

UN ELEMENTO PARA EL ANALISIS NO LINEAL, CRITICO  
Y POSTCRITICO DE ESTRUCTURAS ESPACIALES COMPUESTAS DE  
VIGAS DE PARED DELGADA

Adrián Luis ETEROVIC  
Luis Augusto GODOY

Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias  
Exactas, Físicas y Naturales, Universidad  
Nacional de Córdoba y Consejo Nacional de  
Investigaciones Científicas y Técnicas.  
Córdoba, Argentina.

RESUMEN

Mediante el empleo de un esquema de perturbaciones se aproxima la trayectoria de equilibrio fundamental no lineal. Siguiendo un procedimiento consistente se obtiene el estado crítico y su carga crítica asociada y se determina las características del mismo.

Se propone un elemento que permite ensamblar vigas de pared delgada de sección poligonal. El elemento posee los grados de libertad necesarios para modelar con él estructuras espaciales.

La flexibilidad introducida en las secciones de las vigas permite captar pérdidas de rigidez global en el campo no lineal geométrico y estudiar la influencia de los modos de pandeo globales y locales y de su interacción en las cargas críticas y en la respuesta postcrítica.

ABSTRACT

The fundamental non linear equilibrium path is approximated by the use of a perturbation scheme. The critical point, its associated critical load and their characteristics are obtained following a consistent procedure.

An element which allows to assemble thin walled beams is proposed. The element has the necessary degrees of freedom to be used in the analysis of tridimensional structures.

Certain flexibility is introduced in the geometry of the sections in order to study its influence on the global stiffness and the incidence of the local and global buckling modes on the critical and postcritical behaviour.

## INTRODUCCION

Se consideran estructuras espaciales compuestas de vigas de pared delgada con sección poligonal. Estos elementos estructurales son prismáticos, con la dimensión longitudinal mucho mayor que las dimensiones de la sección transversal, y éstas a su vez mucho mayores que el espesor de la misma. El material considerado es elástico lineal.

Este es el caso de estructuras metálicas compuestas por perfiles doblados en frío o también laminados que resultan de interés para un análisis no lineal geométrico por la gran variedad de respuestas que presentan aún en el rango elástico.

Los nudos de la estructura se consideran rígidos, en el sentido de que se desplazan y rotan en el espacio sin deformarse. La cinemática de un nudo determina por completo los desplazamientos y sus primeras derivadas en las secciones extremas de cada viga que concurre al nudo. Por otro lado, los ejes baricéntricos de los elementos vinculados a un mismo nudo pueden no ser concurrentes.

El elemento propuesto contiene los grados de libertad provenientes del movimiento de sus nudos extremos más otros adicionales que contemplan la deformación y el alabeo de sus secciones transversales.

Se estudiarán trayectorias de equilibrio para distintos parámetros de carga cuyos estados de equilibrio asociados presenten grandes desplazamientos y grandes giros involucrando no linealidad geométrica. Las hipótesis constitutivas restringen el comportamiento no lineal geométrico al campo de respuesta lineal del material.

En este caso se justifica el empleo de un esquema de perturbaciones alrededor del estado indeformado para aproximar la trayectoria primaria no lineal.

El método permite obtener sucesivas aproximaciones del estado crítico y su carga crítica asociada. Se determina además si se trata de un punto límite o un punto de bifurcación, y si este último es el caso si la bifurcación es simétrica o asimétrica. Finalmente, si se tiene una bifurcación simétrica se evalúa la estabilidad inicial de la trayectoria secundaria.

La posibilidad de considerar la deformación de las secciones de los elementos estructurales simultáneamente con grandes desplazamientos y giros de sus extremos, permite el análisis de una gran variedad de casos de comportamiento no lineal elástico.

## METODO DE PERTURBACIONES

### Definiciones básicas

Bajo cargas conservativas, los estados de equilibrio de la estructura pueden obtenerse a partir de un principio energético. Un estado perteneciente al espacio  $U$  de los desplazamientos admisibles será de equilibrio si hace estacionario el funcional energía potencial total  $\Phi$ .

La técnica adoptada consiste en aproximar  $U$  por un subespacio de dimensión finita  $U_k$  en el cual  $k$  coeficientes independientes controlan la amplitud de funciones de interpolación preestablecidas para la modelación de los desplazamientos. Se denominará grados de libertad (y se abreviará GL) a estos coeficientes y se los agrupará en un vector de  $k$  componentes denotado por  $u$ . Existe entonces una relación biunívoca entre los vectores  $u \in \mathbb{R}^k$  y los campos de desplazamiento del subespacio aproximante  $U_k$ .

El cambio de energía potencial total entre el estado indeformado y un estado arbitrario  $u$  puede ser escrito según

$$\Phi(u) = U(u) + W(u) \quad (01)$$

donde  $U$  es la energía interna de deformación y  $W$  es el potencial de las fuerzas actuantes.

Un estado de carga constante es aquel en el cual las fuerzas que actúan sobre el sistema, descritas en forma lagrangeana, no dependen del desplazamiento ni de su derivada temporal. En este caso el potencial de las fuerzas resulta lineal como funcional del desplazamiento. Sea por otro lado  $\lambda$  un parámetro adimensional proporcional a la magnitud de las cargas. Se tiene entonces

$$W(u) = -\lambda f(u) \quad (02)$$

donde  $f$  es un funcional lineal en  $u$  y  $f(u)$  es el trabajo desarrollado durante la deformación por un estado de carga unitario para el cual  $\lambda = 1$ .

Se desarrollará la energía potencial en serie de Taylor en los grados de libertad alrededor del estado indeformado según

$$\begin{aligned} \Phi(u;\lambda) = & -\lambda f(u) + \frac{1}{2} \Phi_0^{(2)}(u,u) \\ & + \frac{1}{6} \Phi_0^{(3)}(u,u,u) + \frac{1}{24} \Phi_0^{(4)}(u,u,u,u) + \dots \end{aligned} \quad (03)$$

donde  $\Phi_0^{(n)}$  es la diferencial de orden  $n$  de  $\Phi$  en  $u = 0$ , que resulta lineal y totalmente simétrica en sus  $n$  argumentos.

Como el estado indeformado es estable el funcional bilineal simétrico  $\Phi_0^{(2)}$  es definido positivo y se lo adoptará como producto interno para  $\mathbb{R}^k$ .

Obsérvese que el cuadrado de la norma de un desplazamiento  $u$  inducida por este producto interno,

$$\|u\|^2 \equiv \Phi_0^{(2)}(u,u) \quad (04)$$

es la parte bilineal de la energía de deformación desarrollada en la estructura por aquel.

Se denominará  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^k$  al desplazamiento que satisface la ecuación

$$\Phi_0^{(2)}(\tilde{u},w) - f(w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^k \quad (05)$$

El vector no nulo  $\tilde{u}$  es la solución estática lineal correspondiente al estado de carga unitario. Tomando en (05)  $w = \tilde{u}$  se obtiene

$$f(\tilde{u}) = \Phi_0^{(2)}(\tilde{u},\tilde{u}) > 0 \quad (06)$$

lo que constata que el trabajo de las fuerzas sobre  $\tilde{u}$  es siempre positivo.

#### Trayectoria Fundamental

A cada valor de  $\lambda$  corresponderá un estado de equilibrio  $u$  y en general se tendrá una trayectoria de equilibrio  $u, \lambda$  denominada fundamental por contener el estado indeformado dado por  $u = 0, \lambda = 0$ .

Se parametrizará esta trayectoria por su "longitud de arco"  $s$  dada por la condición

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 f(\tilde{u}) + \Phi_0^{(2)}\left(\frac{du}{ds}, \frac{du}{ds}\right) = 1 \quad (07)$$

y medida a partir del estado indeformado.

Con esta elección y mediante sucesivas derivaciones y evaluaciones en  $s = 0$  se obtienen las condiciones

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 f(\tilde{u}) + \Phi_0^{(2)}(u_1, u_1) &= 1 \\ \lambda_2 \lambda_1 f(\tilde{u}) + \Phi_0^{(2)}(u_2, u_1) &= 0 \\ (\lambda_3 \lambda_1 + \lambda_2^2) f(\tilde{u}) + \Phi_0^{(2)}(u_3, u_1) \\ &+ \Phi_0^{(2)}(u_2, u_2) = 0 \\ \dots \end{aligned} \quad (08)$$

donde se ha llamado  $\lambda_r = \left. \frac{d^r \lambda}{ds^r} \right|_{s=0}$  ;  $u_r = \left. \frac{d^r u}{ds^r} \right|_{s=0}$ .

Si se substituye la trayectoria fundamental  $u(s)$ ,  $\lambda(s)$  en la condición de equilibrio, se obtiene  $\forall s$  en un entorno de  $s = 0$  la identidad

$$\Phi^{(1)}[u(s); \lambda(s)](w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^k \quad (09)$$

Si guiendo un esquema de perturbaciones se obtiene al derivar sucesivamente respecto a  $s$  y evaluar en  $s = 0$  la sucesión de ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(2)}(u_1, w) - \lambda_1 f(w) &= 0 \\ \Phi_0^{(2)}(u_2, w) - \lambda_2 f(w) + \Phi_0^{(3)}(u_1, u_1, w) &= 0 \\ \Phi_0^{(2)}(u_3, w) - \lambda_3 f(w) + 3 \Phi_0^{(3)}(u_1, u_2, w) \\ &+ \Phi_0^{(4)}(u_1, u_1, u_1, w) = 0 \\ \dots \end{aligned} \quad (10)$$

$\forall w \in \mathbb{R}^k$

En general las soluciones se escribirán  $u_r = \lambda_r \tilde{u} + u_r^*$  donde  $u_r^*$  es la solución de la  $r$ -ésima ecuación de equilibrio para  $\lambda = 0$ . Se obtiene entonces  $\lambda_r$  mediante el empleo de la  $r$ -ésima de las condiciones (08).

De esta manera se construyen los primeros términos del desarrollo de la trayectoria fundamental

$$\begin{aligned} u(s) &= u_1 s + \frac{1}{2} u_2 s^2 + \frac{1}{6} u_3 s^3 + \dots \\ \lambda(s) &= \lambda_1 s + \frac{1}{2} \lambda_2 s^2 + \frac{1}{6} \lambda_3 s^3 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

#### Estado Crítico

La trayectoria fundamental alcanza en  $s = s_c$  un estado de equilibrio crítico simple si y solo si existe un único vector  $\hat{u} \in \mathbb{R}^k$  no nulo tal que

$$\Phi_0^{(2)}(u(s_c); \lambda(s_c))(\hat{u}, w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^k \quad (12)$$

Empleando el desarrollo (03) para escribir esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned} &\Phi_0^{(2)}(\hat{u}, w) + \Phi_0^{(3)}(u(s_c), \hat{u}, w) \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_0^{(4)}(u(s_c), u(s_c), \hat{u}, w) + \dots = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (13)$$

Si se substituye en esta última  $u(s_c)$  por el desarrollo (11) y se agrupan las potencias de  $s_c$  se obtiene el siguiente problema de autovalores

$$\begin{aligned} &\Phi_0^{(2)}(\hat{u}, w) + s_c \Phi_0^{(3)}(u_1, \hat{u}, w) + \frac{1}{2} s_c^2 \left[ \Phi_0^{(3)}(u_2, \hat{u}, w) \right. \\ &\left. + \Phi_0^{(4)}(u_1, u_1, \hat{u}, w) \right] + \dots = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (14)$$

Sea  $s_{c1}$  el menor autovalor positivo del autoproblema lineal y  $\hat{u}_1$  su autovector correspondiente normalizado según  $\bar{\Phi}_0^{(2)}(\hat{u}_1, \hat{u}_1) = 1$ ,  $s_{c2}$  el menor autovalor positivo del autoproblema cuadrático y  $\hat{u}_2$  con  $\bar{\Phi}_0^{(2)}(\hat{u}_2, \hat{u}_2) = 1$  su autovector normalizado, etc.

Se obtiene de esta manera las sucesiones  $s_{c1}, s_{c2}, \dots$  y  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots$  que convergen respectivamente a  $s_c$  y  $\hat{u}$ .

Las sucesiones

$$u_{c1} = u_1 s_{c1}, \quad u_{c2} = u_1 s_{c2} + \frac{1}{2} u_2 s_{c2}^2, \quad \dots \quad (15)$$

$$\lambda_{c1} = \lambda_1 s_{c1}, \quad \lambda_{c2} = \lambda_1 s_{c2} + \frac{1}{2} \lambda_2 s_{c2}^2, \quad \dots$$

convergen respectivamente a  $u_c = u(s_c)$  y  $\lambda_c = \lambda(s_c)$  que son las coordenadas del estado crítico.

Punto limite

Si  $f(\hat{u}) \neq 0$  el parámetro de carga  $\lambda$  se hace estacionario sobre la trayectoria fundamental en el punto crítico. Si además  $\bar{\Phi}_c^{(3)}(\hat{u}, \hat{u}, \hat{u}) \neq 0$  se trata de un máximo, el estado de equilibrio se denomina punto limite y resulta siempre inestable. Nótese en esta última condición el subíndice  $c$  indicando que se trata de la diferencial de tercer orden de  $\bar{\Phi}$  en el estado crítico  $u_c, \lambda_c$ .

Punto de bifurcación

Si se tiene en cambio  $f(\hat{u}) = 0$  una trayectoria secundaria interseca la fundamental en el punto crítico obteniéndose un punto de bifurcación. Si  $\bar{\Phi}_c^{(3)}(\hat{u}, \hat{u}, \hat{u}) \neq 0$  la bifurcación es asimétrica y el estado crítico inestable mientras que si  $\bar{\Phi}_c^{(3)}(\hat{u}, \hat{u}, \hat{u}) = 0$  se tiene un punto de bifurcación simétrica, en el cual el parámetro de carga  $\lambda$

se hace estacionario sobre la trayectoria secundaria en el punto crítico.

Sea  $\tilde{v}$  solución de la ecuación

$$\tilde{\Phi}_c^{(2)}(\tilde{v}, w) + \tilde{\Phi}_c^{(2)}(\hat{u}, \hat{u}, w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^k \quad (16)$$

con este vector se construye el coeficiente

$$d = \frac{1}{\sigma} \tilde{\Phi}_c^{(4)}(\hat{u}, \hat{u}, \hat{u}, \hat{u}) - \frac{1}{2} \tilde{\Phi}_c^{(2)}(\tilde{v}, \tilde{v}) \quad (17)$$

El punto de bifurcación simétrica será estable y  $\lambda$  adoptará un mínimo sobre la trayectoria secundaria si  $d > 0$ , mientras que en el caso  $d < 0$  la bifurcación simétrica será inestable y  $\lambda$  adoptará un máximo sobre aquella.

Todos estos resultados se hallan demostrados en la Ref. [1].

## DESARROLLO DEL ELEMENTO

### Definición de la geometría y sistemas de coordenadas

Sea una estructura espacial como la de la Figura 1. Se numeran sus nudos según  $P^\alpha$  con  $\alpha = 1, NN$  donde  $NN$  es el número total de nudos que la componen.

Para cada  $\alpha$ , la ubicación en el espacio del nudo  $P^\alpha$  se obtiene especificando las tres componentes de su vector de posición  $\underline{R}^\alpha$  respecto al sistema de coordenadas globales (SCG) o  $X_1, X_2, X_3$  adoptado.

Para cada viga de la estructura, se adopta un sistema de coordenadas intermedio (SCI) o  $x'_1, x'_2, x'_3$  con origen  $o'$  en la sección media de la viga y cuyo eje  $x'_1$  coincide con la dirección longitudinal de la misma.

Para cada una de las láminas que componen la viga de pared delgada se adopta un sistema de coordenadas locales (SCL) o  $x_1, x_2, x_3$  con origen  $o$  en el centro de su sección media y eje  $x_1$  según la dirección longitudinal y con el

mismo sentido que el eje  $x'_1$ . La Figura 2 muestra estos sistemas de referencia, especificando las dimensiones geométricas.

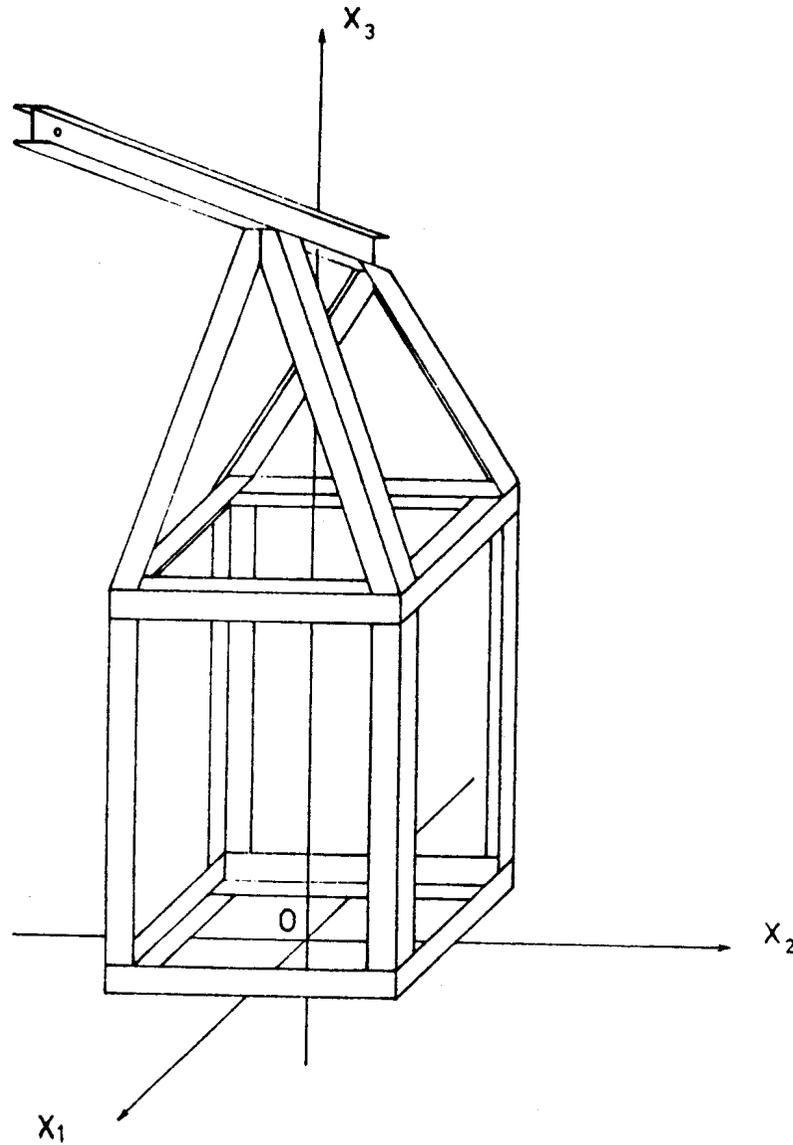


Figura 1. Sistema de Coordenadas Globales.

Sea  $B = (\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$  la terna de versores del SCG ,  
 $b' = (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$  la terna de versores del SCI y  
 $b = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  la terna correspondiente al SCL , se  
 emplearán las matrices  $R_{Bb}$  y  $R_{b'b}$  de cambio de base  
 definidas por

$$[\underline{v}]_B = R_{Bb} [\underline{v}]_b \quad (18)$$

$$[\underline{v}]_{b'} = R_{b'b} [\underline{v}]_b$$

donde  $[\underline{v}]_B$  ,  $[\underline{v}]_{b'}$  ,  $[\underline{v}]_b$  son las matrices columna de  
 coordenadas de un vector cualquiera  $\underline{v}$  en las bases  $B$  ,  
 $b'$  ,  $b$  respectivamente.

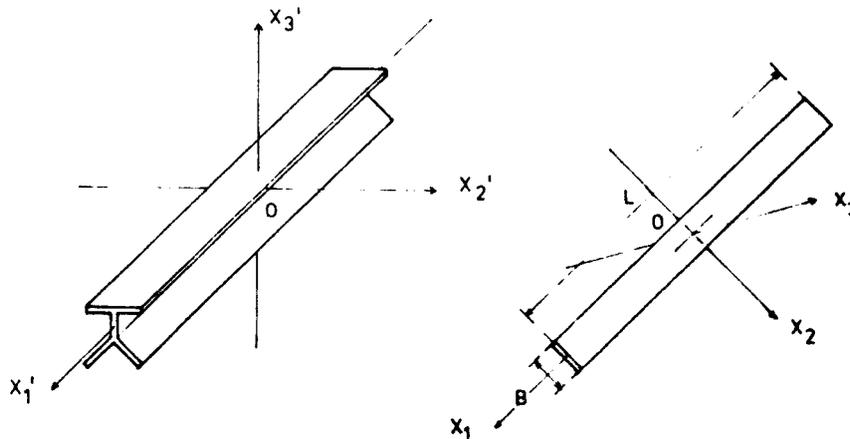


Figura 2. SCI, SCL y dimensiones geométricas.

### Cinemática de los nudos

La cinemática de un nudo de la estructura queda definida por su vector de desplazamiento  $\underline{U}$  y por su tensor de rotación  $C$ . Como este tensor es ortonormal, sólo presenta tres parámetros independientes que en el caso de pequeños giros pueden ser tomados como tres rotaciones aplicadas en cualquier orden alrededor de tres ejes mutuamente ortogonales. Cuando se trata de grandes giros esta conmutatividad no permanece válida y es preciso construir en un sistema de coordenadas adecuado la matriz de rotación que dependerá en forma no lineal de los sucesivos giros experimentados por el nudo.

Se sabe que si la terna ortonormal  $B'$  se obtiene rotando la terna  $B$  un ángulo  $\alpha$  alrededor del versor  $n$  en sentido antihorario, la matriz  $C$  de rotación, definida por

$$[\underline{v}]_{B'} = C [\underline{v}]_B \quad (19)$$

tiene sus elementos dados por la expresión

$$C_{ij} = \delta_{ij} \cos(\alpha) + n_i n_j (1 - \cos(\alpha)) + \epsilon_{ijk} n_k \sin(\alpha) \quad (20)$$

en la que  $\delta_{ij}$  es igual a 1 si  $i=j$  y 0 en caso contrario,  $\epsilon_{ijk}$  es igual a 0 si hay dos o más índices repetidos, 1 si  $ijk$  es una permutación par de 123 y -1 si la permutación es impar.  $n_i$  son las componentes del versor  $\hat{n}$  en la base  $B$ . Índices repetidos indican suma de 1 a 3.

Sea entonces en el sistema de coordenadas globales tres giros finitos sucesivos de magnitudes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  realizados alrededor de los ejes coordenados  $X_1, X_2, X_3$  respectivamente. Sea  $B_1$  la terna obtenida a partir de  $B$  mediante la rotación de magnitud  $\alpha_1$  alrededor de  $X_1$ , sea  $B_2$  la terna obtenida a partir de  $B_1$  mediante la rotación de magnitud  $\alpha_2$  alrededor de  $X_2$  y sea  $B'$  la terna final obtenida a partir de  $B_2$  mediante la rotación de magnitud  $\alpha_3$  alrededor de  $X_3$ . Las matrices de rotación asociadas, definidas por

$$[\underline{v}]_{B'} = C [\underline{v}]_B$$

$$\begin{aligned} \underline{[v]}_{B_2} &= C_2 \underline{[v]}_{B_1} \\ \underline{[v]}_{B_1} &= C_3 \underline{[v]}_{B_2} \end{aligned} \quad (21)$$

se obtienen de

$$C_{r_{ij}} = \delta_{ij} \cos(\alpha_r) + n_i^r n_j^r (1 - \cos(\alpha_r)) + \epsilon_{ijk} n_k^r \operatorname{sen}(\alpha_r) \quad (22)$$

$r = 1, 2$

donde  $n_i^1$  son las componentes del versor  $\hat{E}_1$  de la terna B en la base  $B_1$ ,  $n_i^2$  son las componentes del versor  $\hat{E}_2$  de la terna B en la base  $B_1$  y  $n_i^3$  son las componentes del versor  $\hat{E}_3$  de la terna B en la base  $B_2$ , las que se escriben respectivamente

$$\begin{aligned} [\hat{E}_1]_{B_1} & \\ [\hat{E}_2]_{B_1} &= C_1 [\hat{E}_2]_{B_2} \\ [\hat{E}_3]_{B_2} &= C_2 [\hat{E}_3]_{B_1} = C_2 C_1 [\hat{E}_3]_{B_1} \end{aligned} \quad (23)$$

Se tiene entonces

$$\underline{[v]}_{B_1} = C_3 \underline{[v]}_{B_2} = C_3 C_2 \underline{[v]}_{B_1} = C_3 C_2 C_1 \underline{[v]}_{B_1} \quad (24)$$

de donde la matriz final C, dada por

$$\underline{[v]}_{B_1} = C \underline{[v]}_{B_1} \quad (25)$$

se construye realizando el producto

$$C = C_3 C_2 C_1 \quad (26)$$

Habiendo realizado las operaciones indicadas los coeficientes de C resultan

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_2) \\
 C_{12} &= \text{sen}(\alpha_3) \cos(\alpha_2) \\
 C_{13} &= -\text{sen}(\alpha_2) \\
 \\
 C_{21} &= -\text{sen}(\alpha_3) \cos(\alpha_1) + \text{sen}(\alpha_2) \text{sen}(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \\
 C_{22} &= \text{sen}(\alpha_3) \text{sen}(\alpha_2) \text{sen}(\alpha_1) + \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_1) \\
 C_{23} &= \text{sen}(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \\
 \\
 C_{31} &= \text{sen}(\alpha_3) \text{sen}(\alpha_1) + \text{sen}(\alpha_2) \cos(\alpha_3) \cos(\alpha_1) \\
 C_{32} &= \text{sen}(\alpha_3) \text{sen}(\alpha_2) \cos(\alpha_1) - \text{sen}(\alpha_1) \cos(\alpha_3) \\
 C_{33} &= \cos(\alpha_2) \cos(\alpha_1)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Se observa que cuando  $\alpha_i \ll 1$  para  $i=1,2$  se tiene en primer orden

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix}
 \tag{28}$$

que es la matriz de rotación empleada en el análisis lineal.

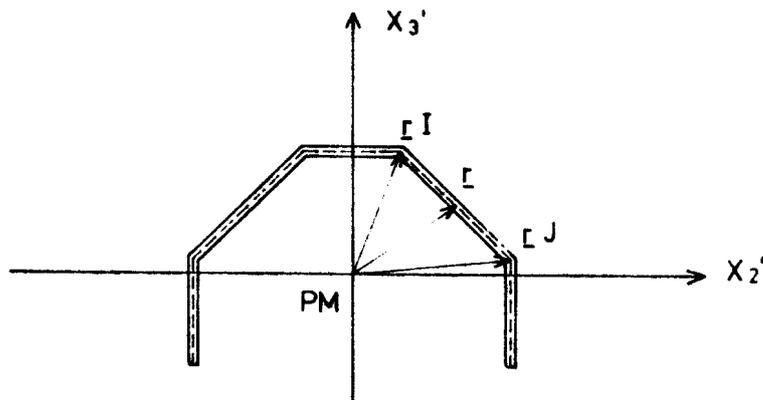


Figura 3. Sección extrema de una viga.

### Movimiento de las secciones extremas

Se ha dicho que la cinemática de un nudo determina el movimiento de las secciones extremas de las vigas que concurren al mismo. Se explicitará esto ahora.

En la Figura 3 se indica la sección extrema de una viga sobre el nudo P donde el vector  $\underline{r}$  mide la posición inicial respecto al nudo de un punto cualquiera de la sección.

En la hipótesis de movimiento rígido, el vector  $\underline{R}$  que da la posición final de este punto luego de la traslación  $\underline{U}^p$  del nudo y de su rotación C tiene por componentes en el sistema global

$$[\underline{R}]_g = [\underline{U}^p]_g + [\underline{r}']_g \quad (29)$$

donde  $\underline{r}'$  se obtiene a partir de  $\underline{r}$  mediante la rotación C según

$$[\underline{r}]_g = [\underline{r}']_g = C [\underline{r}]_g \quad (30)$$

de donde

$$[\underline{R}]_g = [\underline{U}^p]_g + C^T [\underline{r}]_g \quad (31)$$

donde el supraíndice T indica trasposición matricial. Para el desplazamiento del punto se tiene

$$[\underline{u}]_g = [\underline{R}]_g - [\underline{r}]_g = [\underline{U}^p]_g + (C^T - I) [\underline{r}]_g \quad (32)$$

donde I es la matriz identidad. En coordenadas locales

$$[\underline{u}]_b = [\underline{U}^p]_b + R_{gb}^T (C^T - I) R_{gb} [\underline{r}]_b \quad (33)$$

Los giros escritos en coordenadas locales vienen dados por la matriz jacobiana

$$c \equiv \frac{\partial [\underline{u}]_b}{\partial [\underline{r}]_b} = R_{gb}^T (C^T - I) R_{gb} \quad (34)$$

y resultan uniformes sobre toda la sección.

### Campos de desplazamiento

Los campos de desplazamiento se escribirán para cada lámina en su correspondiente sistema de coordenadas local y serán la superposición de desplazamientos relacionados con el movimiento de los nudos extremos más dos modos de desplazamiento interiores con simetría definida respecto al plano medio de la viga para los cuales las secciones extremas no se mueven. Para la descripción de estos campos se emplearán interpolantes polinómicos según ambas direcciones de la lámina.

### Polinomios interpolantes

Sean  $p_{li}$ ,  $p_{li}$  con  $i=1,2$  polinomios de primer grado y  $q_{lj}$ ,  $q_{lj}$  con  $j=1,4$  polinomios de tercer grado, donde el subíndice  $l$  indica dependencia con la variable longitudinal  $x_1$  y el subíndice  $i$  con la transversal  $x_2$ , agrupados según los vectores

$$\begin{aligned} p_l &= ( p_{l1}, p_{l2} ) \\ p_i &= ( p_{i1}, p_{i2} ) \\ q_l &= ( q_{l1}, q_{l2}, q_{l3}, q_{l4} ) \\ q_i &= ( q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}, q_{i4} ) \end{aligned} \tag{35}$$

y tales que

$$\begin{aligned} p_l(-L/2) &= p_l(-A/2) = ( 1, 0 ) \\ p_l(L/2) &= p_l(A/2) = ( 0, 1 ) \\ q_l(-L/2) &= q_l(-A/2) = ( 1, 0, 0, 0 ) \\ q_{l,1}(-L/2) &= q_{l,2}(-A/2) = ( 0, 1, 0, 0 ) \\ q_l(L/2) &= q_l(A/2) = ( 0, 0, 1, 0 ) \\ q_{l,1}(L/2) &= q_{l,2}(A/2) = ( 0, 0, 0, 1 ) \end{aligned} \tag{36}$$

donde los subíndices  $1,2$  después de la coma indican derivación respecto a  $x_1, x_2$  respectivamente.

Se emplearán también los polinomios  $\chi_e, \chi_a, \psi_e, \psi_a$  de grados 2, 3, 4, 5 respectivamente en la variable  $x_1$  donde los subíndices  $e,a$  indican simetría o antisimetría respecto al centro del intervalo dado por  $x_1 = 0$ . Estos polinomios satisfacen

$$\chi_e(-L/2) = \chi_e(L/2) = 0 \quad (37)$$

$$\chi_a(-L/2) = \chi_a(L/2) = 0$$

$$\psi_e(-L/2) = \psi_{e,1}(-L/2) = \psi_e(L/2) = \psi_{e,1}(L/2) = 0$$

$$\psi_a(-L/2) = \psi_{a,1}(-L/2) = \psi_a(L/2) = \psi_{a,1}(L/2) = 0$$

y están normalizados de manera tal que su máximo valor en el intervalo  $[-L/2, L/2]$  sea la unidad.

#### Funciones de interpolación

Se adoptará para la estructura los seis grados de libertad por nudo correspondientes a su movimiento rígido más ocho grados de libertad por arista en cada viga. Estos últimos están asociados a dos modos, uno simétrico y otro antisimétrico, por cada uno de los tres desplazamientos y el giro alrededor de sí misma de cada arista considerada.

Los desplazamientos de una lámina con aristas  $A^I, A^J$  perteneciente a una viga con nudos extremos  $P^M, P^N$  se escribirán en componentes del SCL según

$$u_i = u_{i0} + u_{ie} + u_{ia} \quad i=1,2 \quad (38)$$

Las funciones  $u_{i0}$  están asociadas al desplazamiento de las secciones extremas mientras que  $u_{ie}, u_{ia}$  son desplazamientos simétricos y antisimétricos respectivamente para los cuales las secciones extremas permanecen fijas.

Agrupando los desplazamientos y giros de los extremos de las aristas  $A^I, A^J$  en las secciones extremas  $M, N$

según

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_1^I &= ( u_1^{IM}, u_1^{IN} ) \\
 \underline{u}_2^I &= ( u_2^{IM}, u_{2,1}^{IM}, u_2^{IN}, u_{2,1}^{IN} ) \\
 \underline{u}_3^I &= ( u_3^{IM}, u_{3,1}^{IM}, u_3^{IN}, u_{3,1}^{IN} ) \\
 \underline{\phi}_1^I &= ( \phi_1^{IM}, \phi_{1,1}^{IM}, \phi_1^{IN}, \phi_{1,1}^{IN} ) \\
 & \hspace{20em} (39) \\
 \underline{u}_1^J &= ( u_1^{JM}, u_1^{JN} ) \\
 \underline{u}_2^J &= ( u_2^{JM}, u_{2,1}^{JM}, u_2^{JN}, u_{2,1}^{JN} ) \\
 \underline{u}_3^J &= ( u_3^{JM}, u_{3,1}^{JM}, u_3^{JN}, u_{3,1}^{JN} ) \\
 \underline{\phi}_1^J &= ( \phi_1^{JM}, \phi_{1,1}^{JM}, \phi_1^{JN}, \phi_{1,1}^{JN} )
 \end{aligned}$$

donde  $\phi_1 \equiv u_{3,2}$ . De esta manera las funciones  $u_{10}$  resultan

$$\begin{aligned}
 u_{10} &= ( \underline{u}_1^I \cdot \underline{p}_1 ) p_{11} + ( \underline{u}_1^J \cdot \underline{p}_1 ) p_{12} \\
 u_{20} &= ( \underline{u}_2^I \cdot \underline{q}_1 ) p_{11} + ( \underline{u}_2^J \cdot \underline{q}_1 ) p_{12} \\
 & \hspace{20em} (40) \\
 u_{30} &= ( \underline{u}_3^I \cdot \underline{q}_1 ) q_{11} + ( \underline{\phi}_1^I \cdot \underline{q}_1 ) q_{12} \\
 & \quad + ( \underline{u}_3^J \cdot \underline{q}_1 ) q_{13} + ( \underline{\phi}_1^J \cdot \underline{q}_1 ) q_{14}
 \end{aligned}$$

Si ahora se agrupa los grados de libertad interiores de las aristas  $i,j$  correspondientes a los modos simétrico y antisimétrico a según

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_{10} &= ( u_{10}^I, u_{10}^J ) \\
 \underline{u}_{20} &= ( u_{20}^I, u_{20}^J ) \\
 \underline{u}_{30} &= ( u_{30}^I, \phi_{10}^I, u_{30}^J, \phi_{10}^J )
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_{1a} &= ( u_{1a}^I , u_{1a}^J ) \\
 \underline{u}_{2a} &= ( u_{2a}^I , u_{2a}^J ) \\
 \underline{u}_{3a} &= ( u_{3a}^I , \phi_{1a}^I , u_{3a}^J , \phi_{1a}^J )
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

las funciones  $u_{ia}$ ,  $u_{ia}$  se escriben

$$\begin{aligned}
 u_{1a} &= ( \underline{u}_{1a} \cdot \underline{p}_1 ) \chi_a \\
 u_{2a} &= ( \underline{u}_{2a} \cdot \underline{p}_1 ) \psi_a \\
 u_{3a} &= ( \underline{u}_{3a} \cdot \underline{q}_1 ) \psi_a \\
 u_{1a} &= ( \underline{u}_{1a} \cdot \underline{p}_1 ) \chi_a \\
 u_{2a} &= ( \underline{u}_{2a} \cdot \underline{p}_1 ) \psi_a \\
 u_{3a} &= ( \underline{u}_{3a} \cdot \underline{q}_1 ) \psi_a
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Sean  $\underline{r}^{IM}$ ,  $\underline{r}^{JM}$  los vectores de posición de los vértices  $i, j$  de la lámina sobre la sección extrema de la viga respecto al nudo correspondiente  $P^M$ . Se emplearán las expresiones obtenidas en (33) y (34) para escribir los coeficientes (39) de supraíndice  $M$  en términos del desplazamiento  $\underline{U}^M$  y del giro  $C^M$  del nudo.

Si se simboliza

$$\underline{[u]^{IM}}_b = \begin{bmatrix} u_1^{IM} \\ u_2^{IM} \\ u_3^{IM} \end{bmatrix}, \quad \underline{[u]^{JM}}_b = \begin{bmatrix} u_1^{JM} \\ u_2^{JM} \\ u_3^{JM} \end{bmatrix}
 \tag{43}$$

estas componentes pueden calcularse mediante

$$\begin{aligned}
 \underline{[u]^{IM}}_b &= \underline{[U]^{IM}}_b + R_{bb}^T (C^{MT} - I) R_{bb} \underline{[r]^{IM}}_b \\
 \underline{[u]^{JM}}_b &= \underline{[U]^{JM}}_b + R_{bb}^T (C^{MT} - I) R_{bb} \underline{[r]^{JM}}_b
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Los coeficientes asociados a derivadas de desplazamientos se escriben en términos de los elementos de la matriz jacobiana  $c$  definida en (34),

$$\begin{aligned}
 u_{2,1}^{IM} &= u_{2,1}^{JM} = c_{21}^M \\
 u_{3,1}^{IM} &= u_{3,1}^{JM} = c_{31}^M \\
 \phi_1^{IM} &= \phi_1^{JM} = c_{32}^M \\
 \phi_{1,1}^{IM} &= \phi_{1,1}^{JM} = 0
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

Expresiones similares a las (44) y (45) vinculan los coeficientes de (39) con supraíndices  $N$  con los desplazamientos y giros del nudo  $P^N$ .

#### Tensores asociados

Agrupando los grados de libertad de los nudos  $P^M$ ,  $P^N$  y de las aristas  $A^I$ ,  $A^J$  según

$$\underline{\Delta}^M = ( u_1^M, u_2^M, u_3^M, \alpha_1^M, \alpha_2^M, \alpha_3^M )
 \tag{46}$$

$$\underline{\Delta}^N = ( u_1^N, u_2^N, u_3^N, \alpha_1^N, \alpha_2^N, \alpha_3^N )$$

$$\underline{\Delta}^I = ( u_{1a}^I, u_{2a}^I, u_{3a}^I, \phi_{1a}^I, u_{1a}^I, u_{2a}^I, u_{3a}^I, \phi_{1a}^I )$$

$$\underline{\Delta}^J = ( u_{1a}^J, u_{2a}^J, u_{3a}^J, \phi_{1a}^J, u_{1a}^J, u_{2a}^J, u_{3a}^J, \phi_{1a}^J )$$

el conjunto de todos los grados de libertad de la lámina será

$$\underline{\Delta} = ( \underline{\Delta}^M, \underline{\Delta}^N, \underline{\Delta}^I, \underline{\Delta}^J )
 \tag{47}$$

y se denotarán simplemente  $\Delta_i$  con  $i=1,20$ .

A partir de los campos de desplazamiento propuestos en (38) se obtienen las deformaciones y tensiones en la lámina mediante las ecuaciones cinemáticas y constitutivas

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} ) \quad (48)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [ (1-\nu) \epsilon_{ij} + \nu \delta_{ij} \epsilon_{kk} ]$$

para finalmente escribir la energía de deformación

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \, dA \quad (49)$$

Las contribuciones de la lámina a los tensores  $\xi_0^{(2)}$ ,  $\xi_0^{(3)}$ ,  $\xi_0^{(4)}$  introducidos en (03) quedan representadas en el SCL mediante los conjuntos de componentes

$$U_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \right|_{\underline{\Delta}=\underline{0}}$$

$$U_{ijk} = \left. \frac{\partial^3 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j \partial \Delta_k} \right|_{\underline{\Delta}=\underline{0}}$$

$$U_{ijkl} = \left. \frac{\partial^4 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j \partial \Delta_k \partial \Delta_l} \right|_{\underline{\Delta}=\underline{0}} \quad (50)$$

que deben ser rotados hasta el SCI para compatibilizar los desplazamientos de arista en la viga a efectos de ensamblar las contribuciones de todas las láminas.

Finalmente los bloques correspondientes al desplazamiento de los nudos extremos deben ser rotados hasta el SC0 para poder sumar el aporte de todas las vigas a la energía de deformación total.

## CONCLUSIONES

Se ha desarrollado la formulación de un elemento de lámina para el análisis no lineal estático de estructuras espaciales compuestas de vigas de pared delgada.

El método propuesto involucra 8 GL por arista en cada viga y 6 GL por nudo. Vigas o perfiles de sección L de alas iguales o desiguales y de sección V significarán 24 GL, mientras que las secciones U, C, T, Y involucran 32 GL.

El grado de detalle obtenido en la descripción del alabeo de las secciones y la deformación en su plano sólo se justifica en un análisis no lineal.

Se pretende con este elemento captar en el comportamiento global de la estructura, pérdidas o incrementos de rigidez por deformación de secciones, y en especial la influencia en las cargas críticas y en la respuesta postcrítica de los modos de pandeo globales y locales y de su interacción.

Un código que implemente el método propuesto será desarrollado a tal efecto.

## REFERENCIAS

- [1] Eterovic, A.L., "Análisis de la estabilidad del equilibrio en sistemas estructurales continuos", Trabajo Final para la licenciatura en física, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, U.N.C., Junio 1987.