo (o cuadrilátero) S obstruye a PQ.

Figura 7..- Análisis de la posibilidad de obstrucción de energía radiante entre dos elementos de superficie arbitrarios por parte de un tercer elemento.

## 7.- EXPERIMENTOS NUMERICOS.

Aplicando el programa FVISTA-1 a dos casos simples de solución exacta conocida, se han analizado las precisiones obtenidas con las expresiones (2) y (15) para el factor de vista entre triángulos y cuadriláteros respectivamente, variando el número de puntos de integración.

Para el caso del factor de vista entre dos triángulos únicos, no se ha encontrado en la literatura alguna configuración con solución exacta conocida, habiéndose analizado en su defecto las configuraciones compuestas mostradas en las figuras 8 y 9. Calculando separadamente los factores de vista  $F_{13}$ ,  $F_{14}$ ,  $F_{23}$  y  $F_{24}$  entre los triángulos indicados en ambas figuras, el factor de vista compuesto  $F_{(12)(34)}$  resulta inmediatamente en término de aquéllos aplicando el álgebra de factores de vista. La solución analítica exacta fue calculada mediante el programa general FVANA desarrollado al efecto por el primero de los autores [6]. Variando la relación entre la b que separa ambos rectángulos y la longitud a de uno de sus lados, en las mismas figuras se ha graficado el error relativo porcentual de la solución numérica con respecto a la solución exacta, para tres números diferentes de puntos de integración.

Por otra parte, la precisión obtenida para el factor de vista entre cuadriláteros, dado por la expresión (15), fué analizada para los dos casos simples de las figuras 10 y 11, también contemplados en el Programa FVANA. Al efecto se ha variado tanto la relación entre las dimensiones a y b, como el número de puntos de integración para cada uno de los lados de los cuadriláteros. El efecto notable que se contempla en dichas figuras es que el error relativo porcentual tiene un mínimo, en general para valores de la distancia b aproximadamente igual al lado a de los cuadrados con ambas configuraciones, y que a partir de dicho valor, el error aumenta con b/a y no mejora por más que se aumente el número de puntos de integración por encima de  $N = 3$ .

Las figuras 8 a 11 proveen una información valiosa sobre el número de puntos de integración necesarios para obtener una precisión requerida, al menos para las configuraciones analizadas, pero pueden extrapolarse las variaciones obtenidas a situaciones más complicadas entre triángulos y cuadriláteros.

### REFERENCIAS

- 1.- J. MAHANEY, E.A. THORNTON y P. DECHAUMPHAI: "Integrated thermal-structural analysis of large space structures". Symposium on Computational Aspects of Heat Transfer in

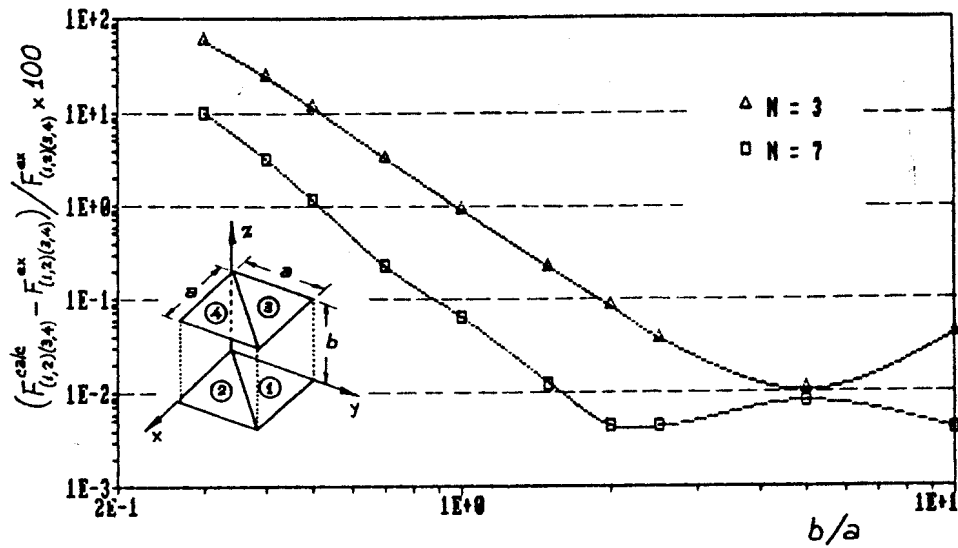


Figura 8.- Error relativo porcentual del factor de vista entre triángulos paralelos enfrentados de igual tamaño, calculado con la presente metodología (Expr. (2-3)).

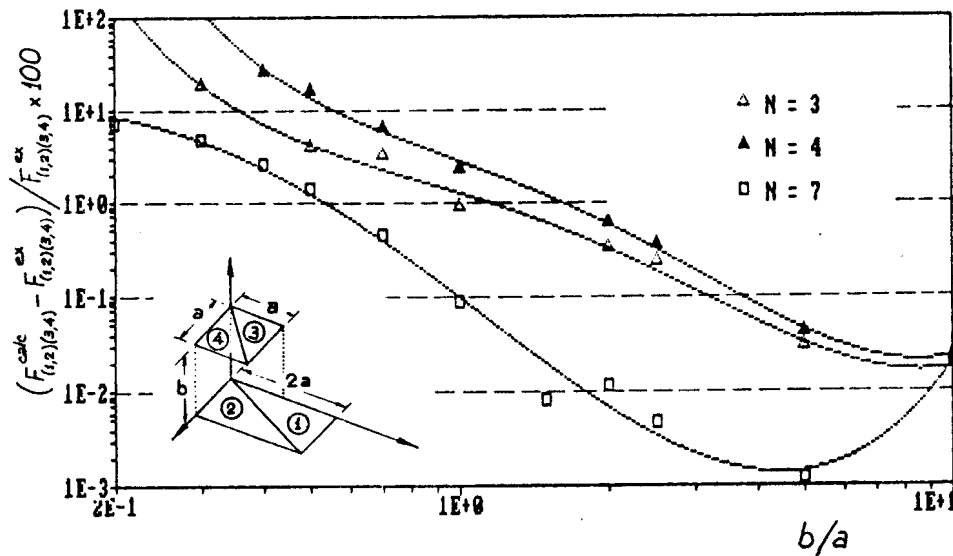


Figura 9.- Error relativo porcentual del factor de vista entre triángulos paralelos enfrentados de diferente tamaño, calculado con la presente metodología (Expr. (2-3)).

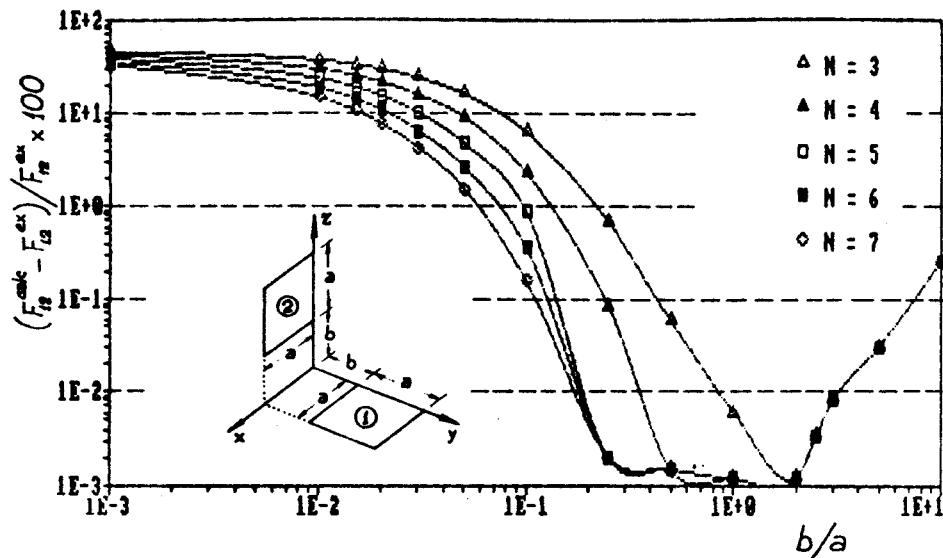


Figura 10.- Error relativo porcentual del factor de vista entre cuadriláteros con la configuración mostrada, calculado con la presente metodología (Expr. (15)).

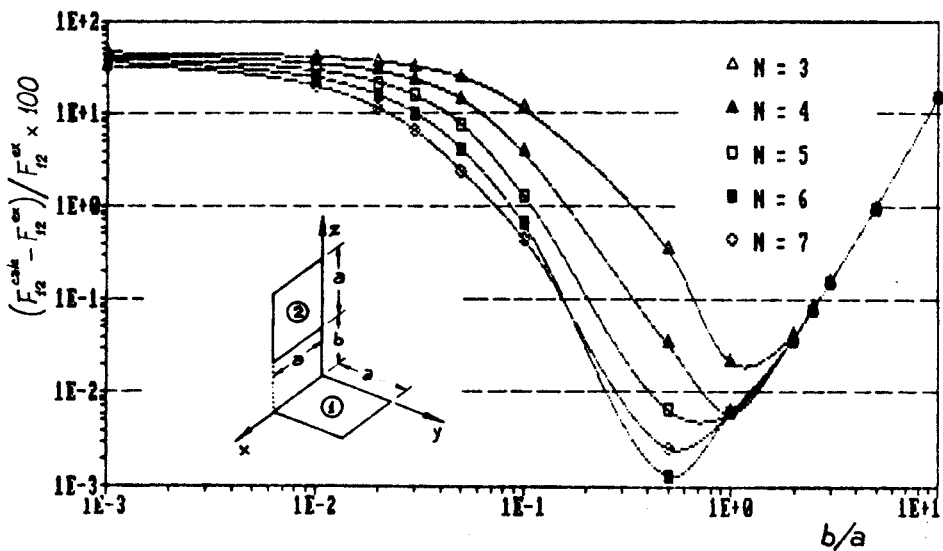


Figura 11.- Error relativo porcentual del factor de vista entre cuadriláteros con la configuración indicada, calculado con la presente metodología (Expr. (15)).



Structures. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, Nov. 3-5, 1981.

- 2.- A.F. EMERY, H.R. MORTAZAVI y M.N. NGUYEN: "Radiation exchange in large space structures and frames". AIAA Journal Vol. 23, Nº 6, June 1985.
- 3.- P.C. HAMMER, O.P. MARLOWE y A.H. STROUD: "Numerical integration over simplexes and cones". Math. Tables Aids Comp. Nº 10, pp. 130-137, 1956.
- 4.- C. GAROT y P. GENDRE: "Computation of view factors used in radiant energy exchanges in axisymmetric geometry". Compagnie Internationale de Services en Informatique, Saclay, Francia.
- 5.- O.C. ZIENKIEWICZ: "The Finite Element Method". 3rd Ed., McGraw-Hill, 1977.
- 6.- G. SANCHEZ SARMIENTO: "Factores de vista entre elementos de superficie isotérmicos. Cálculo numérico para geometrías arbitrarias y soluciones analíticas". Informe Técnico de MECACOMP Nº 4-87 (Abril de 1987).
- 7.- E. HINTON y D.R.J. OWEN: "An Introduction to Finite Element Computation". Pineridge Press, 1979

