

FORMULACIONES DISCRETAS EN PROBLEMAS DE INESTABILIDAD
CON RESTRICCIONES

Luis A. GODOY

Departamento de Estructuras, FCFN,
Universidad Nacional de Córdoba

RESUMEN

En este trabajo se discuten aspectos relacionados con el comportamiento y la formulación de problemas de inestabilidad con restricciones de tipo unilateral. Como problema específico considerado, se trata el de una anillo en una cavidad rígida. La formulación se basa en criterios energéticos, y se discuten algunas posibilidades para plantear el problema de equilibrio y de estabilidad.

ABSTRACT

Some aspects related to the behaviour and formulation of instability problems with unilateral restrictions are discussed in this work. The problem of a ring inside a rigid boundary is discussed in detail. The formulation is based on energy principles, and some possibilities to state the equilibrium and stability problems are presented.

INTRODUCCION

Una teoría general de estabilidad elástica, basada en el estudio de la energía potencial total de un sistema continuo fue presentada en 1945 por Koiter /1/, y extendida para sistemas discretos por Thompson /2/. Los problemas estudiados en esas referencias se concentran en casos en que la energía potencial está restringida por condiciones de contorno en forma de igualdades en términos de variables de desplazamiento o tensión del sistema. En el presente trabajo resultan de interés aquellos problemas sujetos a restricciones diferentes de las condiciones clásicas de contorno, y que en general se representan en forma de desigualdades. Ejemplos de estructuras sujetas a estas restricciones ocurren cuando (a) la estructura se encuentra inicialmente en contacto con el contorno, pero puede perderlo en una dirección; (b) inicialmente no existe contacto, pero se produce al deformarse la estructura.

La formulación de equilibrio de problemas de contacto unilateral (como usualmente se conocen) ha sido bastante desarrollada en mecánica (ver, por ejemplo, las referencias /3,4/ y las allí citadas). En contraste, el problema de estabilidad del equilibrio sólo ha sido tratado en forma general para sistemas discretos por Burgess /5,6/. Debido al poco desarrollo que se observa en este campo, parece razonable comenzar esta revisión estableciendo la importancia de los problemas de inestabilidad con restricciones, el tipo de inestabilidad que ocurre, y cómo ese comportamiento puede ubicarse dentro de la teoría general de estabilidad. En particular, lo anterior se discute en relación a un problema específico: la inestabilidad de un anillo delgado en una cavidad rígida. La segunda parte del trabajo se concentra en algunas formulaciones de equilibrio en problemas de contacto unilateral, seguida de los correspondientes criterios de estabilidad. La presentación sigue la forma matricial que normalmente se emplea en el método de elementos finitos, y pretende establecer algunas bases para una formulación que pueda ser discretizada mediante elementos finitos.

PRIMERA PARTE
COMPORTAMIENTO INESTABLE DE LAMINAS DELGADAS
EN UNA CAVIDAD RIGIDA

ALGUNOS EJEMPLOS EN INGENIERIA

Existe una cantidad de estructuras constituidas por una lámina delgada (generalmente de revolución) rodeada por un medio rígido que le impide desplazarse en una dirección (hacia el exterior) pero sin restricciones a desplazamientos hacia el interior de la cáscara. Este tipo de componentes estructurales se encuentra principalmente en revestimientos de túneles, y en recipientes de presión de hormigón armado o de materiales compuestos. El revestimiento es una lámina delgada metálica, cuya función varía según la aplicación de que se trate: en túneles para conducción de líquidos y gases provee una superficie suave para facilitar el flujo; aísla el fluido del macizo en el que se ha excavado; o contribuye a mantener la forma del túnel. En recipientes de presión evita la corrosión del hormigón armado; actúa como escudo contra pérdidas de material radioactivo en reactores nucleares, etc.

En los casos mencionados anteriormente pueden generarse esfuerzos de compresión circunferencial en la cáscara metálica que hagan peligrar su estabilidad. Básicamente, pueden reconocerse dos mecanismos que generen esa compresión: mecanismos que no impliquen un desplazamiento del contorno, o bien procesos de contracción del macizo que rodea la cáscara; estos mecanismos se denominarán en este trabajo de contorno fijo /7-18/ y de contorno móvil /19/ respectivamente. Mecanismos de contorno fijo se generan debido a calentamiento de la cáscara metálica; presiones generadas en la interfase cáscara/cavidad (tanto sea por filtración de fluidos, como las que se producen durante pruebas de inspección de impermeabilidad por inyección de agua o gas a presiones del orden de 50 kPa); deformación por carga para que la cáscara entre en una cavidad de diámetro menor a ella (force-fitting); etc. Mecanismos de contorno móvil pueden darse por retracción o enfriamiento de hormigón; por pretensado del macizo; etc.

De los problemas anteriores surge que estructuras laminares de revestimiento como las mencionadas deben diseñarse teniendo en cuenta la posibilidad de inestabilidad. Un segundo tipo de comportamiento, asociado al

anterior, consiste en la propagación del pandeo de una tubería en una cavidad. Se ha observado experimentalmente que, bajo ciertas condiciones, una inestabilidad local puede propagarse, colapsando la totalidad de la tubería /20-23/. Este tipo de comportamiento, sin embargo, no será considerado en el presente trabajo.

ASPECTOS DEL COMPORTAMIENTO QUE DEBEN CONSIDERARSE

Consideremos inicialmente un cilindro perfecto en una cavidad circular rígida. En este caso no existe la posibilidad de inestabilidad de la lámina con carga simétrica, tanto sea por mecanismos de contorno fijo /14,16/ o móvil /19/. Para que exista inestabilidad, la lámina debe presentar imperfecciones en la geometría, como se indica en la Figura 1, o asimetrías en la carga.

El modelado teórico del problema debe, por lo tanto, incluir los siguientes aspectos:

- (a) El modelo de la lámina, considerando una teoría de giros no lineales; y ecuaciones constitutivas elásticas o elasto-plásticas.

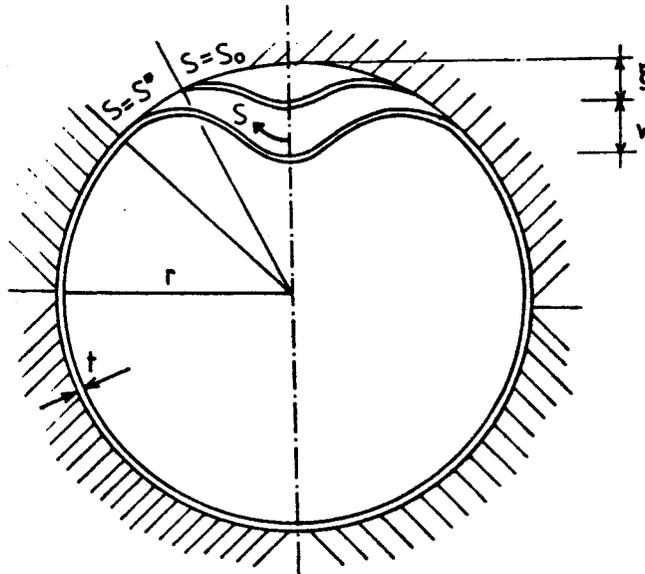


Figura 1. Parámetros y coordenadas.

(b) El mecanismo de carga, por ejemplo, compresión anular, presión exterior, peso propio, contracción del macizo, etc.

(c) Imperfecciones geométricas de la lámina.

(d) Restricciones producidas por el contorno rígido, que pueden ser con o sin fricción.

(e) Superficie de contacto variable.

El último aspecto puede explicarse con referencia a la Figura 1. Inicialmente, la cáscara tiene una imperfección que abarca una longitud $2 s_0$, con amplitud ξ . Al deformarse, la cáscara presentará una superficie diferente que no está en contacto con el confinamiento, de longitud $2 s^*$. Dependiendo del caso, esa longitud s^* puede ser mayor, igual o menor que s_0 .

INESTABILIDAD DE ANILLOS EN CONTORNO FIJO

Debido a las dificultades que presenta todo problema de cáscaras, en la literatura se encuentran casi exclusivamente problemas de anillos confinados, cuyo comportamiento puede ser investigado en el plano. Posiblemente el primer trabajo de este tipo se debe a Amstutz /7/, referido al colapso de cilindros largos en túneles de conducción de agua. Lo et.al. /8/ investigaron un anillo perfecto en cavidad fija, encontrando que la trayectoria poscrítica sólo se cruza con la fundamental trivial para cargas infinitas. Bucciarelli y Pian /9/ estudiaron un anillo imperfecto, inicialmente en contacto con la cavidad también imperfecta. Se supuso que el anillo tiene compresión circunferencial uniforme en la parte circunferencial del anillo. En general, el mecanismo detallado de carga se ignora, y se considera que el anillo está abierto en algún lugar alejado de la imperfección y se aplican allí cargas anulares, como se indica en la Figura 2.a. Para el problema de la Referencia /9/ resultó que la inestabilidad puede ser de tipo bifurcación, o bien de carga límite, de acuerdo a la amplitud de la imperfección. Resultados experimentales fueron obtenidos por Chan y Mc Minn /11/, y mostraron gran dispersión en cargas de pandeo.

El anillo imperfecto bajo compresión uniforme dentro de una cavidad rígida circular fue estudiado por Burgess /14/, quien demostró que existe una imperfección crítica para la que se produce bifurcación del equilibrio. Imper-

fecciones mayores están asociadas a cargas límites, mientras que imperfecciones menores tienden a restituir la forma circular al anillo. Estas características se ilustran en la Figura 2.

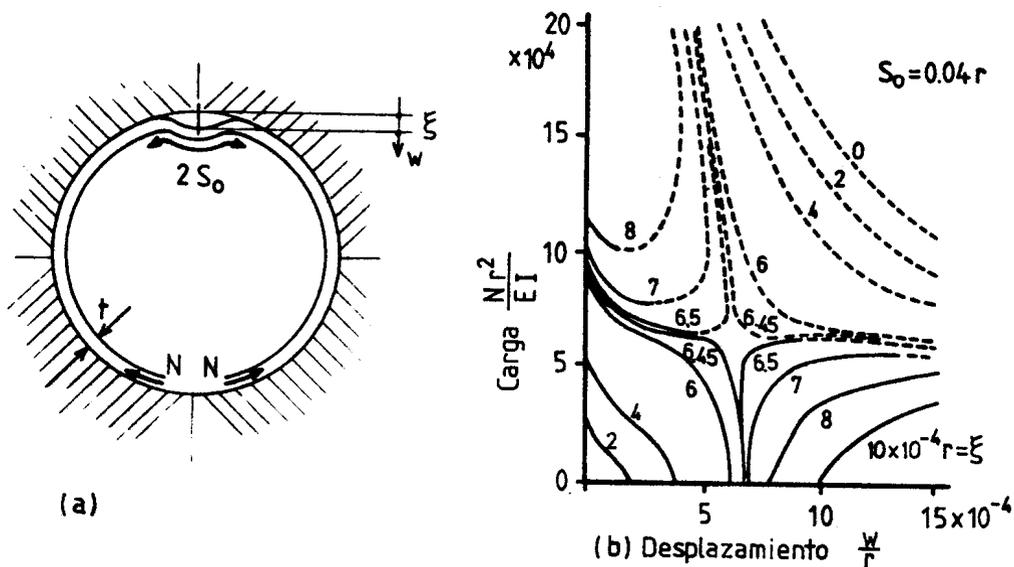


Figura 2. Inestabilidad de anillo imperfecto en cavidad circular /14/.

La carga de bifurcación N_c resulta

$$N_c = \pi^2 E I / s_0^2 \quad (1)$$

mientras que la imperfección crítica vale

$$\xi_c = 4/r (s_0/\pi)^2 \quad (2)$$

Para imperfecciones superiores a la crítica, se tiene inestabilidad en

$$N_L = 3.84 \frac{E I}{\xi r} \quad (3)$$

donde E es el módulo de elasticidad del anillo, e I es su momento de inercia. Las características de carga-desplazamiento fueron verificadas por Burgess en su tesis doctoral /5/. El comportamiento de este caso resulta caracterizable como de bifurcación asimétrica.

Otro caso de interés en la literatura es el del anillo perfecto en una cavidad rígida, pero sometido a carga tipo peso propio, como se ilustra en la Figura 3.a. Los

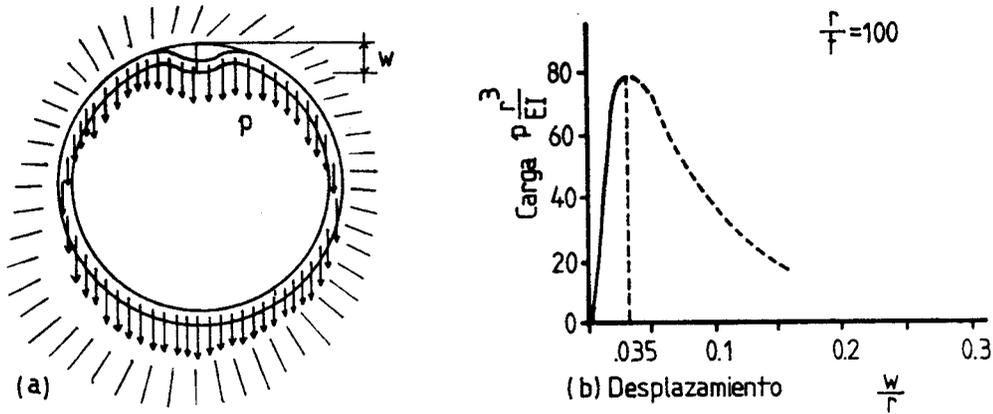


Figura 3. Inestabilidad de anillo perfecto bajo peso propio /12/.

estudios de Zagustin y Herrmann /12/ muestran que al aumentar la carga, el anillo se separa de la cavidad, de modo que la deformada se asemeja a una imperfección. Para un determinado valor de carga se produce inestabilidad en un punto límite (de tipo snap-through), con gran pérdida de rigidez pasando el punto límite. La carga límite en este caso resulta

$$p_L = 1.985 \frac{E I}{r^3} \left(\frac{r}{t} \right)^{4/5} \quad (4)$$

El máximo desplazamiento w para la carga límite puede escribirse como

$$w_L = 1.384 r \left(\frac{t}{r} \right)^{4/5} \quad (5)$$

La Figura 3.b muestra la trayectoria carga-desplazamiento para un caso particular, con $r/t = 100$.

En los casos anteriores las ecuaciones constitutivas se supusieron de tipo elástico lineal. Kyriakides y Youn /16/ analizaron un anillo imperfecto en una cavidad circular, en el que el mecanismo de carga es una presión exterior normal al anillo y actuando sólo en la zona separada de la cavidad, como ilustra la Figura 4. Como material constitutivo supusieron elástico lineal, elástico no lineal y elasto plástico, con cinemática de grandes giros y pequeñas deformaciones.

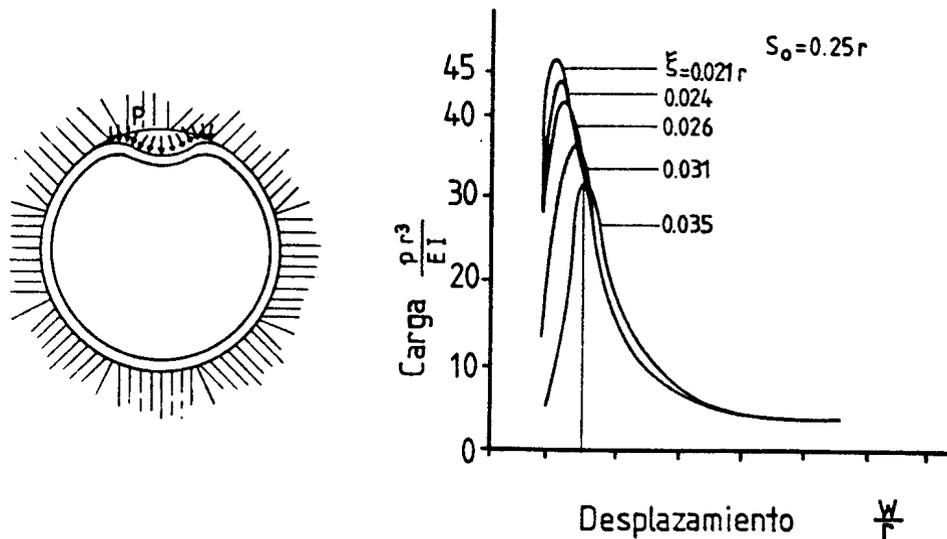


Figura 4. Inestabilidad de un anillo bajo presión en la zona de imperfección /16/.

Se obtuvieron resultados para un número limitado de casos de interés, considerando que el anillo es inextensional. Resulta interesante señalar que la inestabilidad se produce para desplazamientos grandes, y no existe bifurcación para carga finita. Después de alcanzado el punto límite, la trayectoria se vuelve ines-

table. Si se incluye plasticidad en el modelo, la carga límite cae (posiblemente hasta la mitad de la carga para material elástico lineal). La Figura 4.b muestra resultados para modelo elástico lineal.

En resumen, si la carga se aplica de tal modo que el anillo imperfecto esté en compresión uniforme, existe un problema de bifurcación del equilibrio para una determinada imperfección crítica. En este caso, los desplazamientos son pequeños en el momento de la bifurcación; las trayectorias presentan un punto límite para imperfecciones mayores a la crítica, y comportamiento estable para imperfecciones menores. Si la carga es de tipo presión, no hay bifurcación pero sí snap-through para grandes desplazamientos. Pasado el punto límite la trayectoria es inestable.

En todos los casos anteriores el anillo estaba inicialmente en contacto con la cavidad. En el trabajo de García Garino et.al. /18/ el anillo no está en contacto con el confinamiento en la primera fase: al iniciarse el proceso de carga, simulada como una presión exterior, el anillo se contrae y padea por bifurcación debido a la presión uniforme, sin restricciones. Los desplazamientos poscríticos son estabilizados por la cavidad, con lo que el anillo recupera rigidez. Es interesante observar que al aumentar la presión el anillo concentra su deformación en una zona, constituyendo una especie de imperfección local, como en otros casos comentados anteriormente. A partir de allí, y siendo un anillo imperfecto en una cavidad circular bajo presión exterior, debe esperarse un comportamiento de grandes desplazamientos con snap-through. Los resultados, presentados en la Figura 5, confirman ese comportamiento. Debido a que se consideró material elasto-plástico la inestabilidad ocurre para presiones inferiores a las elásticas. En este caso existen dos procesos de inestabilidad: el primero, por bifurcación sin restricciones, y el segundo por punto límite con restricciones. Los resultados en este trabajo se obtuvieron en forma numérica mediante elementos finitos.

Como comentario final, en estabilidad elástica sólo hay bifurcación en sistemas perfectos, mientras que cuando existen restricciones sólo aparece bifurcación en sistemas que tienen imperfecciones.

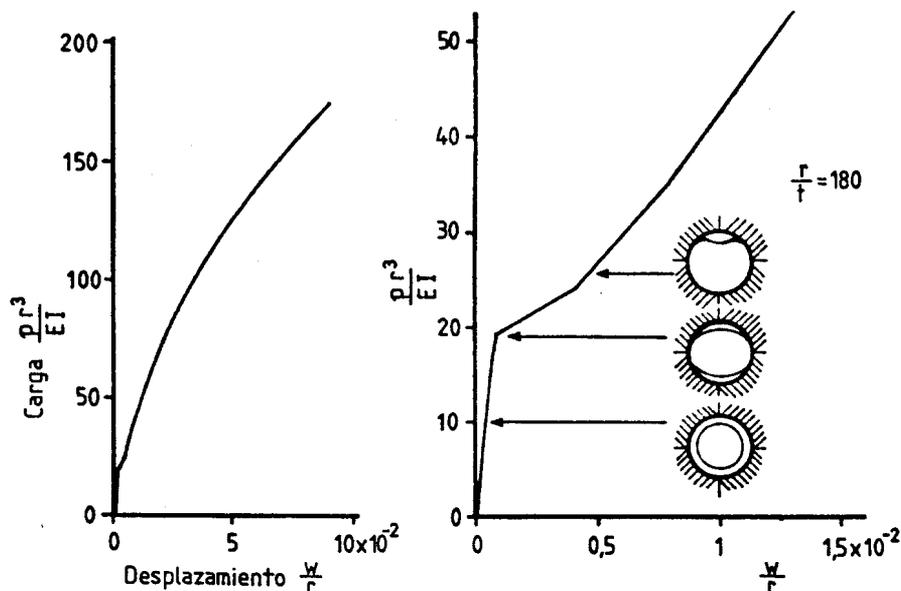


Figura 5. Inestabilidad de un cilindro corto que inicialmente no está en contacto con la cavidad /18/.

INESTABILIDAD DE ANILLOS EN CONTORNO MOVIL

El-Bayoumi /19/ reportó el primer estudio sobre un anillo circular imperfecto en un contorno circular que se contrae uniformemente. Si se denomina por d a la contracción uniforme de la cavidad (Figura 6), los resultados muestran una trayectoria fundamental y una secundaria inestable en su parte inicial (pequeños desplazamientos poscríticos) y estable para desplazamientos grandes. Para el caso que no exista imperfección, la trayectoria fundamental no presenta bifurcación a carga finita (representada por d), lo que confirma el hecho previamente mencionado que un anillo perfecto en un contorno que se contrae uniformemente no saltará a una posición poscrítica.

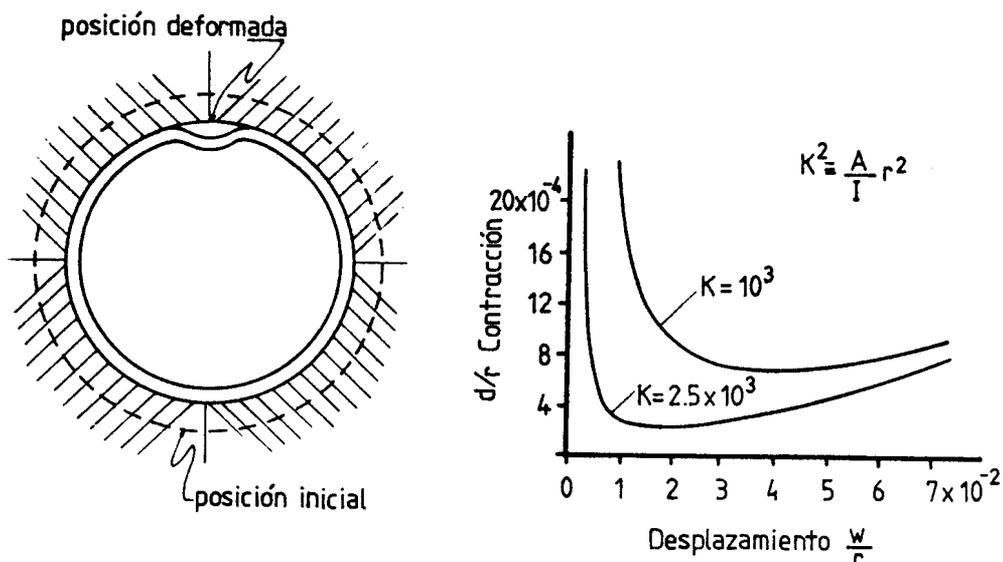


Figura 6. Inestabilidad de un anillo en una cavidad que se contrae /19/.

SEGUNDA PARTE
FORMULACION DISCRETA PARA ESTABILIDAD CON RESTRICCIONES

CRITERIO ENERGETICO DE ESTABILIDAD

Consideremos un sistema discreto, cuyo comportamiento está caracterizado por un parámetro de control Λ y por coordenadas generalizadas Q_1 . En el presente contexto Q_1 estarán asociadas a desplazamientos del sistema, mientras que Λ es el parámetro con el que se incrementan las cargas actuantes. La energía potencial total del sistema, $V(Q_1, \Lambda)$ puede escribirse en la forma

$$V(Q_1, \Lambda) = U(Q_1) - \Lambda W(Q_1) \quad (6)$$

donde $U(Q_1)$ es la energía interna de deformación; y el segundo término es asociado a las cargas.

El criterio energético de estabilidad estará basado en los dos axiomas siguientes:

- 1) Un sistema está en equilibrio, bajo la acción de un sistema de cargas dado, si para cualquier desplazamiento virtual la primera variación de V es mayor o igual a cero.
- 2) Un estado de equilibrio es estable si V es un mínimo relativo completo con respecto a las coordenadas generalizadas. No se excluyen de esta definición a mínimos discontinuos.

Tomando como referencia un estado dado por Q_1^F , se investigará la energía potencial en un estado vecino Q_1 :

$$Q_1 = Q_1^F + q_1 \quad (8)$$

La expansión de V alrededor de un estado definido por Q_1^F para un valor de Λ constante resulta en

$$\begin{aligned} V(Q_h, \Lambda) = & V(Q_h^F, \Lambda) + V_1(Q_h^F, \Lambda) q_1 + 1/2! V_{1j}(Q_h^F, \Lambda) \\ & q_1 q_j + 1/3! V_{1jk}(Q_h^F, \Lambda) q_1 q_j q_k \\ & + 1/4! V_{1jkl}(Q_h^F, \Lambda) q_1 q_j q_k q_l + \dots \quad (9) \end{aligned}$$

donde $V_1 = \frac{\partial V}{\partial Q_1}$.

La condición de equilibrio se expresará de la forma

$$\delta V \geq 0 \quad (10)$$

que para cinemática no lineal resulta

$$(V_1 + V_{1j} q_j + \frac{1}{2!} V_{1jk} q_j q_k + \dots) q_1 \geq 0 \quad (11)$$

mientras que para cinemática lineal se reduce a

$$V_1 q_1 \geq 0 \quad (12)$$

Un estado de equilibrio será estable si cumple con

$$\delta^2 V = V_{1j} q_i q_j > 0 \quad (13)$$

para lo que la matriz de coeficiente de la forma cuadrática (13) debe ser positiva definida. Una forma de expresar lo anterior es exigir que el determinante

$|V_{ij}^F(Q_n, \lambda)|$ y los determinantes menores sean no negativos. En la teoría de estabilidad elástica es común diagonalizar la forma cuadrática V_{ij}^F , en cuyo caso los coeficientes de la diagonal son directamente coeficientes de estabilidad asociados a grados de libertad.

LA FUNCION DE RESTRICCIONES

Denominaremos por sistema libre aquél en el que las coordenadas generalizadas Q_i pueden tomar cualquier incremento pequeño independiente. Un sistema será denominado unilateral si alguna de sus coordenadas no pueden tomar incrementos en determinadas direcciones.

Una restricción unilateral puede expresarse como

$$F^j(Q_i) = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

Cada F^j define una superficie en el espacio de las coordenadas Q_i . Por ejemplo, para un sistema cuyo comportamiento se expresa a través de Q_1 y Q_2 , la Figura 7 muestra una posible curva de restricción.

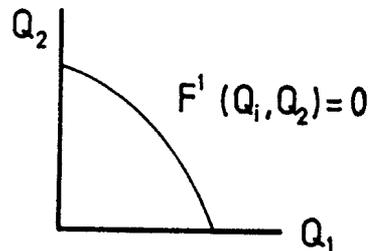


Figura 7. Ejemplo de función de restricción.

Se puede construir cada función F^j de tal modo que los valores permitidos de las coordenadas generalizadas cumplan con la condición

$$F^j(Q_i) \geq 0 \quad (15)$$

La Figura 8 ilustra valores de energía potencial V a través de contornos, una función de restricciones y un estado considerado. Nótese que si $F^j > 0$, la restricción está inactiva, y a los efectos prácticos es como si no existiera (Figura 8.a). Pero si $F^j = 0$, la restricción está activa y limita los valores que pueden tomar los grados de libertad (Figura 8.b).

En muchos problemas las restricciones F^j tienen la

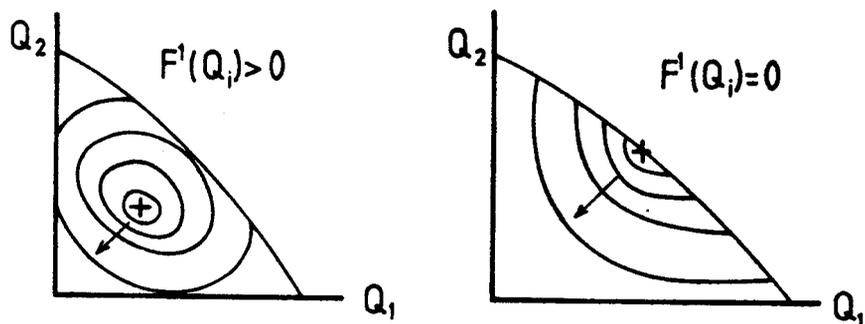


Figura 8. Zonas admisibles para coordenadas generalizadas.

forma lineal

$$F^j(Q_1) = A_{ij} Q_1 - c_j$$

o bien, en forma matricial,

$$\underline{F} = A \underline{Q} - \underline{c} \quad (16)$$

donde \underline{F} es el vector de restricciones; \underline{Q} el de coordenadas generalizadas.

DETERMINACION DE CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO

Trataremos a continuación el problema siguiente: Dado $V(\underline{Q})$ con restricciones $\underline{F}(\underline{Q}) \geq \underline{Q}$, encontrar estados \underline{Q} de equilibrio para un Λ determinado.

Existen varias formas de abordar ese problema, y en esta reseña sólo trataremos dos: una basada en técnicas de sustitución, y otra que emplea multiplicadores de Lagrange.

Un Método de Substitución

Las variables que definen el problema pueden separarse en base al número de funciones \underline{F} :

$$\underline{Q}^T = (\underline{Q}_1^T, \underline{Q}_2^T) \quad (17)$$

donde \underline{Q}_1 tiene la misma dimensión que \underline{F} . La primera variación de V puede escribirse como

$$\delta V = d\underline{v}_1^T \underline{q}_1 + d\underline{v}_2^T \underline{q}_2 \quad (18)$$

donde $dV = \partial V / \partial Q$.

Las funciones de restricción se pueden separar asimismo en la forma

$$F = (A_{11} Q_1 + A_{12} Q_2) - Q \quad (19)$$

y la variación de F , que también debe ser no negativa, se puede escribir como

$$\delta F = A_{11} Q_1 + A_{12} Q_2 \quad (20)$$

De la anterior se deduce que

$$Q_1 = A_{11}^{-1} (\delta F - A_{12} Q_2) \quad (21)$$

Reemplazando Q_1 en δV ,

$$\delta V = (dV_1^T A_{11}^{-1}) \delta F + (dV_2^T - dV_1^T A_{11}^{-1} A_{12}) Q_2 \quad (22)$$

Para que un estado esté en equilibrio, debe satisfacer

la (10). Se puede demostrar /6/ que esa condición equivale a las dos condiciones siguientes

$$dV_2^T - (A_{11}^{-1} A_{12})^T dV_1^T = 0 \quad (23)$$

$$(A_{11}^{-1})^T dV_1^T \geq 0 \quad (24)$$

Multiplicadores de Lagrange en Problemas con Restricciones que son Desigualdades.

Una vía alternativa de formular el problema de equilibrio consiste en usar los teoremas de multiplicadores de Lagrange, tal como ha sido presentado por Feijóo y Barbosa /4/. Esos autores construyen la función de restricción de la forma

$$F(Q) \leq Q \quad (25)$$

Se introducen multiplicadores de Lagrange para liberar las restricciones sobre Q

$$\min_Q \max_{\lambda \geq 0} \{ X(Q, \lambda) \} \quad (26)$$

donde X es un nuevo funcional, definido como

$$X = V(Q) + \lambda^T F(Q) \quad (27)$$

Una justificación de la regla de multiplicadores de Lagrange para problemas con desigualdades puede encontrarse en los textos sobre optimización, por ejemplo en la Referencia /24 /.

Ahora los Q no están restringidos, y son independientes de los multiplicadores de Lagrange λ , de modo que puede efectuarse la minimización de X en Q sin restricciones:

$$\delta X = \delta V + \lambda^T \delta F = 0 \quad (28)$$

de donde puede obtenerse $Q = Q(\lambda)$.

Reemplazando $Q(\lambda)$ en X el problema puede escribirse como

$$\max_{\lambda \geq 0} \{ X = V(\lambda^2) + \lambda^T F \} \quad (29)$$

que es un problema de programación cuadrática en los multiplicadores de Lagrange λ . Nótese sin embargo, que las restricciones son ahora más simples que en problema original.

Una vez obtenido λ , se evalúa $Q = Q(\lambda)$.

ESTABILIDAD DE UN ESTADO DE EQUILIBRIO

Se investigará a continuación la estabilidad de un estado de equilibrio que ya ha sido determinado por alguna vía. Por lo tanto, ya no existe la posibilidad de tener $F > Q$, sino que en algunas zonas las restricciones son activas y en otras inactivas. La zona de contacto está ahora perfectamente determinada. El problema puede escribirse ahora en los siguientes términos:

Dado un estado de equilibrio Q , con restricciones $F(Q) = Q$, determinar si el equilibrio es estable.

o bien

Dado un estado de equilibrio, determinar el signo de $\delta^2 V$, sujeta a $F = Q$ sobre parte del contorno

Consideremos inicialmente el funcional X , definido en la ecuación (27). La segunda variación tiene la forma

$$\delta^2 X = \delta^2 V + \lambda^T \delta^2 F \quad (30)$$

Pero si las restricciones tienen la forma lineal (16), resulta $\delta^2 F = 0$, con lo que se pierde la restricción. En lugar de trabajar con X, puede construirse un nuevo funcional, Z, definido como

$$\delta Z = \delta X + \underline{\mu}^T \underline{F} \quad (31)$$

cuya variación resulta

$$\delta^2 Z = \underline{q}^T d^2 X \underline{q} + \underline{\mu}^T dF \underline{q}$$

Si se particionan los grados de libertad como en la (17),

$$\begin{aligned} \delta^2 Z = & (\underline{q}_1^T d^2 X_{11} + \underline{q}_2^T d^2 X_{21} + \underline{\mu}^T A_{11}) \underline{q}_1 \\ & + (\underline{q}_1^T d^2 X_{12} + \underline{q}_2^T d^2 X_{22} + \underline{\mu}^T A_{12}) \underline{q}_2 . \end{aligned} \quad (33)$$

Los nuevos multiplicadores de Lagrange, $\underline{\mu}$, se calculan de

$$\underline{q}_1^T d^2 X_{11} + \underline{q}_2^T d^2 X_{21} + \underline{\mu}^T A_{11} = 0 \quad (34)$$

de donde

$$\underline{\mu}^T = - (\underline{q}_1^T d^2 X_{11} + \underline{q}_2^T d^2 X_{21}) A_{11}^{-1} \quad (35)$$

Además,

$$\underline{\mu}^T A_{12} \underline{q}_2 = 0$$

de la que puede obtenerse \underline{q}_1

$$\underline{q}_1 = - A_{11}^{-1} A_{12} \underline{q}_2 \quad (36)$$

Reemplazando $\underline{\mu}$, \underline{q}_1 en $\delta^2 Z$, y operando, se tiene

$$\delta^2 Z = \underline{q}_2^T \delta^2 \bar{Z} \underline{q}_2 \quad (37)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta^2 \bar{Z} = & d^2 X_{22} - A_{12}^T (A_{11}^{-1})^T d^2 X_{12} - d^2 X_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \\ & + A_{12}^T (A_{11}^{-1})^T d^2 X_{11} A_{11}^{-1} A_{12} \end{aligned} \quad (38)$$

que es la ecuación (29) de /6/. Para que la segunda variación de Z sea positiva o nula, la matriz asociada a la forma cuadrática debe ser positiva definida. Por lo tanto, el equilibrio será estable si el determinante

$$| \delta^2 \bar{Z} | > 0 \quad (39)$$

y los determinantes menores son positivos.

Restricciones de la forma $F = Q \geq 0$

En este caso, las condiciones de estabilidad se simplifican notablemente, dado que $A_{12} = 0$, y la matriz de coeficientes de la forma cuadrática (38) resultan

$$\delta^2 \bar{Z} = d^2 X_{22} \quad (40)$$

Además, considerando la (30), se deduce que

$$\delta^2 \bar{Z} = d^2 V \quad (41)$$

donde $d^2 V_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial Q_2 \partial Q_2}$

Por lo tanto, las condiciones de estabilidad del sistema con restricciones de la forma $F = Q \geq 0$ son las mismas que las del sistema sin restricciones unilaterales. Es el caso de un anillo que está restringido sin fricción por una cavidad rígida.

CONCLUSIONES

El presente trabajo se ha concentrado en ilustrar la importancia que problemas de inestabilidad con restricciones pueden tener en ingeniería, y en revisar las condiciones de equilibrio y estabilidad que deben satisfacer sistemas discretos. Además del problema de un anillo en una cavidad rígida discutido en la primera parte, existen otros problemas de interés en diversos campos, tales como la delaminación y fisuración en materiales composites.

Sin embargo, una revisión de la literatura muestra que hasta el presente no se cuenta con un marco teórico suficiente para estudiar inestabilidad con restricciones, y se considera necesario extender la teoría de estabilidad elástica para incluir restricciones.

REFERENCIAS

1. Koiter, W.T., On the Stability of Elastic Equilibrium, Tesis Doctoral, Delft, Holanda, 1945.
2. Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, London, 1973.
3. Kikuchi, N., Oden, J.T., Contact problems in elastostatics, en Finite Elements, Vol. V: Special Problems in Solid Mechanics (Ed. J.T. Oden, G.F. Carey), Cap. 4, 1984, 158-212.
4. Feijóo, R.A., Barbosa, H., An introduction to the unilateral contact problem in mechanics, en Mecánica Computacional, vol. 3 (Ed. S.R. Idelsohn), AMCA, Santa Fe, 1985.
5. Burgess, I., Some One way Buckling Phenomena, Ph.D. Thesis, University of London, 1969.
6. Burgess, I., On the equilibrium and stability of discrete one-way structural systems, Int. J. Solids and Structures, vol. 7, 1971, 667-683.
7. Amstutz, E., Das Einbeulen von Schacht-und Stollenpanzerungen, Schweizerische Bauzeitung, vol. 68, 1950, 102-105.
8. Lo, H., Bogdanoff, J.L., Goldberg, J.E., Crawford, R., A buckling problem of a circular ring, Proc. Fourth National Congress on Applied Mechanics, Vol. 1, 1962, 691-695.
9. Bucciarelli, L.L., Pian, T.H.H., Effect of initial imperfections on the stability of a ring confined in an imperfect rigid boundary, J. Applied Mechanics, ASME, 1964, 979-984.
10. Hsu, P.T., Elkon, J., Pian, T.H.H., Note on the instability of circular rings confined to a rigid boundary, J. Applied Mechanics, ASME, vol. 31, 1964, 559-562.
11. Chan, H.C., Mc Minn, S.J., The stability of a uniformly compressed ring supported by a rigid circular surface, Int. J. Mechanical Sciences, Vol. 8, 1966, 433-442.
12. Zagustin, E.A., Herrmann, G., Stability of an elastic ring in a rigid cavity, J. Applied Mechanics, ASME, 1967, 263-270.

13. Chicuriel, R., Shrink buckling of thin circular rings, *J. Applied Mechanics*, ASME, vol. 35, 1968, 608-610.
14. Burgess, I., The buckling of a radially constrained imperfect circular ring, *Int. J. Mechanical Sciences*, vol. 13, 1971, 741-753.
15. Yamamoto, Y., Matsubara, N., Buckling of a cylindrical shell under external pressure restrained by an outer rigid wall, en *Collapse* (Ed. J.M.T. Thompson, G.W. Hunt), Cambridge University Press, Cambridge, 1983, 494-504.
16. Kyriakides, S., Youn, S.K., On the collapse of circular confined rings under external pressure, *Int. J. Solids and Structures*, vol. 20, 1984, 699-713.
17. Soong, T.C., Choi, I., Buckling of an elastic elliptical ring inside a rigid boundary, *J. Applied Mechanics*, ASME, vol. 52, 1985, 523-528.
18. García Garino, C., López Triaca, R., Brun, G., Bauer, J., Análisis de tuberías blindadas sometidas a presión exterior bajo condiciones de vínculo unilateral, en *Mecánica Computacional*, vol. 5 (Ed. L.A. Godoy), AMCA, 1986, 377-391.
19. El-Bayoumi, L., Buckling of a circular elastic ring confined to a uniformly contracting circular boundary, *J. Applied Mechanics*, ASME, 1972, 758-766.
20. Palmer, A.C., Martin, J.H., Buckle propagation in submarine pipelines, *Nature*, vol. 254, 1975, 46-48.
21. Kyriakides, S., Babcock, C.D., Experimental determination of the propagating pressure of circular pipes, *J. Applied Mechanics*, ASME, vol. 103, 1981, 328-336.
22. Steel, W.J., Spence, J., On propagating buckles and their arrest in subsea pipelines, *Proc. Institution of Mechanical Engineers*, vol. 197 A, 1983, 139-147.
23. Tam, C.K.W., Croll, J.G.A., An improvement on the propagation buckle performance of subsea pipelines, *Thin-Walled Structures*, vol. 4, 1986, 423-448.
24. Hesteness, M.R., *Optimization Theory: The Finite Dimensional Case*, R.E. Krieger Publishing Co., New York, 1981.